1. Udowodnij, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{(3n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{(3n-1)^2} = \tfrac{4}{3^3}\pi^2 \left(2\cos(\tfrac{2\pi}{3})\right)^0 = \tfrac{4}{3^3}\pi^2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{(5n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{(5n-1)^2} = \tfrac{4}{5^3}\pi^2 \left(2\cos(\tfrac{2\pi}{5}) + 3\right) = \tfrac{2}{25}\pi^2 \left(1 + \tfrac{\sqrt{5}}{5}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{(7n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{(7n-1)^2} = \tfrac{4}{7^3}\pi^2 \left((2\cos(\tfrac{2\pi}{7}))^2 + 3(2\cos(\tfrac{2\pi}{7})) + 4\right).$$

Dowód. Niech q naturalne takie, że $q > 1$.
Oznaczmy standardowo przez $\phi(q)$ liczbę liczb mniejszych od q względnie pierwszych z q.
Niech q będzie potęgą liczby pierwszej różnej od 2, powiedzmy $q = p^\alpha$.
Wtedy $\phi(q) = p^{\alpha-1}(p-1)$.
Definujemy charakter dla modułu q biorąc dowolny zespolony ω pierwiastek stopnia $\phi(q)$ z 1, czyli

$$\omega^{\phi(q)} = 1.$$

Przyjmujemy

$$\chi(n) = \omega^{\nu(n)} \text{ dla } (n,p) = 1,$$

gdzie $\nu(n)$ oznacza index n względem ustalonego generatora qrupy multiplikatywnej $\{1, 2, \ldots, \phi(q)\}$.
(Mianowicie jeśli $q = p^\alpha$ wtedy zbiór $\{1, 2, \ldots, \phi(q)\}$ wraz z mnożeniem modulo q stanowi grupę cykliczną rzędu $\phi(q)$.
Niech g będzie generatorem tej grupy, tzn $\{1, 2, \ldots, \phi(q)\} = \{g^0, g^1, \ldots, g^{\phi(q)-1}\}$.
Jeśli $(n,p) = 1$ to $(n,q) = 1$ oraz $n \equiv g^s(\mod q)$ dla pewnego $s = \nu(n)$ takiego, że $s \in \{0, 1, , \ldots, \phi(q) - 1\}$.)
Charakter główny dla modułu q oznaczamy przez χ_1 (inaczej χ_{ω^0}),
mamy $\chi_1(a) = 1$ jeśli $(a,q) = 1$ oraz $\chi_1(a) = 0$ jeśli $(a,q) > 1$.
Ponadto

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{q} \chi(a) e^{\frac{2\pi i a}{q}},$$

$$B_{2,\chi} = \frac{1}{q} \sum_{a=1}^{q} \chi(a) a^2,$$

$$L(2,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^2}.$$

Zachodzą wzory

$$L(2,\chi) = \frac{\pi^2}{q^2} \tau(\chi) B_{2,\bar{\chi}}, \text{ dla } \chi \neq \chi_1. \tag{0.1}$$

$$L(2,\chi_1) = \frac{\pi^2}{6} \prod_{\substack{p|q \\ p \text{ liczba pierwsza}}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Szukaną sumę można policzyć ze wzoru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(qn+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(qn-1)^2} =$$

$$= \frac{2}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \text{charakter parzysty} \\ \text{dla modułu } q}} L(2,\chi).$$

Niech $q = 3$, mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{(3n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{(3n-1)^2} = \tfrac{\pi^2}{6}\tfrac{8}{9} = \tfrac{4}{27}\pi^2$$

Niech zatem $q = 5$.
Weźmy $\omega = i$ pierwotny pierwiastek stopnia 4 z 1 oraz $\rho = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$ pierwotny pierwiastek stopnia 5 z 1.
Mamy wtedy

$$t = \rho + \rho^{-1} = 2\cos\tfrac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad t^2 - 2 = \rho^2 + \rho^{-2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Gdzie $t^2 + t = 1$.
Możliwe są następujące charaktery dla modułu 5:

n	1	2	3	4	$B_{2,\bar{\chi}}$	$\tau(\chi)$	$L(2,\chi)$
$\chi_1(n)$	1	1	1	1	$\frac{1}{5}(1+4+9+16) = 6$	$\rho + \rho^2 + \rho^{-2} + \rho^{-1} = -1$	$\frac{\pi^2}{6}\frac{24}{25} = \frac{4}{25}\pi^2$
$\chi_\omega(n)$	1	i	$-i$	-1	$\frac{1}{5}(1-4i+9i-16) = -3+i$		
$\chi_{\omega^2}(n)$	1	-1	-1	1	$\frac{1}{5}(1-4-9+16) = \frac{4}{5}$	$2t+1 = \rho - \rho^2 - \rho^{-2} + \rho^{-1} = \sqrt{5}$	$\frac{\pi^2}{25}\frac{4}{5}(2t+1) = \sqrt{5}\frac{\pi^2}{25}\frac{4}{5} = \frac{4}{25}\pi^2\frac{\sqrt{5}}{5}$
$\chi_{\omega^3}(n)$	1	$-i$	i	-1	$\frac{1}{5}(1+4i-9i-16) = -3-i$		

Parzystymi charakterami są $\chi_1 = \chi_{\omega^0}$ oraz χ_{ω^2} zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{(5n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{(5n-1)^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(L(2,\chi_{\omega^0}) + L(2,\chi_{\omega^2})) = \tfrac{4}{5^3}\pi^2\,(t+3) = \tfrac{2}{25}\pi^2\left(1 + \tfrac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Niech teraz $q = 7$.
Weźmy $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ pierwotny pierwiastek stopnia 6 z 1 oraz $\rho = \cos(\frac{2\pi}{7}) + i\sin(\frac{2\pi}{7})$ pierwotny pierwiastek stopnia 7 z 1.
Mamy wtedy

$$\rho + \rho^{-1} = 2\cos\tfrac{2\pi}{7} = t,$$

$$\rho^2 + \rho^{-2} = (\rho+\rho^{-1})^2 - 2 = 4\cos^2\tfrac{2\pi}{7} - 2 = t^2 - 2,$$

$$\rho^3 + \rho^{-3} = (\rho+\rho^{-1})^3 - 3(\rho+\rho^{-1}) = 8\cos^3\tfrac{2\pi}{7} - 6\cos\tfrac{2\pi}{7} = t^3 - 3t = -t^2 - t + 1,$$

gdzie $t^3 + t^2 - 2t = 1$. Możliwe są następujące charaktery dla modułu 7:

n	1	2	3	4	5	6	$B_{2,\bar{\chi}}$
$\chi_1(n)$	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{7}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{7}$
$\chi_\omega(n)$	1	$-\bar{\omega}$	ω	$-\omega$	$\bar{\omega}$	-1	
$\chi_{-\bar{\omega}}(n)$	1	$-\omega$	$-\bar{\omega}$	$-\bar{\omega}$	$-\omega$	1	$\frac{1}{7}(1-4\bar{\omega}-9\omega-16\omega-25\bar{\omega}+36) = \frac{1}{7}(37-25\omega-29\bar{\omega}) = \frac{4}{7}(2+\omega) = \frac{2}{7}(5+\sqrt{3}i)$
$\chi_{-1}(n)$	1	1	-1	1	-1	-1	
$\chi_{-\omega}(n)$	1	$-\bar{\omega}$	$-\omega$	$-\omega$	$-\bar{\omega}$	1	$\frac{1}{7}(1-4\omega-9\bar{\omega}-16\bar{\omega}-25\omega+36) = \frac{1}{7}(37-29\omega-25\bar{\omega}) = \frac{4}{7}(2+\bar{\omega}) = \frac{2}{7}(5-\sqrt{3}i)$
$\chi_{\bar{\omega}}(n)$	1	$-\omega$	$\bar{\omega}$	$-\bar{\omega}$	ω	-1	

	$\tau(\chi)$	$L(2,\chi)$
$\chi_1(n)$	$\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^{-3}+\rho^{-2}+\rho^{-1}=-1$	$\frac{\pi^2}{6}\frac{48}{49}=\frac{8}{49}\pi^2$
$\chi_\omega(n)$		
$\chi_{-\bar\omega}(n)$	$\rho+\rho^{-1}-\omega(\rho^2+\rho^{-2})-\bar\omega(\rho^3+\rho^{-3})=(2\bar\omega-1)t^2+(\bar\omega+1)t+(2-3\bar\omega)$	$\frac{\pi^2}{49}\frac{4}{7}((5\bar\omega-1)t^2+(\bar\omega+4)t+(3-8\bar\omega))$
$\chi_{-1}(n)$		
$\chi_{-\omega}(n)$	$\rho+\rho^{-1}-\bar\omega(\rho^2+\rho^{-2})-\omega(\rho^3+\rho^{-3})=(2\omega-1)t^2+(\omega+1)t+(2-3\omega)$	$\frac{\pi^2}{49}\frac{4}{7}((5\omega-1)t^2+(\omega+4)t+(3-8\omega))$
$\chi_{\bar\omega}(n)$		

Parzystymi charakterami są χ_1, $\chi_{-\bar\omega}$, $\chi_{-\omega}$ zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(7n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(7n-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}(L(2,\chi_1)+L(2,\chi_{-\bar\omega})+L(2,\chi_{-\omega}))=\frac{1}{49}\pi^2\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}((5-1-1)t^2+(1+4+4)t+(3+3-8))\right)=$$

$$\frac{4}{7^3}\pi^2\left(t^2+3t+4\right).$$

$\square$

2. Ponadto policzyłem na komputerze

$$\sum_{i=0}^{10^7}\frac{1}{(3i+1)^2}\approx 1.121733.$$