ZADANIA

Maciej Zakarczemny

Spis treści

1 Algebra **5**

2 Analiza **7**

2.1 Granice iterowane, granica podwójna funkcji dwóch zmiennych. 7

2.2 Całki powierzchniowe zorientowane 8

2.2.1 Obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej 8

2.3 Zadania z ćwiczeń dla studentów 9

3 Teoria miary **17**

4 Geometria **19**

5 Geometrie nieeuklidesowe **21**

6 Planimetria **23**

7 Stereometria **25**

8 Teoria gier **27**

9 Kombinatoryka **29**

10 Logika **31**

11 Rachunek prawdopodobieństwa **33**

12 Teoria grafów **35**

13 Teoria liczb **37**

13.1 Zadania z ćwiczeń dla studentów 37

14 Teoria mnogości **39**

15 Teoria węzłów **41**

16 Topologia **43**

17 Statystyka **45**

Rozdział 1

Algebra

Rozdział 2

Analiza

2.1 Granice iterowane, granica podwójna funkcji dwóch zmiennych.

Zadanie 1. Pokaż, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{|x+y|} = 0.$$

Dowód. Niech $A_n = (x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}$ ciąg punktów taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, wtedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{|x+y|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n+y_n|} = \infty.$$

□

Zadanie 2. Pokaż, że

$$\lim_{x\to1}\lim_{y\to1} \frac{x^2-y}{x-y} = 2\lim_{y\to1}\lim_{x\to1} \frac{x^2-y}{x-y},$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} \frac{x^2-y}{x-y} = 0,$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} \frac{x^2-y}{x-y} = 1.$$

Dowód. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ wtedy

$$\lim_{x\to1}\lim_{y\to1} \frac{x^2-y}{x-y} = \lim_{x\to1}\left(\lim_{y\to1} \frac{x^2-y}{x-y}\right) = \lim_{x_n\to1,\, x_n\neq1}\left(\lim_{y_n\to1,\, y_n\neq1} \frac{x_n^2-y_n}{x_n-y_n}\right) =$$

$$= \lim_{x_n\to1,\, x_n\neq1}\left(\frac{x_n^2-1}{x_n-1}\right) = \lim_{x_n\to1,\, x_n\neq1}(x_n+1) = 2,$$

ponadto

$$\lim_{y\to1}\lim_{x\to1} \frac{x^2-y}{x-y} = \lim_{y\to1}\left(\lim_{x\to1} \frac{x^2-y}{x-y}\right) = \lim_{y_n\to1,\, y_n\neq1}\left(\lim_{x_n\to1,\, x_n\neq1} \frac{x_n^2-y_n}{x_n-y_n}\right) =$$

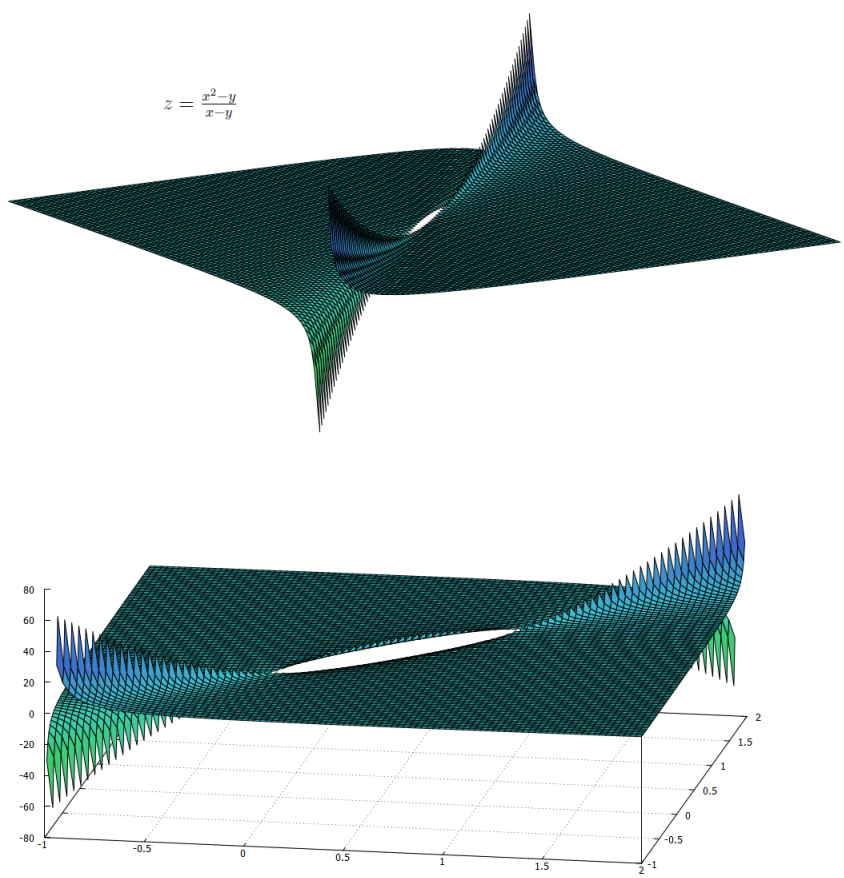
$$= \lim_{y_n \to 1,\, y_n \neq 1} \left(\frac{1 - y_n}{1 - y_n} \right) = \lim_{y_n \to 1,\, y_n \neq 1} 1 = 1,$$

skąd

$$\lim_{x \to 1} \left(\lim_{y \to 1} \frac{x^2 - y}{x - y} \right) = 2 \lim_{y \to 1} \left(\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - y}{x - y} \right).$$

$\searrow$ $\square$

Rysunek (2.1) wykresy funkcji $z = \frac{x^2-y}{x-y}$, w różnych skalach



2.2 Całki powierzchniowe zorientowane

2.2.1 Obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej

Zadanie 3. Jeżeli funkcje $P : S \to \mathbb{R}$, $Q : S \to \mathbb{R}$, $P : S \to \mathbb{R}$ są ciągłe na płacie powierzchniowym

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y),\ (x, y) \in D\},$$

gdzie D jest rzutem S na płaszczyznę Oxy, to

$$\int\int_S R(x,y,z)dxdy = \int\int_D R(x,y,f(x,y))dxdy.$$

Dowód. $\searrow$ $\square$

2.3 Zadania z ćwiczeń dla studentów

Zadanie 4. Która z liczb jest większa
a) $\sqrt[3]{25}$ czy $\sqrt[4]{125}$, b) $27^{\sqrt{3}}$ czy 243, c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\pi}$ czy $\frac{8}{27}$.

Dowód. a) Mamy

$$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}},$$

Ponieważ funkcja $f(x) = 5^x$ jest rosnąca zatem $5^{\frac{2}{3}} < 5^{\frac{3}{4}}$, a stąd $\sqrt[3]{25} < \sqrt[4]{125}$.
b) Mamy

$$27^{\sqrt{3}} = \left(3^3\right)^{\sqrt{3}} = 3^{3\sqrt{3}},\ 243 = 3^5$$

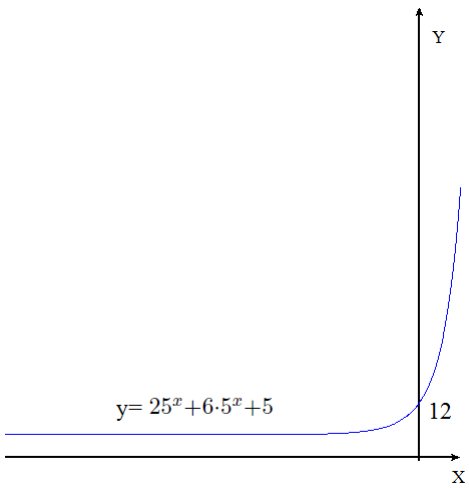
Ponieważ funkcja $f(x) = 3^x$ jest rosnąca oraz $3\sqrt{3} > 5$ zatem $3^{3\sqrt{3}} > 3^5$, a stąd $27^{\sqrt{3}} > 243$.
c) Mamy

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\pi} < \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{8}{27},$$

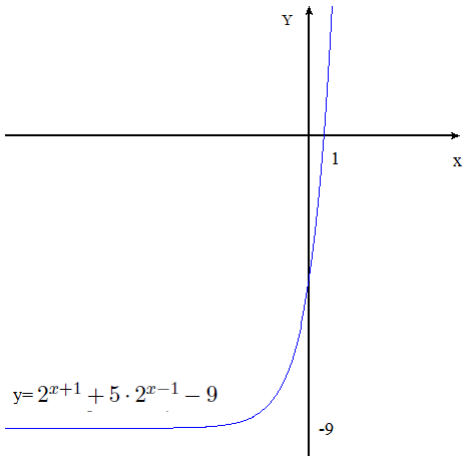
gdyż $\pi > 3$, a funkcja $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ jest malejąca. $\square$

Zadanie 5. Rozwiązać równania i nierówności:
a) $25^x + 6 \cdot 5^x + 5 = 0$, *b)* $2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-1} - 9 \leqslant 0$, *c)* $(\sqrt{6})^{x+1} > (\sqrt[3]{6})^x$, *d)* $(5\sqrt{5})^x = 0.04 \cdot (125)^{x-2}$.

Dowód. a) Weźmy $5^x = t > 0$, wtedy $t^2 + 6t + 5 = 0$, zatem $(t+5)(t+1) = 0$, czyli $t = -5$ lub $t = -1$, co przeczy temu, że $t > 0$ równanie nie ma rozwiązań.
Rysunek do podpunktu a):



b) Mamy $0 \geqslant 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-1} - 9 = 4 \cdot 2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-1} - 9 = 9 \cdot 2^{x-1} - 9 = 9 \cdot (2^{x-1} - 1)$, zatem
$0 \geqslant 2^{x-1} - 1$, a stąd $2^0 \geqslant 2^{x-1}$. Ponieważ funkcja $f(x) = 2^x$ jest rosnąca, zatem $x - 1 \leqslant 0$ czyli $x \leqslant 1$. Rysunek do podpunktu b)



c) Nierówność $(\sqrt{6})^{x+1} > (\sqrt[3]{6})^x$ jest równoważna nierówności $6^{\frac{1}{2}(x+1)} > 6^{\frac{1}{3}x}$. Ponieważ funkcja $f(x) = 6^x$ jest rosnąca, zatem kolejno $\frac{1}{2}(x+1) > \frac{1}{3}x$, $\frac{1}{6}x > -\frac{1}{2}$, $x > -3$.

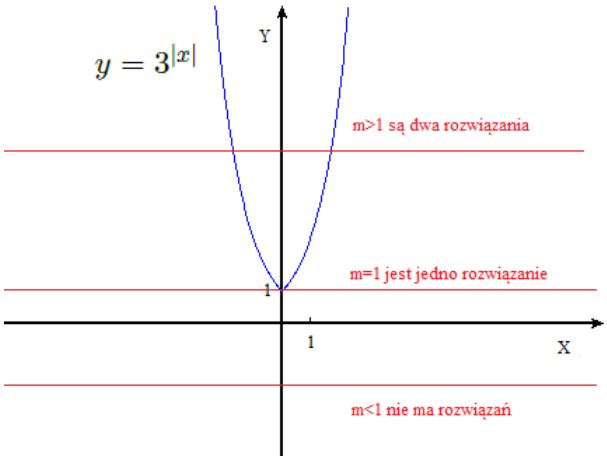
d) Równanie $(5\sqrt{5})^x = 0.04 \cdot (125)^{x-2}$ zapiszmy kolejno w równoważnych postaciach
$(5^{\frac{3}{2}})^x = 5^{-2} \cdot (5^3)^{x-2}$, $5^{\frac{3}{2}x} = 5^{-2+3x-6}$, $5^{\frac{3}{2}x} = 5^{3x-8}$.
Ponieważ funkcja $f(x) = 5^x$ jest różnowartościowa zatem $\frac{3}{2}x = 3x - 8$, $8 = \frac{3}{2}x$, $x = \frac{16}{3}$. $\square$

Zadanie 6. Dla jakiej wartości parametru m równanie ma dwa różne rozwiązania
a) $3^{|x|} = m$, *b)* $(25)^x - m \cdot 5^x - m + \frac{5}{4} = 0$.

Dowód. a)
Metoda I.
Mamy $m = 3^{|x|} \geqslant 3^0 = 1$.
Jeśli $m = 1$ to $3^{|x|} = 3^0$, ponieważ funkcja $f(x) = 3^x$ jest różnowartościowa zatem $|x| = 0$

i mamy tylko jedno rozwiązanie $x = 0$.
Jeśli $m > 1$ to $|x| = \log_3 m$ zatem mam dwa różne rozwiązania: $x = \log_3 m,\ x = -\log_3 m$.
Równane ma dwa różne rozwiązania dla $m > 1$.

Metoda II.
Narysujmy wykres funkcji $f(x) = 3^{|x|}$ oraz rodzinę prostych $y = m$.



Równane ma dwa różne rozwiązania dla $m > 1$.
b)
W równaniu $(25)^x - m \cdot 5^x - m + \frac{5}{4} = 0$ z parametrem m wstawmy $5^x = t > 0$.
Otrzymamy równanie $t^2 - mt - m + \frac{5}{4} = 0$, gdzie $t > 0$.
Równanie wyjściowe $(25)^x - m \cdot 5^x - m + \frac{5}{4} = 0$ ma dwa różne rozwiązania,
jeśli równanie $t^2 - mt - m + \frac{5}{4} = 0$, ma dwa t_1, t_2 dodatnie różne rozwiązania, tzn.

$$\Delta > 0,\ t_1 + t_2 > 0,\ t_1 t_2 > 0.$$

Mamy

$$\Delta = m^2 - 4\left(-m + \tfrac{5}{4}\right) = m^2 + 4m - 5 = (m-1)(m+5),\ t_1 + t_2 = m,\ t_1 t_2 = -m + \frac{5}{4}.$$

Zatem

$$(m-1)(m+5) > 0,\ m > 0,\ -m + \tfrac{5}{4} > 0.$$

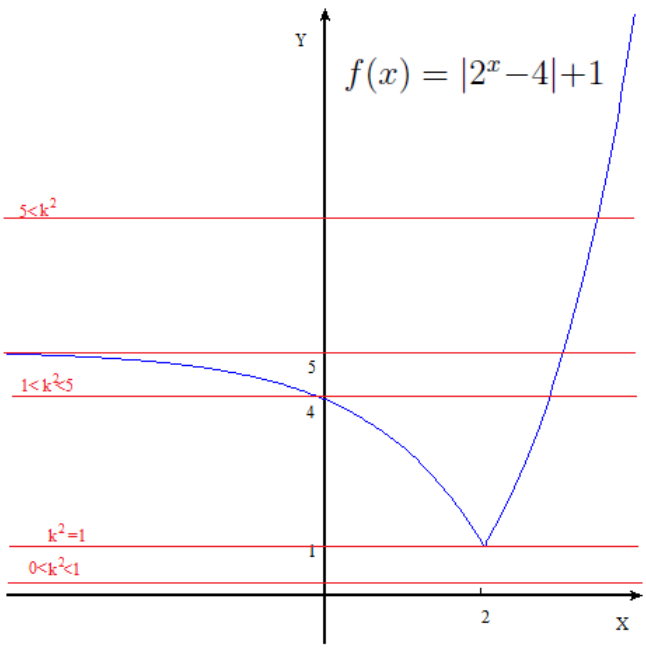
Skąd ostatecznie

$$1 < m < \tfrac{5}{4}.$$

$\square$

Zadanie 7. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = |2^x - 4| + 1$, a następnie określić liczbę pierwiastków równania $f(x) = k^2$ w zależności od wartości parametru k.

Dowód. Rysunek funkcji $f(x) = |2^x - 4| + 1$.



Z rysunku widać, że

- Jeśli $-1 < k < 1$ czyli $k^2 < 1$ to równanie $f(x) = k^2$ nie ma rozwiązań.
- Jeśli $k = -1$ lub $k = 1$ czyli $k^2 = 1$ to równanie $f(x) = k^2$ ma jedno rozwiązanie, mianowicie $x = 2$
- Jeśli $-\sqrt{5} < k < -1$ lub $1 < k < \sqrt{5}$ czyli $1 < k^2 < 5$ to równanie $f(x) = k^2$ ma dwa rozwiązania.
- Jeśli $k \leqslant -\sqrt{5}$ lub $\sqrt{5} \leqslant k$ czyli $k^2 \geqslant 5$ to równanie $f(x) = k^2$ ma jedno rozwiązania.

$\square$

Zadanie 8. Znaleźć największą liczbę x dla której zachodzi równość $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y} - \left(\frac{3}{4}\right)^{y-x} = \frac{7}{12}$ i nierówność $xy + y \leqslant 9$.

Dowód. Oznaczmy $t = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-y} > 0$.
Równanie $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y} - \left(\frac{3}{4}\right)^{y-x} = \frac{7}{12}$ przyjmuje postać $t - \frac{1}{t} = \frac{7}{12}$, gdzie $t > 0$.
Mamy kolejno $t^2 - \frac{7}{12}t - 1 = 0$, czyli $(t - \frac{4}{3})(t + \frac{3}{4}) = 0$.
Ponieważ $t > 0$, zatem $t = \frac{4}{3}$, skąd $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y} = \frac{4}{3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

Funkcja $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ jest różnowartościowa, zatem $x - y = -1$.
Mamy $y = x + 1$, z nierówności $xy + y \leqslant 9$ z treści zadania dostajemy:

$$x(x+1) + x + 1 \leqslant 9$$

czyli kolejno $x^2 + 2x - 8 \leqslant 0$, $(x+4)(x-2) \leqslant 0$.
Oznacza, to że $x \in \langle -4, 2\rangle$, zatem szukaną największą liczbą jest $x = 2$, (wtedy $y = 3$.) □

Zadanie 9. Wyznacz te wartości parametru m, dla których równanie $(0,5)^{x^2-mx+0,5m-1,5} = (\sqrt{8})^{m-1}$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie.

Dowód. Równanie $(0,5)^{x^2-mx+0,5m-1,5} = (\sqrt{8})^{m-1}$ jest równoważne kolejno równaniom

$$(2^{-1})^{x^2-mx+0,5m-1,5} = (2^{\frac{3}{2}})^{m-1},$$

$$2^{-(x^2-mx+0,5m-1,5)} = 2^{\frac{3}{2}(m-1)},$$

$$-(x^2 - mx + 0,5m - 1,5) = \frac{3}{2}(m-1), (\text{ ponieważ funkcja } f(x) = 2^x \text{ jest różnowartościowa}).$$

Skąd

$$-x^2 + mx - 2m + 3 = 0.$$

Równanie to ma dwa różne pierwiastki dodatnie x_1, x_2 jeśli

$$\Delta > 0,\ x_1 + x_2 > 0,\ x_1x_2 > 0,$$

to znaczy kolejno

$$m^2 + 4(-2m+3) > 0,\ m > 0,\ 2m - 3 > 0,$$

$$(m-6)(m-2) > 0,\ m > \tfrac{3}{2},$$

$$m \in (\tfrac{3}{2}, 2) \cup (6, \infty).$$

□

Zadanie 10. Wyznaczyć te wartości parametru k, dla których iloczyn różnych pierwiastków równania

$$5^{\frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{125^{kx+k+1}} - \frac{\sqrt{25^{k(k-1)}}}{5^{x(-x-1)}} = 0 \text{ jest najmniejszy.}$$

Dowód. Równanie przepisujemy w kolejnych równoważnych postaciach

$$5^{\frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{5^{3(kx+k+1)}} - \frac{\sqrt{5^{2k(k-1)}}}{5^{x(-x-1)}} = 0,$$

$$5^{\frac{x^2}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}(kx+k+1)} - \frac{5^{k(k-1)}}{5^{x(-x-1)}} = 0,$$

$$5^{\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}(kx+k+1)} = 5^{k(k-1)-x(-x-1)},$$

ponieważ funkcja $f(x) = 5^x$ jest różnowartościowa zatem

$$\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}(kx + k + 1) = k(k-1) + x(x+1),$$

$$x^2 + (2-3k)x + 2k^2 - 5k - 3 = 0$$

Ponieważ $\Delta = (2-3k)^2 - 4(2k^2 - 5k - 3) = k^2 + 8k + 16 = (k+4)^2$ zatem równanie ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 dla $k \neq -4$.
Liczymy iloczyn pierwiastków

$$x_1x_2 = 2k^2 - 5k - 3 = 2\left(k - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{25} \geqslant -\frac{1}{25}$$

i widzimy, że minimum tej funkcji jest dla $k = \frac{5}{4}$ (pamiętamy, że $k \neq -4$) i wynosi $-\frac{1}{25}$. □

Zadanie 11. Naszkicować wykres funkcji, która każdej wartości parametru m przypisuje liczbę pierwiastków równania

$$(m-1)4^x - 4 \cdot 2^x + m + 2 = 0.$$

Dowód. Dla $m = 1$ równanie przyjmuje postać $-4 \cdot 2^x + 3 = 0$, które ma jedno rozwiązanie $x = \log_2 \frac{3}{4} = \log_2 3 - \log_2 4 = \log_2 3 - 2$.
Jeżeli $m \neq 1$.
Podstawmy $t = 2^x > 0$ dostajemy równoważne równanie kwdratowe (równanie kwadratowe bo $m \neq 1$).

$$(m-1)t^2 - 4t + m + 2,\ t > 0.$$

Liczymy wyróżnik tego równania tzn. deltę

$$\Delta = (-4)^2 - 4(m+2)(m-1) = 16 - 4(m^2+m-2) = -4m^2 - 4m + 24 = -4(m^2+m-6) = -4(m-2)(m+3).$$

- Równanie $(m-1)t^2 - 4t + m + 2,\ t > 0$ ma dwa dodatnie różne pierwiastki t_1, t_2 jeśli

  $$-4(m-2)(m+3) = \Delta > 0,\ \frac{4}{m-1} = t_1 + t_2 > 0,\ \frac{m+2}{m-1} = t_1t_2 > 0,$$

  czyli gdy

  $$(m-2)(m+3) < 0,\ m-1 > 0,\ (m+2)(m-1) > 0,$$

  tzn, $m \in (1, 2)$. Wtedy równanie $(m-1)4^x - 4 \cdot 2^x + m + 2 = 0$ także ma dwa różne rozwiązania $x_1 = \log_2 t_1$, $x_2 = \log_2 t_2$.

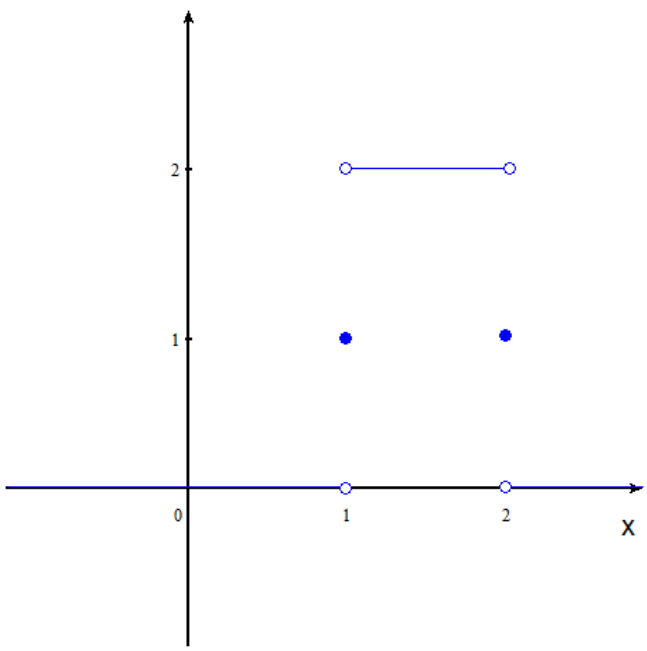
- Równanie $(m-1)t^2 - 4t + m + 2,\ t > 0$ ma jeden dodatni pierwiastek t_0 jeśli

$$-4(m-2)(m+3) = \Delta = 0,\ \frac{4}{m-1} = 2t_0 > 0,$$

czyli gdy $m = 2$.
Wtedy równanie $(m-1)4^x - 4\cdot 2^x + m + 2 = 0$ także ma jedno rozwązanie $x_0 = \log_2 t_0$.

- W pozostałych przypadkach $m \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ równanie nie ma rozwiązań. Szukany wykres funkcji, która każdej wartości parametru m przypisuje liczbę pierwiastków równania

$$(m-1)4^x - 4\cdot 2^x + m + 2 = 0.$$



□

Zadanie 12. Rozwązać równanie

$$4^x + 6^x = 2\cdot 9^x.$$

Dowód. Równanie to przepisujemy kolejno do równoważnej postaci

$$4^x + 6^x - 2\cdot 9^x = 0,$$

$$(2^x)^2 + 2^x\cdot 3^x - 2\,(3^x)^2 = 0,$$

$$(2^x + 2\cdot 3^x)(2^x - 3^x) = 0$$

Ponieważ $2^x + 2\cdot 3^x > 0$ zatem $2^x - 3^x = 0$ czyli $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$.
Ponieważ funkcja $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ jest różnowartościowa, zatem
równanie $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0$ daje $x = 0$. □

Zadanie 13. Rozwiązać nierówność $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x < 4$

Dowód. Ponieważ

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}.$$

Zatem równanie z treści zadania możemy przepisać do równoważnej postaci.

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^{-x} < 4.$$

Wstawiając

$$t = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^x > 0$$

dostajemy równoważne równanie $t + \frac{1}{t} < 4$, $t > 0$, czyli kolejno

$$t^2 - 4t + 1 < 0,\ t > 0,$$

$$\left(t - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\left(t - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}\right) < 0, \quad t > 0,$$

Czyli $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^{-2} < \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^x < \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2$
ponieważ funkcja $f(x) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^x$ jest rosnąca zatem $-2 < x < 2$.

$\square$

Rozdział 3

Teoria miary

Rozdział 4

Geometria

Rozdział 5

Geometrie nieeuklidesowe

Rozdział 6

Planimetria

Rozdział 7

Stereometria

Rozdział 8

Teoria gier

Rozdział 9

Kombinatoryka

Rozdział 10

Logika

Rozdział 11

Rachunek prawdopodobieństwa

Rozdział 12

Teoria grafów

Rozdział 13

Teoria liczb

13.1 Zadania z ćwiczeń dla studentów

Zadanie 14. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że $n^4 + 4$ jest liczbą pierwszą.

Dowód. Ponieważ

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

zatem aby $n^4 + 4$ było liczbą pierwszą trzeba aby mniejszy z czynników $n^2 + 2n + 2$, $n^2 - 2n + 2$ był równy 1, a większy $n^4 + 4$.
Mamy zatem $n^2 - 2n + 2 = 1$ skąd $n^2 - 2n + 1 = 0$ czyli $(n - 1)^2 = 0$.
Zatem $n = 1$, zauważmy, że wtedy $n^4 + 4 = 5$ jest liczbą pierwszą. $\square$

Rozdział 14

Teoria mnogości

Rozdział 15

Teoria węzłów

Rozdział 16

Topologia

Rozdział 17

Statystyka

Bibliografia

[1] Karol CWALINA and Tomasz SCHOEN, *The number of solutions of a homogeneous linear congruence*, Acta Arith. 153 (2012), pp. 271-279.