Teoria węzłów, część II

zebrał **Maciej Zakarczemny**

11 maja 2015

Plan prezentacji, dwa typy

Świat, kabli sznurków i sznurowadeł.

W ramkach różowych, z reguły, piszę używając pojęć dostępnych codziennemu doświadczeniu.

Abstrakcyjne struktury matematyczne, także historia matematyki, biologia, syllabus.

Ramki niebieskie mogą wymagać pewnej wcześniejszej wiedzy.

Cel przedmiotu Teoria Węzłów

- Celem przedmiotu jest przedstawienie elementów teorii węzłów w sposób dostępny dla studentów o umiarkowanym przygotowaniu matematycznym.
- Drugim celem jest umożliwienie studentowi zrozumienia zastosowań teorii węzłów w analizie łańcuchów DNA.

Proponowane treści programowe

1. Wprowadzenie i motywacja: przedmiot teorii węzłów oraz jej znaczenie, szczególnie w zastosowaniach *(2 godziny)*.
2. Podstawowe pojęcia: definicja węzła, rzut i diagram węzła, rzut regularny, definicja splotu.
   Problemy z rozróżnieniem węzłów - przykłady *(4 godziny)*.
3. Elementarne deformacje węzła, równoważność węzłów, węzły trywialne.
   Ruchy Reidemeistera Twierdzenie o równoważności węzłów. *(4 godzin)*.
4. Techniki kombinatoryczne rozróżniania węzłów i splotów: kolorowanie, indeks zaczepienia. *(4 godziny)*.
5. Arytmetyka splotów: mnożenie i dodawanie splotów, własności tych działań. Węzły pierwsze. *(3 godziny)*.
6. Niezmienniki wielomianowe: wielomian Aleksandra, wielomian Jonesa, nawias Kauffmana. *(4 godziny)*.
7. Grupa podstawowa węzła. *(3 godziny)*.
8. Więcej o zastosowaniach, z naciskiem na zastosowania w chemii, biologii molekularnej. *(6 godzin)*.

Wielomian Aleksandra-Conwaya

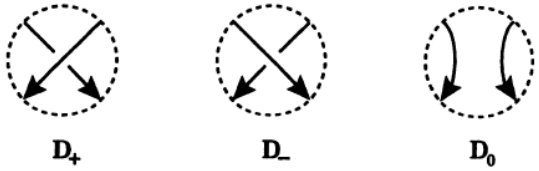
Wielomian Aleksandra-Conwaya

Definicja

Danemu zorientowanemu węzłowi lub splotowi K, możemy przypisać wielomian Laurenta $\nabla_K(z)$, od zmiennej z, tak aby spełnione były dwa aksjomaty:

A. 1 Jeśli K to trywialny węzeł, to $\nabla_K(z) = 1$.

A. 2 Załóżmy, że D_+, D_-, D_0 to regularne diagramy, odpowiednio do trzech węzłów (lub splotów), K_+, K_-, K_0.
Owe regularne diagramy są dokładnie takie same *poza* otoczeniem jednego skrzyżowania.
W tym otoczeniu, regularne diagramy różnią się w sposób przedstawiony na rysunku obok.



Wtedy wielomiany Laurenta tych trzech węzłów (lub splotów) są w następującej relacji

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z).$$

(Zatem do obliczeń możemy stosować równanie $\nabla_{K_+}(z) = \nabla_{K_-}(z) + z\nabla_{K_0}(z)$.)

Wielomian $\nabla_K(z)$, zdefiniowany wyżej jest nazwany wielomianem *Conwaya*.

Zadanie

Trzy regularne diagramy D_+, D_-, D_0 skonstruowane jak wyżej są nazwane *skein diagramami*, a relacja

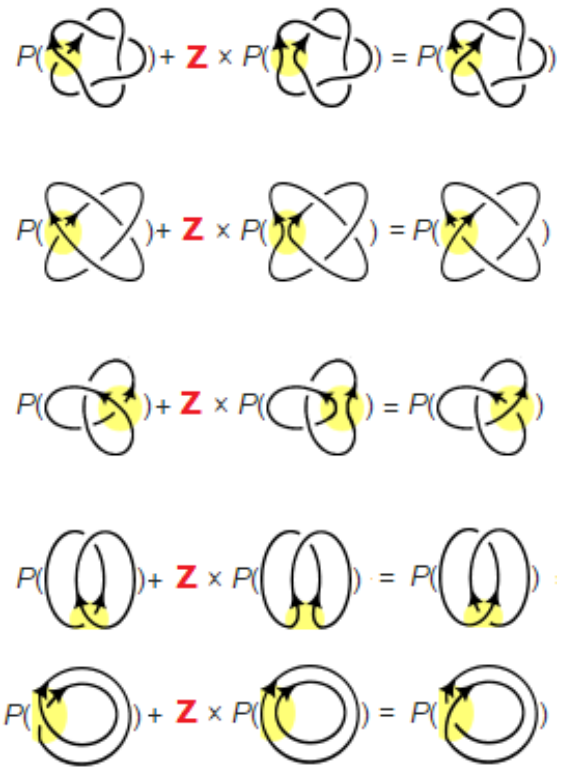
$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z),$$

pomiędzy wielomianami Laurenta K_+, K_-, K_0, jest nazwana *skein relacją*.
Operacja, która zamienia jeden z D_+, D_-, D_0 na inny jest nazwana *skein operacją*.
Będziemy pisać $\nabla_{D_+}(z)$ zamiennie z $\nabla_{K_+}(z)$ lub w rysunkach $P(D_+)$.

Ćwiczenie, policzmy wielomian Conwaya dla pięciolistnika.

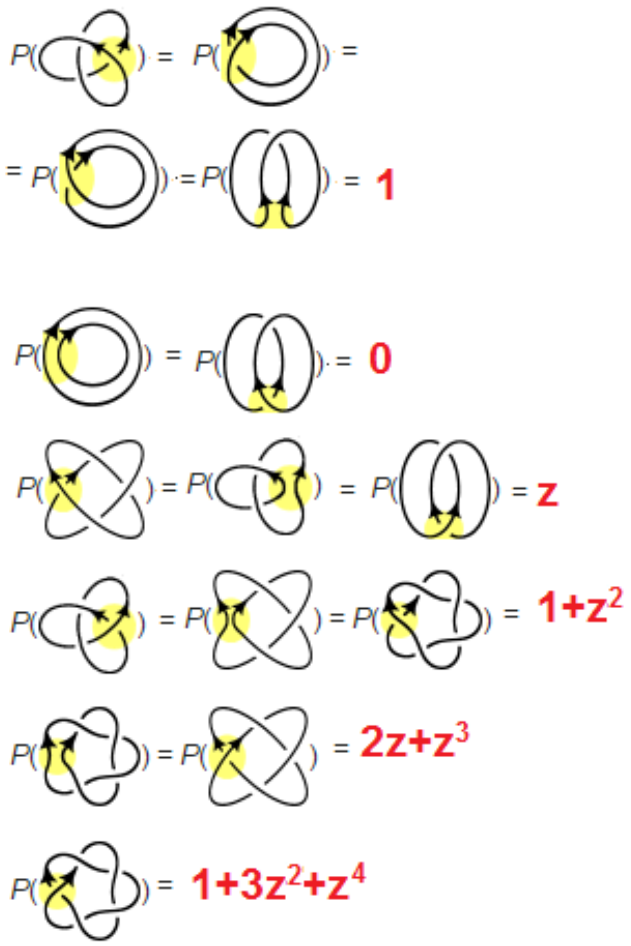
- Na początek, budujemy dwa nowe diagramy poprzez zmianę jednego ze skrzyżowań (+) pięciolistnika przedstawionego na żółto.
- Pierwszy diagram w pierwszym równaniu to trójlistnik, drugi to splot dwóch węzłów trywialnych z czterema skrzyżowaniami.
- Zmieniając jedno ze skrzyżowań (+) w tym splocie, dostajemy znów trójlistnik i splot dwóch węzłów trywialnych z dwoma skrzyżowaniami (splot Hopfa).
- Zmieniając jedno ze skrzyżowań (+) trójlistnika dostajemy węzeł trywialny , i znów splot Hopfa.
- Zmieniając jedno ze skrzyżowań (+) splotu Hopfa dostajemy splot z trywialny i węzeł trywialny.
- Splot trywialny wymaga nieco sprytu, gdyż nie ma dodatnich skrzyżowań, patrz ostatnie równanie.

Mamy zatem pięć niewiadomych (odpowiednio wielomiany Conwaya dla splotu trywialnego o dwóch ogniwach, splotu Hopfa, trójlistnika, splotu dwóch węzłów trywialnych z czterema przecięciami, pięciolistnika)oraz pięć równań, które metodą kolejnego podstawienia można rozwiązać.



Ćwiczenie, policzmy wielomian Conwaya dla pięciolistnika.

Rozwiązanie



Wielomian Aleksandra-Conwaya.

Twierdzenie

Jeśli zastąpimy zmienną z przez $\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ w wielomianie Conwaya, to otrzymamy wielomian Aleksandra.

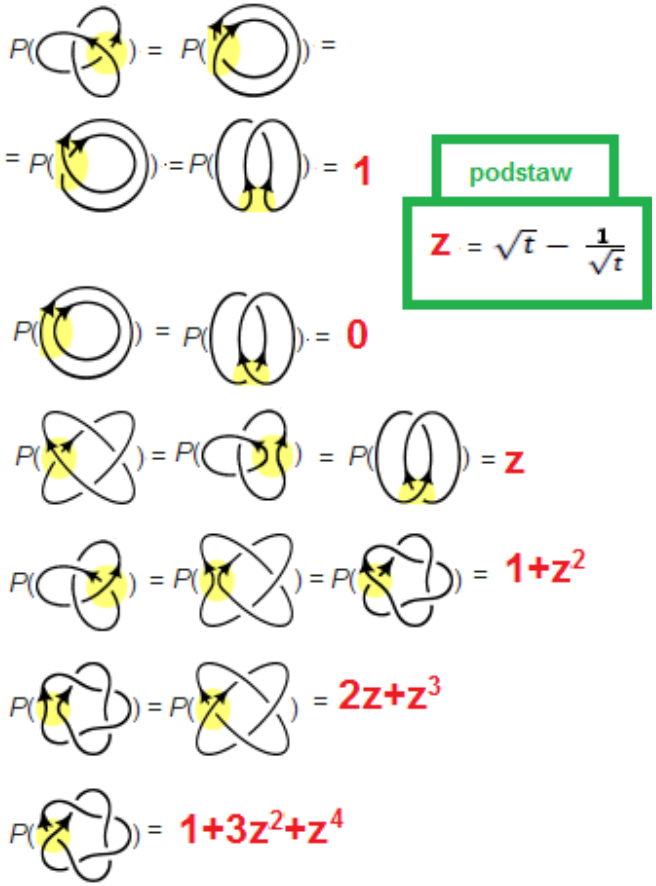
$$\Delta_K(t) = \nabla_K(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}).$$

Ćwiczenie policz wielomian Aleksandra.

Zadanie

Policz wielomian Aleksandra:

- dla węzła trywialnego,
- dla splotu trywialnego o dwóch ogniwach,
- dla splotu dwóch węzłów trywialnych z czterema przecięciami,
- dla splotu Hopfa,
- dla trójlistnika,
- dla pięciolistnika.



Ćwiczenie policz wielomian Aleksandra.

Twierdzenie: Wielomian Aleksandra splotu trywialnego o μ ogniwach jest to£samolJciowo równy 0.

Skein równanie odpowiadające do skein diagramów na rysunku obok to:

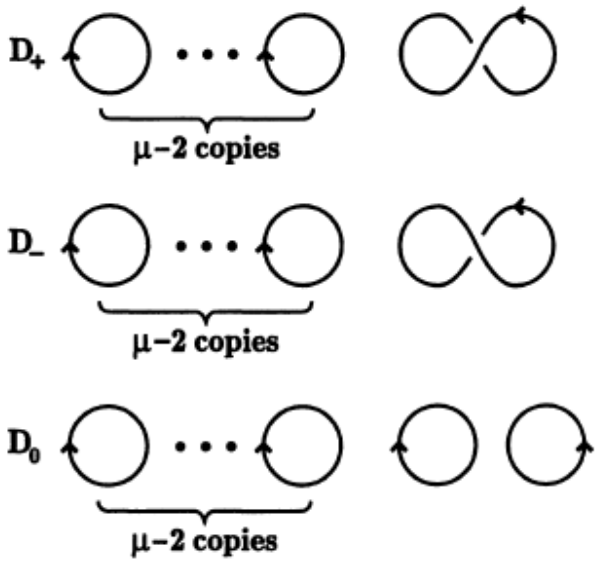
$$\nabla_{D_+}(z) - \nabla_{D_-}(z) = z\nabla_{D_0}(z).$$

Ponieważ oba D_+ oraz D_- są trywialnymi splotami o $(\mu - 1)$-ogniwach,

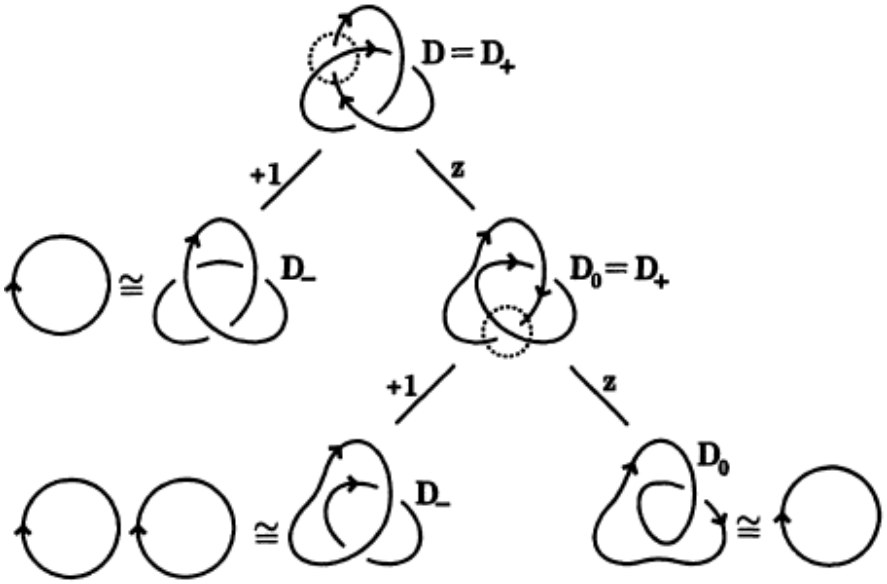
$$\nabla_{D_+}(z) = \nabla_{D_-}(z).$$

Dlatego

$$0 = z\nabla_{D_0}(z), \text{ tzn.}, \quad \nabla_{D_0}(z) = 0.$$



Drzewko skein diagramu dla trójlistnika.



$$\nabla_K(z) = 1\nabla_O(z) + z\nabla_{OO}(z) + z^2\nabla_O(z).$$

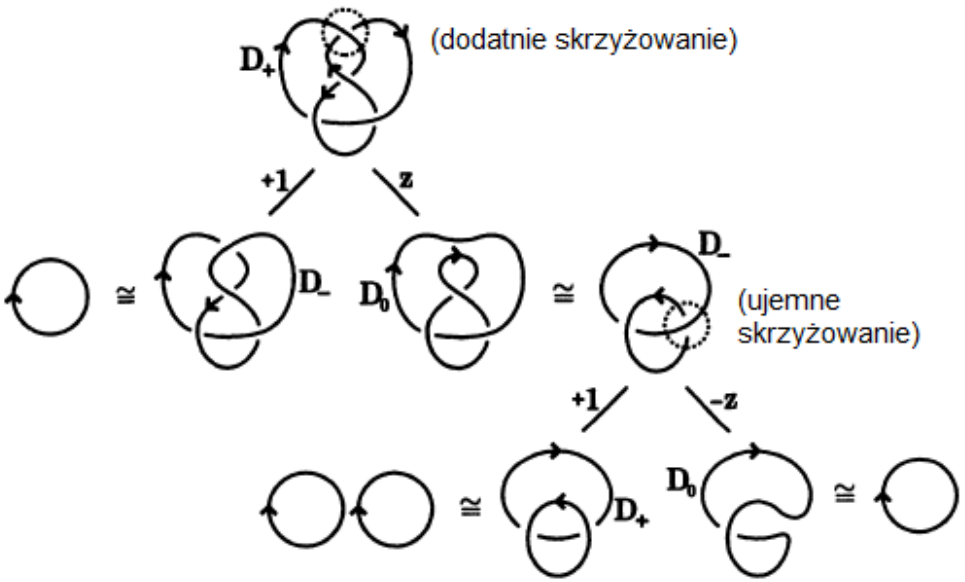
$$\nabla_O(z) = 1$$

$$\nabla_{OO}(z) = 0,$$

Wielomian Conwaya $\nabla_K(z) = 1 + z^2.$

Wielomian Aleksandra $\Delta_K(t) = 1 + (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})^2 = t^{-1} - 1 + t.$

Drzewko skein diagramu dla węzła ósemkowego.



$$\nabla_K(z) = \nabla_O(z) + z\nabla_{OO}(z) - z^2\nabla_O(z) = 1 - z^2.$$

$$\Delta_K(t) = 1 - (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})^2 = -t^{-1} + 3 - t.$$

równania z których korzystamy:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_{D_+}(z) &= \nabla_{D_-}(z) + z\nabla_{D_0}(z) \\ \nabla_{D_-}(z) &= \nabla_{D_+}(z) - z\nabla_{D_0}(z) \end{aligned}\right\}$$

Wyznacz wielomian Aleksandra.

Zadanie

Wyznacz wielomian Aleksandra dla splotu Boromeusza.

Zadanie

Wyznacz wielomian Aleksandra dla splotu Whiteheada.

Podstawowe własności wielomianu Aleksandra.

Własność:

Jeśli K jest węzłem to $\Delta_K(1) = 1$.
Jeśli L jest splotem o μ-ogniwach ($\mu \geq 2$) to $\Delta_L(1) = 0$.

Twierdzenie

Załóżmy, że $f(t)$ jest wielomianem Laurenta, który spełnia dwa warunki:

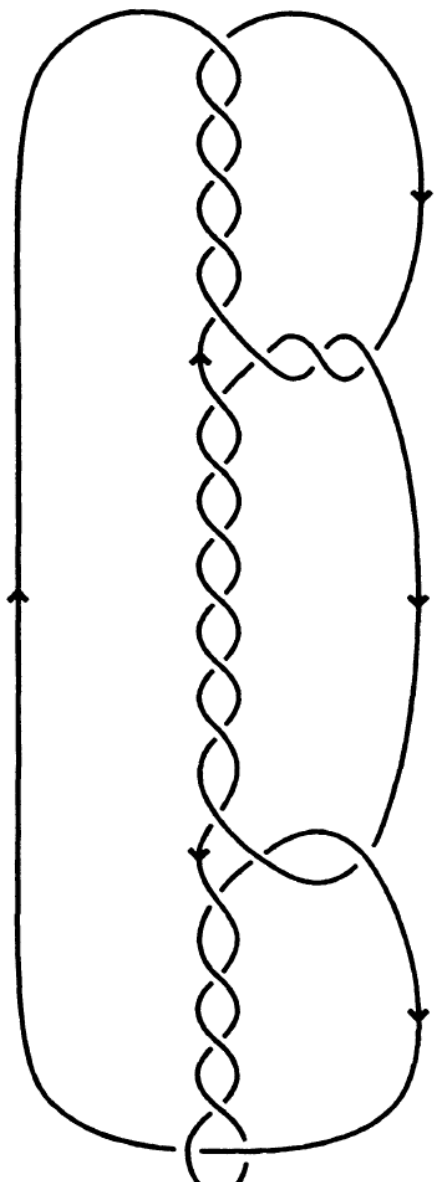
(1) $f(1) = 1$,

(2) $f(t) = f(t^{-1})$.

Wtedy *istnieje* węzeł, który ma wielomian Aleksandra równy $f(t)$.

Przykład.

Na rysunku obok znajduje się jeden z węzłów, którego wielomian Aleksandra wynosi
$f(t) = 2t^{-2} - 10t^{-1} + 17 - 10t + 2t^2$



Twierdzenie

Załóżmy, że K jest węzłem.

- Jeśli $-K$ jest węzłem otrzymanym z K przez odwrócenie orientacji K, to $\Delta_K(t) = \Delta_{-K}(t)$.
- Jeśli K^* jest lustrzanym odbiciem K, wtedy $\Delta_{K^*}(t) = \Delta_K(t)$.

Przykład

Wiemy, że wieomian Aleksandra trywialnego węzła wynosi 1; jednak istnieją nie-trywialne węzły, które mają wielomian Aleksandra 1.
Przykład jest dany na rysunku obok.

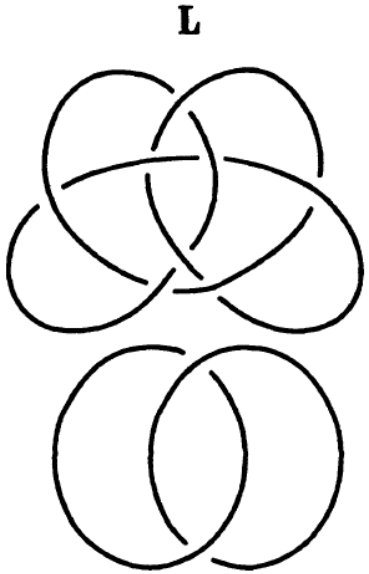
Definicja

Regularny diagram D splotu L, który jest złożeniem regularnych diagramów dwóch splotów, rozłącznych jest nazwany split diagramem (rozłożonym, podzielonym).

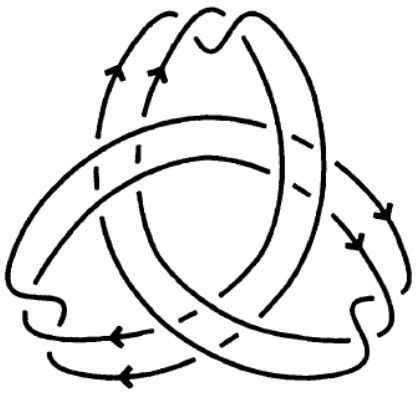
Twierdzenie

Jeśli L jest split splotem, to

$$\Delta_L(t) = 0.$$



Istnieją sploty L, takie, że $\Delta_L(t) = 0$ mimo,że nie są split węzłami. Patrz rysunek obok.



Załóżmy, że $K_1 \sharp K_2$ jest sumą spójną lub węzłów (lub splotów) K_1, K_2, to $\Delta_{K_1 \sharp K_2} = \Delta_{K_1} \Delta_{K_2}$.

Wielomian Jonesa

Wielomian Jonesa

Definicja

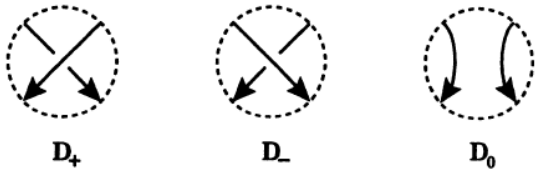
Załóżmy, że K jest zorientowanym węzłem (lub splotem) i D jest zorientowany regularny diagram dla K.
Wtedy wielomian Jonesa K, oznaczany jako $V_K(t)$, może być zdefiniowany jednoznacznie z następujących aksjomatów.

A.1: Jeśli K jest trywialnym wkęzłem, to $V_K(t) = 1$.

A.2: Załóżmy, że D_+, D_-, D_0 są skein diagramami (patrz obok), wtedy zachodi następująca relacja

$$\frac{1}{t} V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{D_0}(t).$$

$V_K(t)$ jest wielomianem Laurenta od zmiennej $\sqrt{t}$.
Wielomian Jonesa jest niezmiennikiem węzła K.



Algorytm liczenia wielomianu Jonesa jest całkowicie analogiczny, do algorytmu liczenia wielomianu Aleksandra. Jednak ponieważ współczynniki w skein relacjach są różne, wyliczenie wielomianu Jonesa jest w tym wypadku trudniejsze. Dla przykładu wielomian Jonesa splotu trywialnego O_μ dla $\mu \geq 2$ nie jest równy 0, jak w przypadku wielomianu Aleksandra.

Wielomian Jonesa

Dla trywialnego splotu O_μ o μ ogniwach mamy:
$V_{O_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\mu-1}$.

Dowód:

Dowód będzie indukcją po μ. Jeśli $\mu = 1$, to jest to Aksjomat 1.

Zatem załóżmy indukcyjnie, że równość zachodzi dla $\mu-1$

$$V_{O_{\mu-1}}(t) = (-1)^{\mu-2}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\mu-2}.$$

Rozważmy teraz skein diagram z rysunku obok, ponieważ,

$$D_+ \cong D_- \cong O_{\mu-1} \text{ oraz } D_0 \cong O_\mu,$$

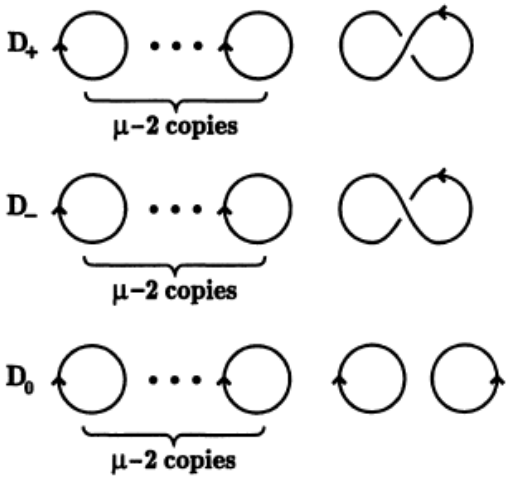
na mocy założenia indukcyjnego mamy:

$$\frac{1}{t}(-1)^{\mu-2}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\mu-2} - t(-1)^{\mu-2}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\mu-2}$$
$$= \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{O_\mu}(t).$$

Ponieważ lewa strona tej formuły to:

$$(-1)^{\mu-2}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\mu-2}\left(\frac{1}{t}-t\right)$$
$$= (-1)^{\mu-1}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\mu-2}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

zatem krok indukcyjny został wykonany i twierdzenie zachodzi.



Wielomian Jonesa

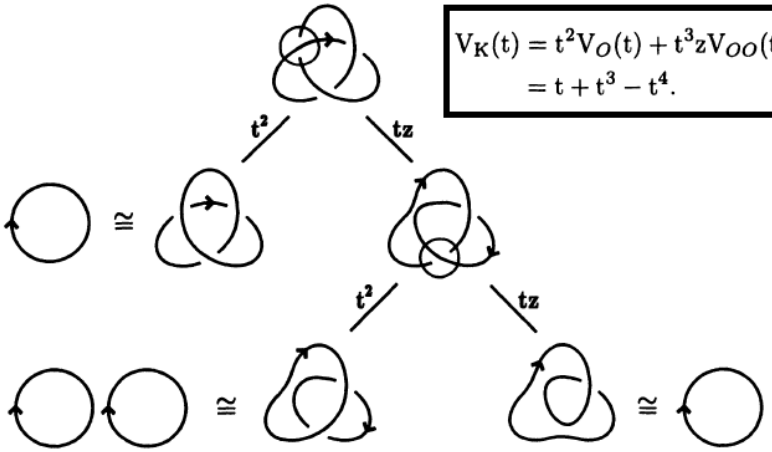
Policzymy teraz wielomian Jonesa dla prawoskrętnego trójlistnika.

Jak w przypadku wielomianu Aleksandra piszemy potrzebne nam relacje:

$$V_{D_+}(t) = t^2 V_{D_-}(t) + tzV_{D_0}(t)$$
$$V_{D_-}(t) = t^{-2} V_{D_+}(t) - t^{-1} zV_{D_0}(t),$$

gdzie dla wygody przyjeliśmy $z = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

$$\boxed{\begin{aligned} V_K(t) &= t^2 V_O(t) + t^3 z V_{OO}(t) + t^2 z^2 V_O(t) \\ &= t + t^3 - t^4. \end{aligned}}$$

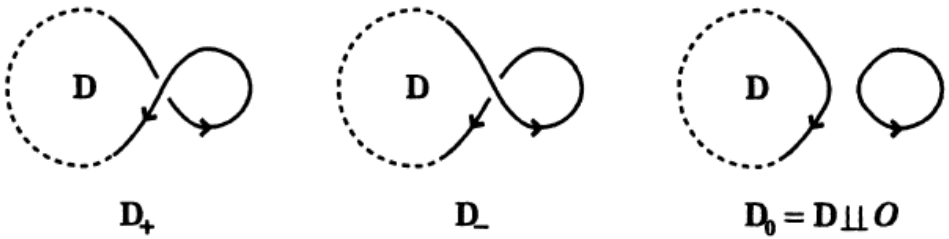


Wielomian Jonesa

Oznaczmy przez $X \amalg Y$ sumę dwóch rozłącznych zbiorów X oraz Y.

WŁASNOŚĆ:

$$V_{D \amalg O_\mu} = (-1)^\mu \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^\mu V_D(t)$$



Wielomian Jonesa

Załóżmy, że $K_1 \# K_2$ jest sumą spójną dwóch węzłów lub splotów , wtedy

$$V_{K_1 \# K_2}(t) = V_{K_1}(t) V_{K_2}(t).$$

Wielomian Jonesa

Theorem

$$V_{D_1 \sqcup D_2}(t) = -\left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{D_1}(t) V_{D_2}(t).$$

Theorem

Załóżmy, że $-K$ jest węzłem z przeciwną orientacją niż K, wtedy

$$V_{-K}(t) = V_K(t).$$

Theorem

Załóżmy, że K^* jest lustrzanym odbiciem węzła lub splotu K, wtedy

$$V_{K^*}(t) = V_K(t^{-1}).$$

Wielomian Jonesa

Ćwiczenie

Wielomian Jonesa prawego-trójlistnika K to $V_K(t) = t + t^3 - t^4$, a wielomian lewego trójlistnika to $V_K(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$, zatem te dwa węzły nie są równoważne!

Wielomian Jonesa

Ćwiczenie

Wielomian Jonesa węzła ósemkowego jest symetryczny, tzn.: $V_K(t) = V_K(t^{-1})$.

Wielomian Jonesa

Ćwiczenie

Pokaż, że wielomian Jonesa węzła K z rysunku obok wynosi:

$$V_K(t) = t^{-3} - t^{-2} + t^{-1} - 1 + t - t^2 + t^3.$$

Wielomian Jonesa

Ćwiczenie

Obliczenia wielomianu Jonesa, pokazały, że jest on nie trywialny w sytuacji gdy wielomian Aleksandra jest trywialny, tzn. równy 1.
Jest *przypuszczenie*, bez dowodu, że tak jest w istocie zawsze.

Przykład

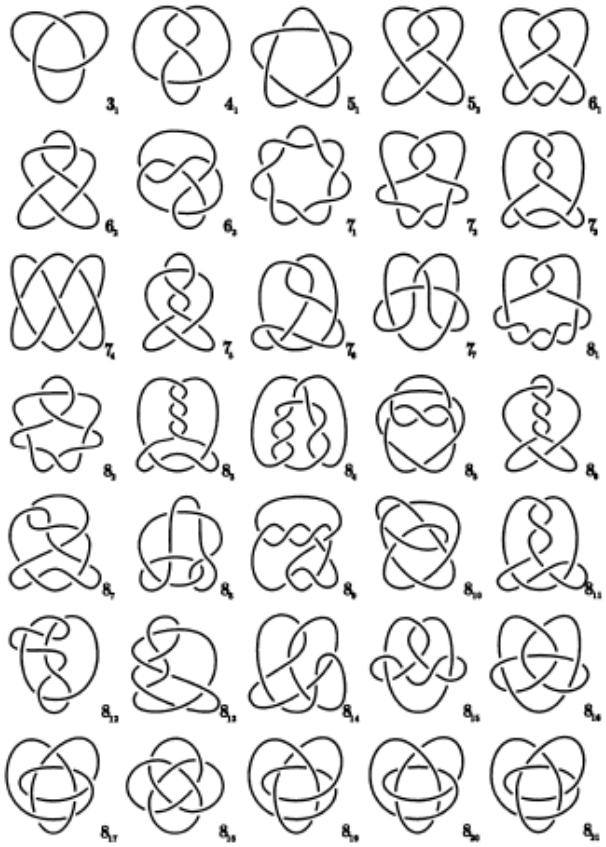
Wiemy, że wieomian Aleksandra trywialnego węzła wynosi 1; jednak istnieją nie-trywialne węzły, które mają wielomian Aleksandra 1.
Przykład jest dany na rysunku obok.

Jego wielomian Jonesa wynosi:

$$-t^{-4} + 2t^{-3} - 2t^{-2} + 2t^{-1} + t^{2} - 2t^{3} + 2t^{4} - 2t^{5} + t^{6}$$

Wielomian Jonesa

Węzeł	Wielomian Aleksandra	Wielomian Jonesa
3_1	$(-1)[1-1+1]$	$(1)[1+0+1-1]$
4_1	$(-1)[-1+3-1]$	$(-2)[1-1+1-1+1]$
5_1	$(-2)[1-1+1-1+1]$	$(2)[1+0+1-1+1-1]$
5_2	$(-1)[2-3+2]$	$(1)[1-1+2-1+1-1]$
6_1	$(-1)[-2+5-2]$	$(-2)[1-1+2-2+1-1+1]$
6_2	$(-2)[-1+3-3+3-1]$	$(-1)[1-1+2-2+2-2+1]$
6_3	$(-2)[1-3+5-3+1]$	$(-3)[-1+2-2+3-2+2-1]$
7_1	$(-3)[1-1+1-1+1-1+1]$	$(3)[1+0+1-1+1-1+1-1]$
7_2	$(-1)[3-5+3]$	$(1)[1-1+2-2+2-1+1-1]$
7_3	$(-2)[2-3+3-3+2]$	$(2)[1-1+2-2+3-2+1-1]$
7_4	$(-1)[4-7+4]$	$(1)[1-2+3-2+3-2+1-1]$
7_5	$(-2)[2-4+5-4+2]$	$(2)[1-1+3-3+3-3+2-1]$
7_6	$(-2)[-1+5-7+5-1]$	$(-1)[1-2+3-3+4-3+2-1]$
7_7	$(-2)[1-5+9-5+1]$	$(-3)[-1+3-3+4-4+3-2+1]$
8_1	$(-1)[-3+7-3]$	$(-2)[1-1+2-2+2-2+1-1+1]$
8_2	$(-3)[-1+3-3+3-3+3-1]$	$(0)[1-1+2-2+3-3+2-2+1]$
8_3	$(-1)[-4+9-4]$	$(-4)[1-1+2-3+3-3+2-1+1]$
8_4	$(-2)[-2+5-5+5-2]$	$(-3)[1-1+2-3+3-3+3-2+1]$
8_5	$(-3)[-1+3-4+5-4+3-1]$	$(0)[1-1+3-3+3-4+3-2+1]$
8_6	$(-2)[-2+6-7+6-2]$	$(-1)[1-1+3-4+4-4+3-2+1]$
8_7	$(-3)[1-3+5-5+5-3+1]$	$(-2)[-1+2-2+4-4+4-3+2-1]$
8_8	$(-2)[2-6+9-6+2]$	$(-3)[-1+2-3+5-4+4-3+2-1]$
8_9	$(-3)[-1+3-5+7-5+3-1]$	$(-4)[1-2+3-4+5-4+3-2+1]$
8_{10}	$(-3)[1-3+6-7+6-3+1]$	$(-2)[-1+2-3+5-4+5-4+2-1]$
8_{11}	$(-2)[-2+7-9+7-2]$	$(-1)[1-2+4-4+5-5+3-2+1]$
8_{12}	$(-2)[1-7+13-7+1]$	$(-4)[1-2+4-5+5-5+4-2+1]$
8_{13}	$(-2)[2-7+11-7+2]$	$(-3)[-1+3-4+5-5+5-3+2-1]$
8_{14}	$(-2)[-2+8-11+8-2]$	$(-1)[1-2+4-5+6-5+4-3+1]$
8_{15}	$(-2)[3-8+11-8+3]$	$(2)[1-2+5-5+6-6+4-3+1]$
8_{16}	$(-3)[1-4+8-9+8-4+1]$	$(-2)[-1+3-4+6-6+6-5+3-1]$
8_{17}	$(-3)[-1+4-8+11-8+4-1]$	$(-4)[1-3+5-6+7-6+5-3+1]$
8_{18}	$(-3)[-1+5-10+13-10+5-1]$	$(-4)[1-4+6-7+9-7+6-4+1]$
8_{19}	$(-3)[1-1+0+1+0-1+1]$	$(3)[1+0+1+0+0+1]$
8_{20}	$(-2)[1-2+3-2+1]$	$(-1)[-1+2-1+2-1+1-1]$
8_{21}	$(-2)[-1+4-5+4-1]$	$(1)[2-2+3-3+2-2+1]$



Nawias Kauffmana

D_+

D_-

D_0

D_∞

Definicja

Nawias Kauffmana niezorientowanego diagramu D, oznaczany przez $\langle D \rangle$, jest wielomianem Laurenta jednej zmiennej A zdefiniowanym przez trzy następujące aksjomaty.

- A.1, Normalizacja: $\langle \bigcirc \rangle = 1$, gdzie $\bigcirc$ oznacza diagram węzła trywialnego, jedno ogniwo, bez przecięć.
- A.2: Delta: $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = \delta \langle D \rangle$, gdzie $\delta = -A^{-2} - A^2$ oraz $D \sqcup \bigcirc$ oznacza diagram D razem z pojedynczym ogniwem, który nie przecina się same ze sobą ani z D.
- A.3: Skein relacja: $\langle D_+ \rangle = A \langle D_0 \rangle + A^{-1} \langle D_\infty \rangle$ gdzie diagramy D_+, D_0, D_∞ różnią się jak na rysunku obok.

Nawias Kauffmana

Uwagi:

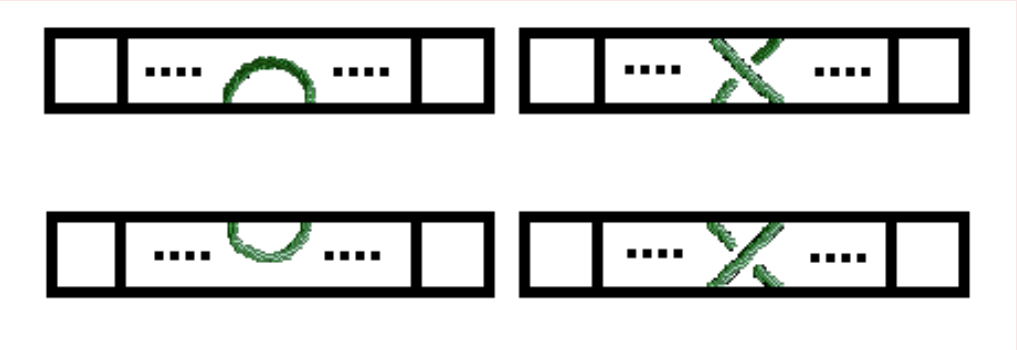
- nawias jest zdefiniowany, na diagramie, nie na węźle,
- jest to wielomian diagramu niezorientowanego, więc nie ma rozróżnienia na skrzyżowania typu D_+ lub D_-, gdy już wybierzemy, które skrzyżowanie jest dodatnie pozostałe, są jednoznacznie zdefiniowane,
- skein relacje można przepisać w postaci: $\langle D_- \rangle = A\langle D_\infty \rangle + A^{-1}\langle D_0 \rangle$,
- wielomian diagramu splotu trywialnego o n składowych na płaszczyźnie to δ^{n-1},
- jest to niezmiennikw względem drugiego i trzeciego ruchu Reidemeistra, ale nie pierwszego!
- żeby był niezmiennikiem także pierwszego ruchu, trzeba przyjąć $A = (-1)^{\frac{1}{3}}$, ale wtedy nie będzie to wielomian.

Kodowanie węzłów.

Kodowanie węzłów.

Pasma

Zawartość każdego paska jest prosta, występują tylko cztery typy pasków.



Przy pomocy ewentualnych deformaacji, tak aby dwa skrzyżowania nie występowały na jednym poziomie, możemy zawsze dokonać podziału węzła na poziome paski. Takie przedstawienie diagramu w postaci określonej liczby elementarnych cegiełek pozwala zakodować diagram (oczywiście z dokładnością do deformacji).

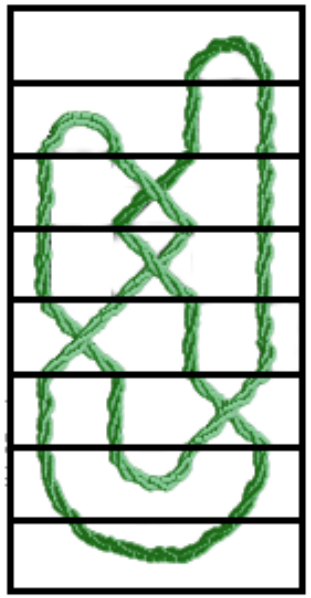
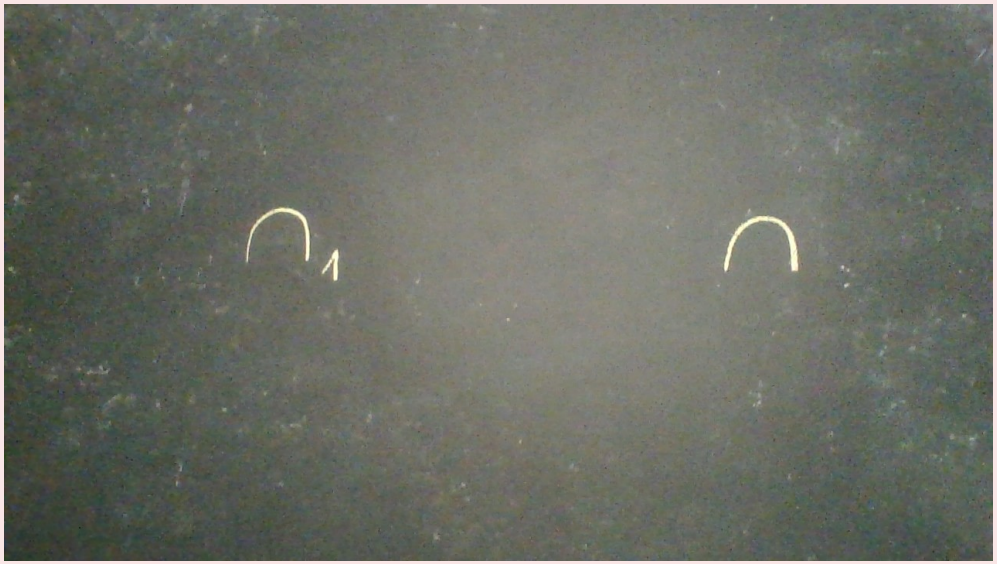


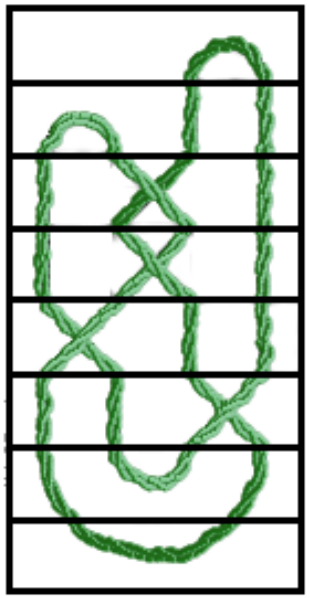
Diagram z rysunku ma kod

$$\cap_1 \cap_1 \delta_2 \delta_2 \delta_1{}^{-1} \delta_3{}^{-1} \cup_2 \cup_1$$

Kodowanie węzłów.

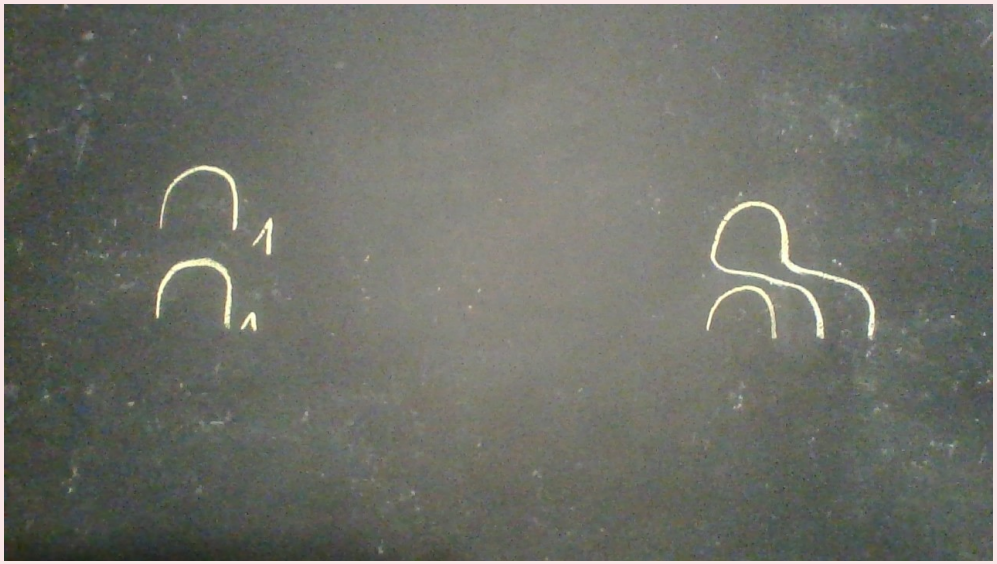
Pasek 1

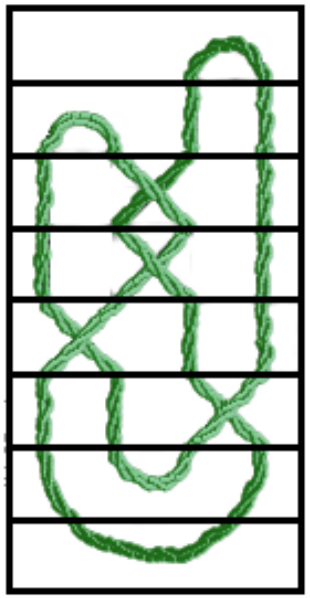




Kodowanie węzłów.

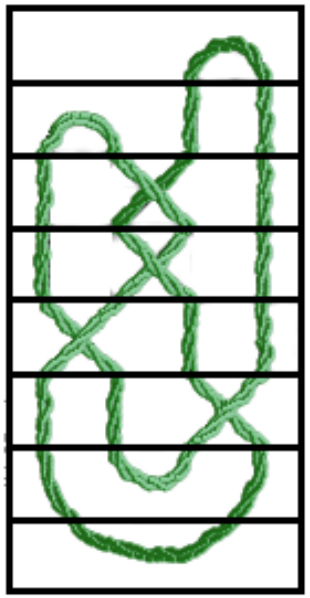
Pasek 2





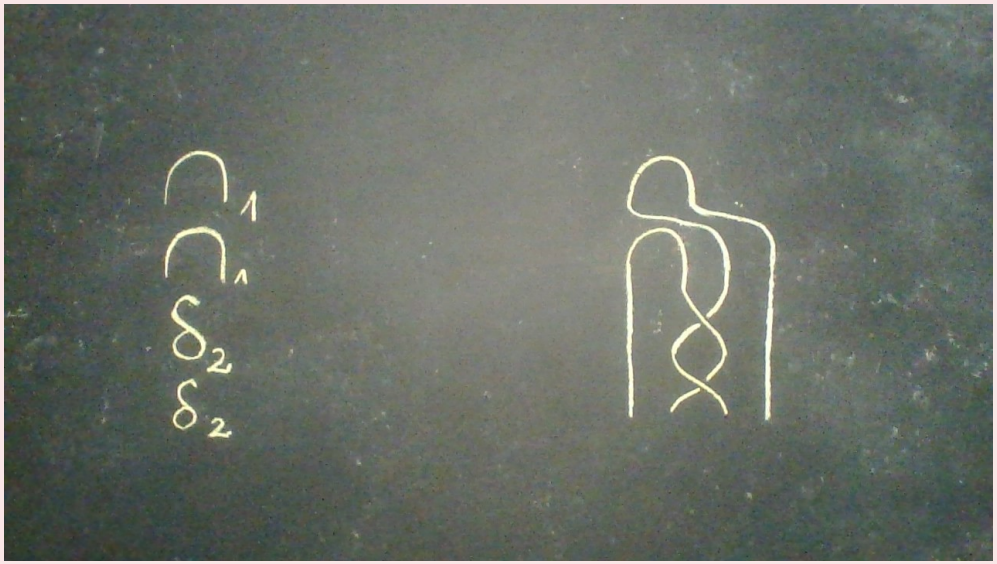
Kodowanie węzłów.

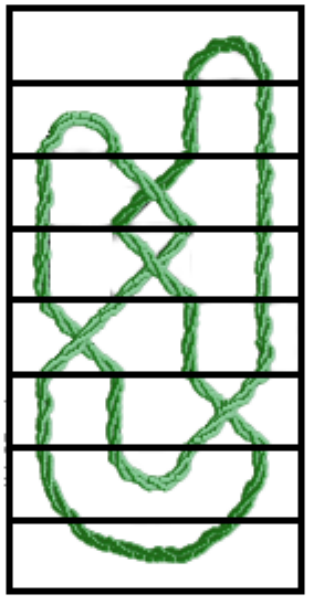
Pasek 3



Kodowanie węzłów.

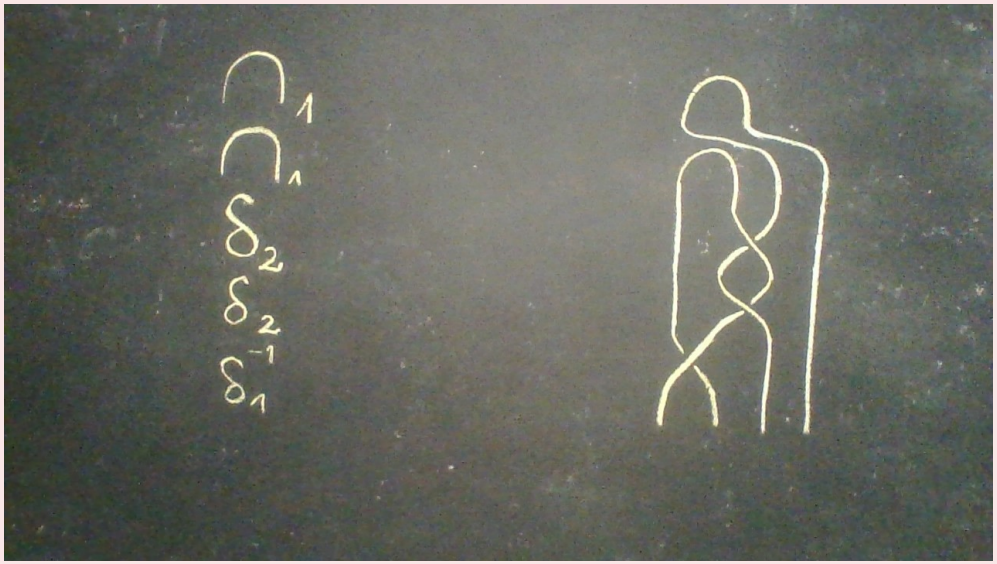
Pasek 4

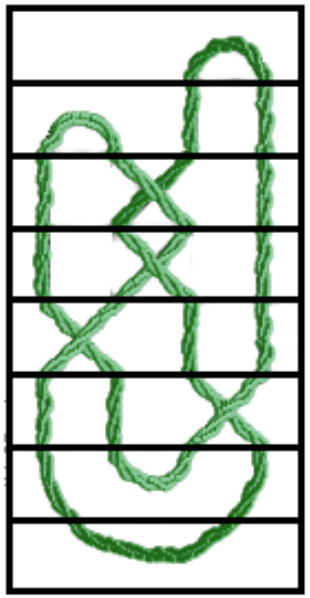




Kodowanie węzłów.

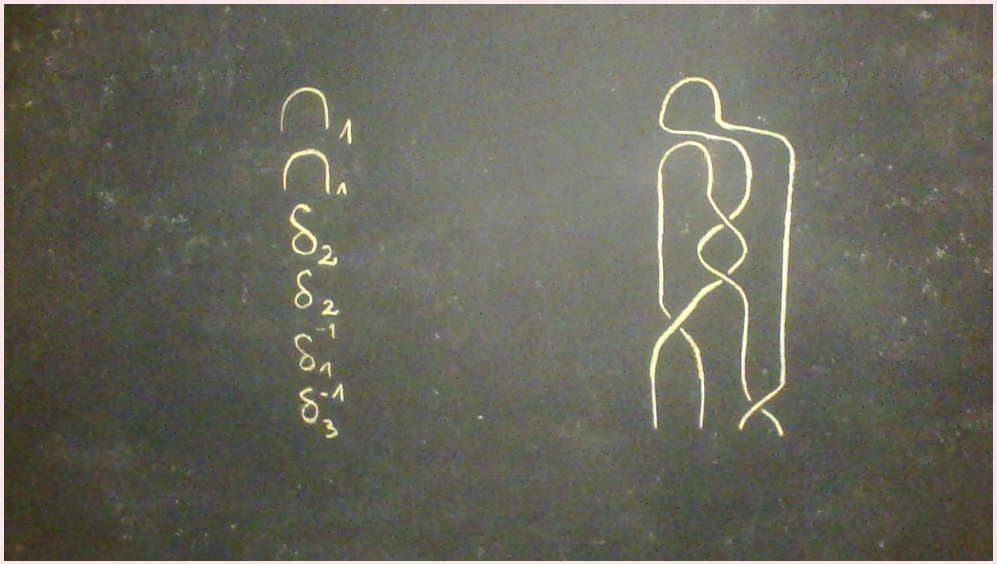
Pasek 5

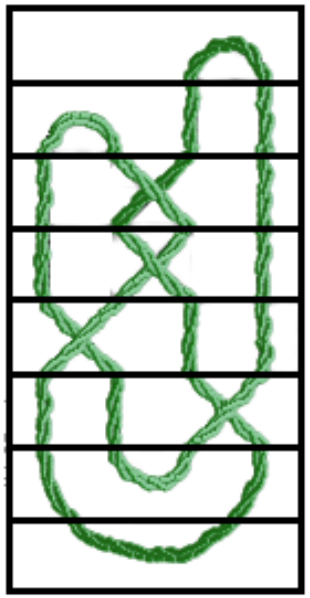




Kodowanie węzłów.

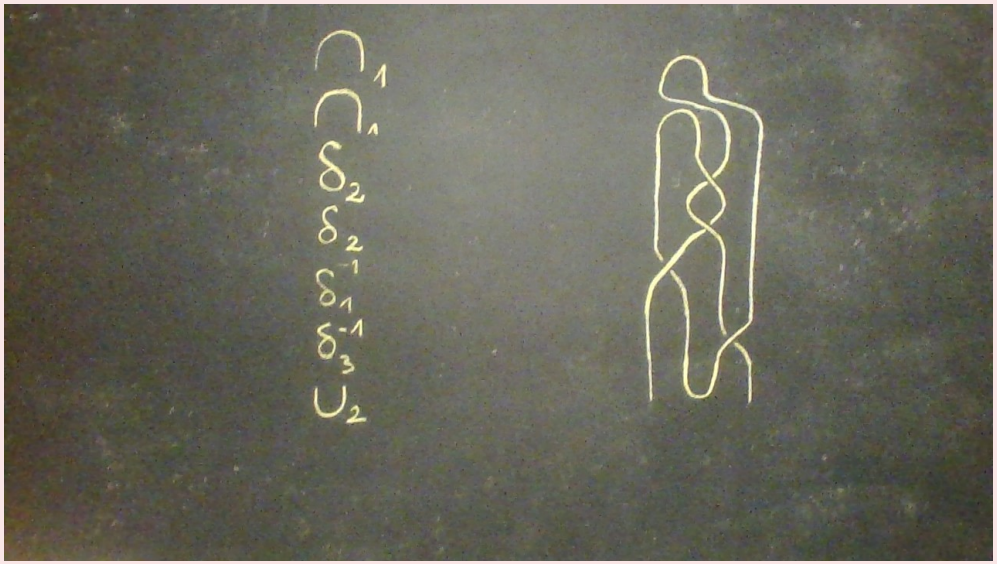
Pasek 6

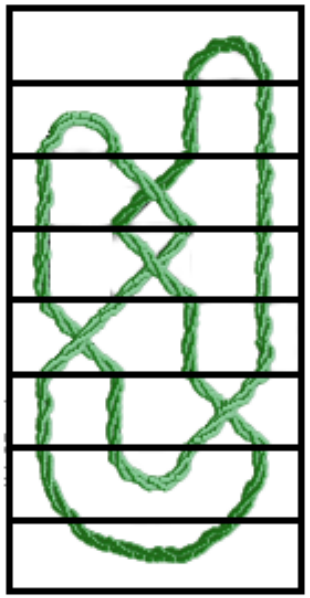




Kodowanie węzłów.

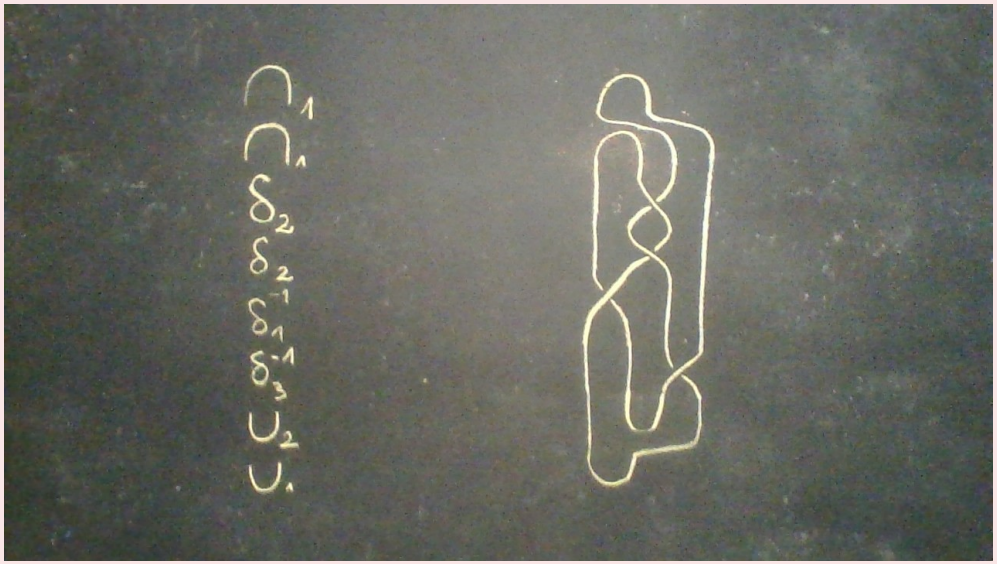
Pasek 7

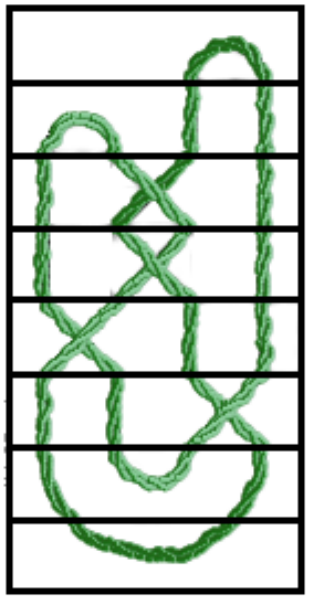




Kodowanie węzłów.

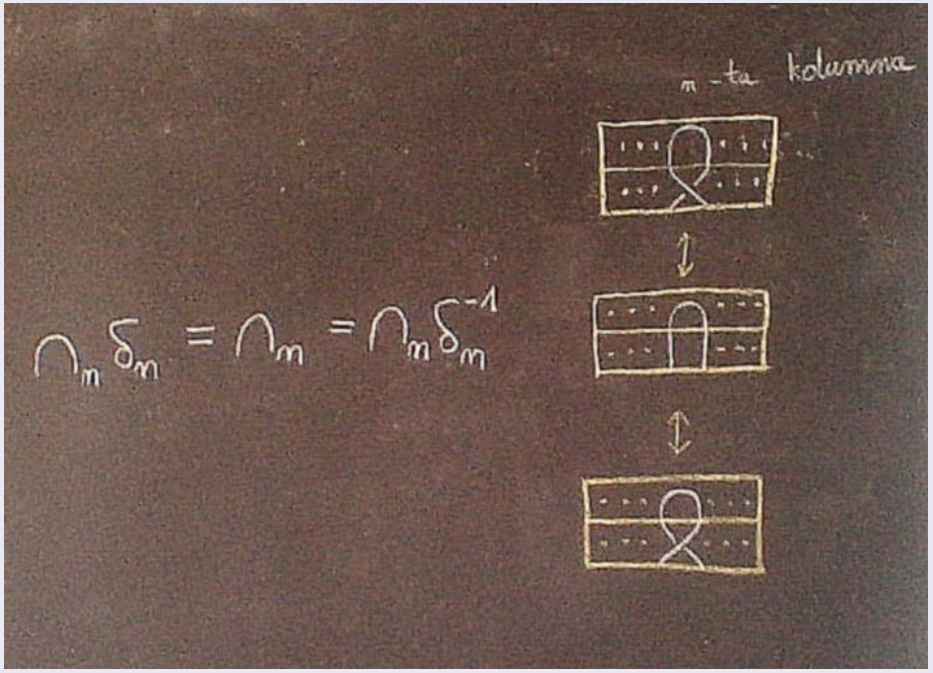
Pasek 8

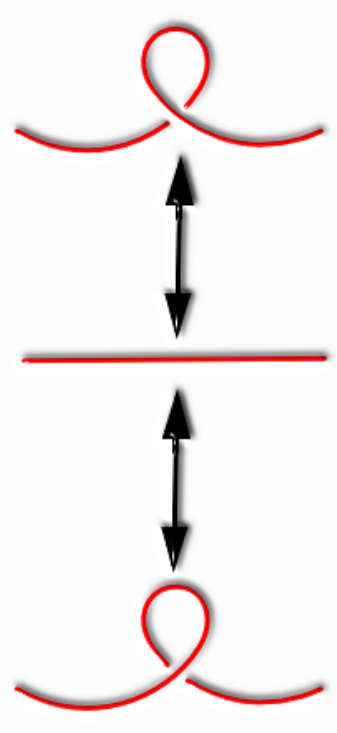




Dodatek, kodowanie ruchów Reidemeistera.

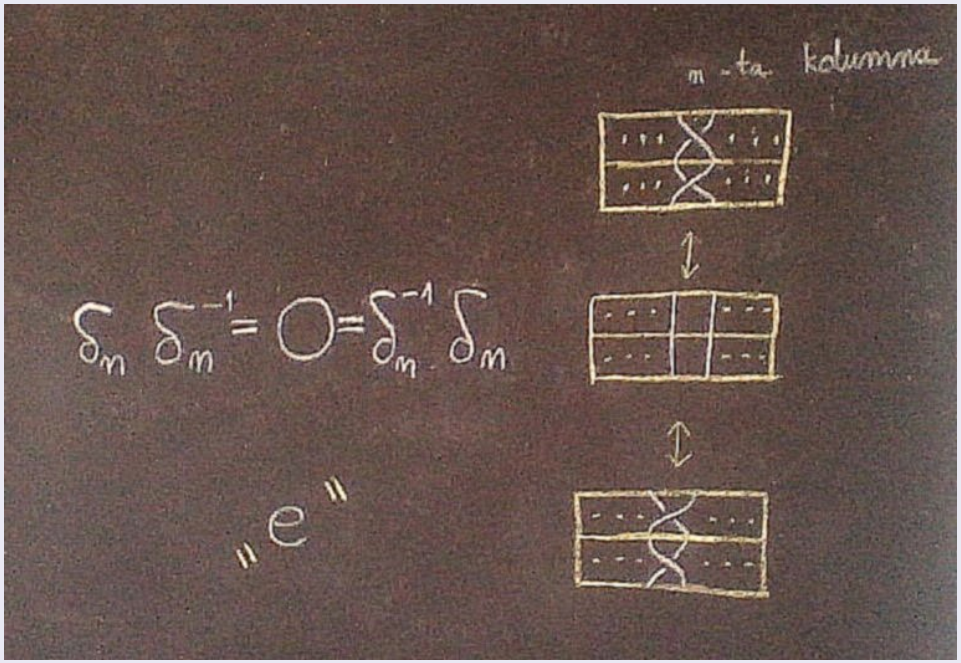
R1 kod

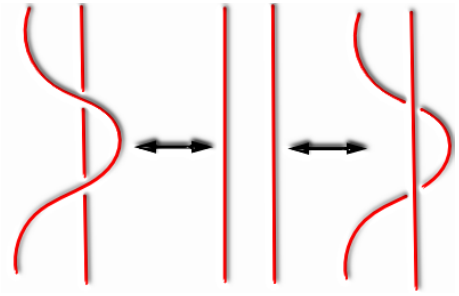




Dodatek, kodowanie ruchów Reidemeistera.

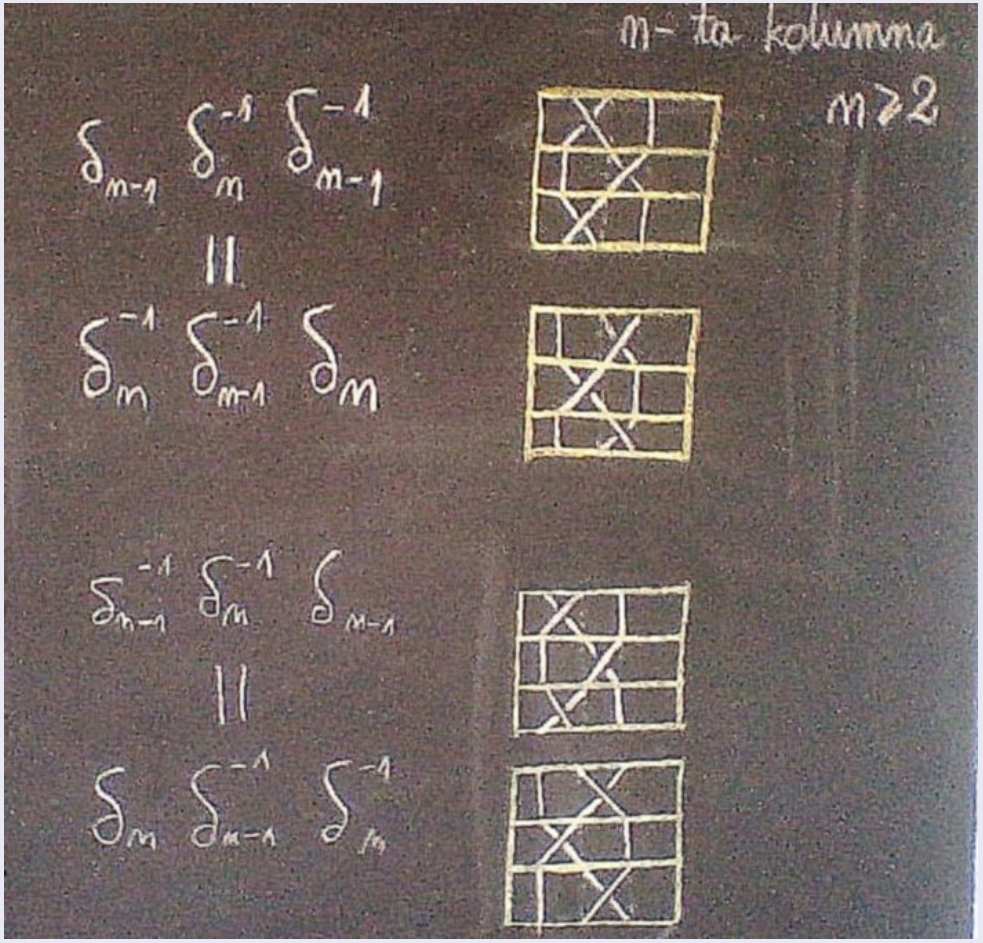
R2 kod

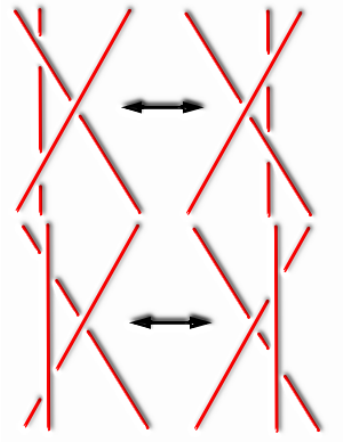




Dodatek, kodowanie ruchów Reidemeistera.

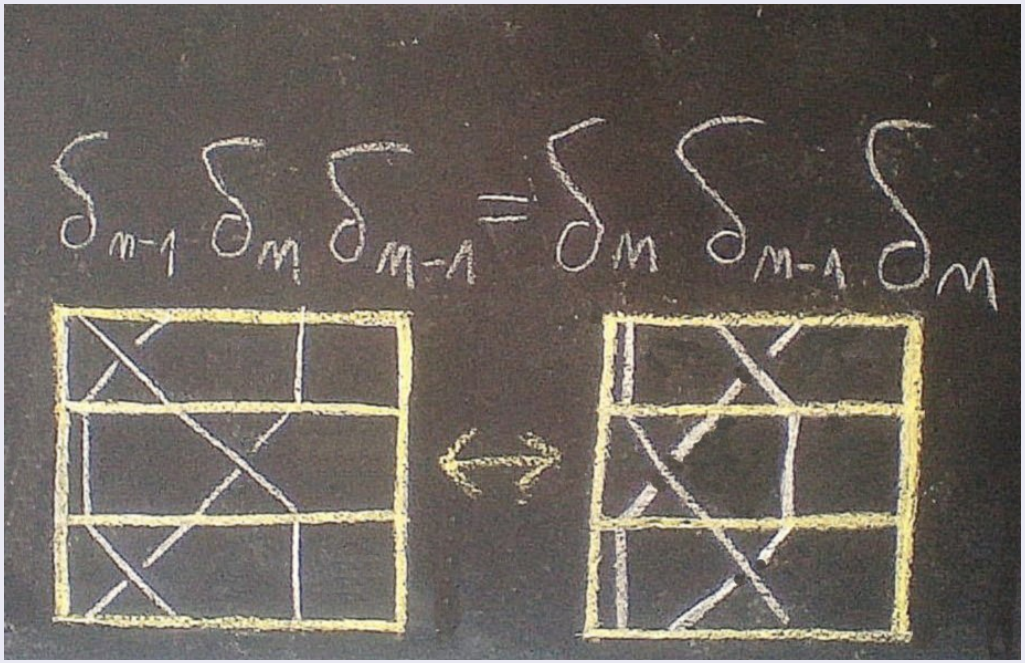
R3 kod

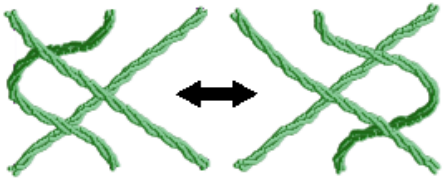




Dodatek, kodowanie ruchów Reidemeistera.

R3 kod, sprowadza się do jednego przypadku, gdzie $n \geq 2$





Domknięte warkocze.

Szczególna postać domkniętych warkoczy. Definicja geometryczna

- Generatory typu $\cap$ występują tylko na początku, a typu $\cup$ tylko na końcu.
- Mamy jeden wielokrotny generator na górze i jeden wielokrotny generator na dole.
- Orientacja (patrz strzałki zaznaczone na pasmach diagramu).

Domkniętym warkoczem nazywamy taki diagram, który daje się zdeformować (izotopie planarne)
do diagramu opisanego w trzech punktach powyżej.

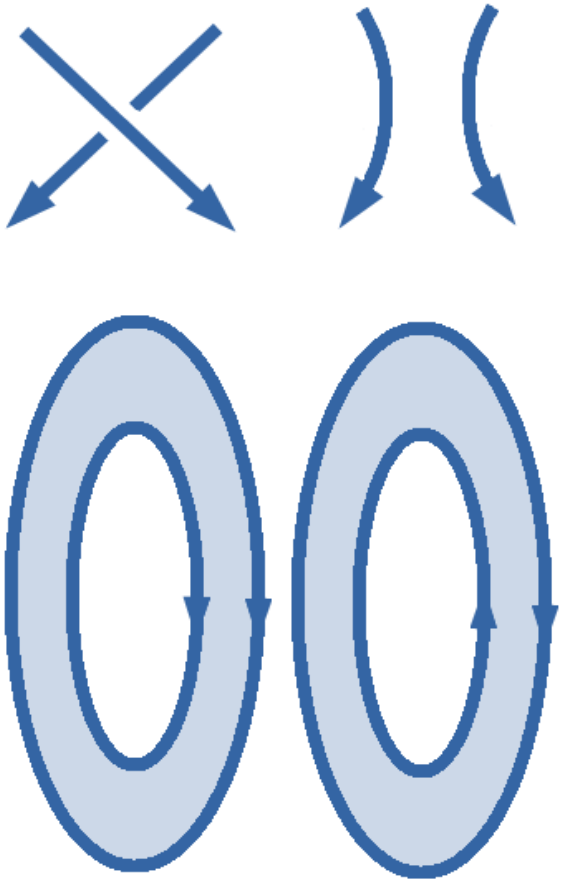
Twierdzenie Aleksandra.

Twierdzenie Aleksandra (znane od 60 lat)

Każdy zorientowany węzeł można przedstawić w postaci domkniętego warkocza.

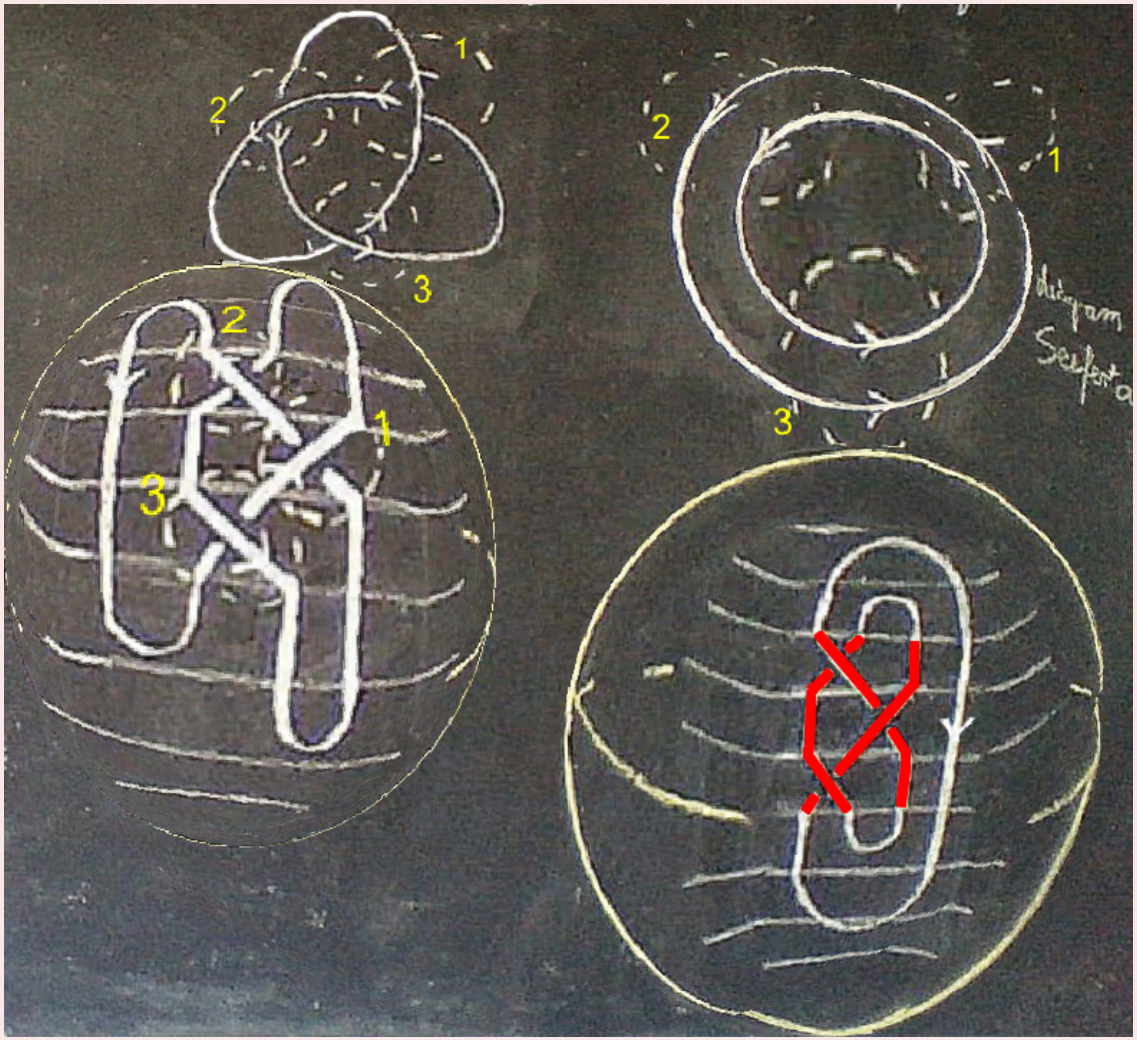
Informacje o dowodzie, kolejne kroki

- Jak rozpoznać czy dany diagram jest domkniętym warkoczem:
  - Wygładzenie wszystkich skrzyżowań diagramu.
  - Jeśli dzięki wygładzaniu otrzymaliśmy okręgi rozcinające sferę na dwa koła i pierścienie o zgodnie zorientowanych składowych brzegu, to mieliśmy doczynienia z domkniętym warkoczem.
- Niezależnie czy zaczeliśmy od domkniętego warkocza, czy nie, otrzymaliśmy okręgi zorientowane, nazwane okręgami Seiferta. Zachowują one orientację zgodnie z wyjściową orientacją rozpatrywanego diagramu.
- Określamy $h(D)$ defekt naszego diagramu D jako równy liczbie par niezgodnych okręgów Seiferta.
- Korzystamy z metody P. Vogela z 1989 roku i wykonujemy ruch Reidemeistera typu II, na dwóch różnych okręgach Seiferta, niezgodnie zorientowanych, aby następnie dokonać wygładzenia. Taka operacja zmniejsza defekt o jeden.



Twierdzenie Aleksandra, przykład.

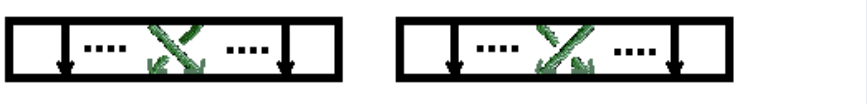
Prawy trójlistnik $\cap_3 \cap_1 \delta_2 \delta_3{}^{-1} \delta_2 \cup_1 \cup_3$ jest domkniętym warkoczem.



Warkocze.

Warkocze.

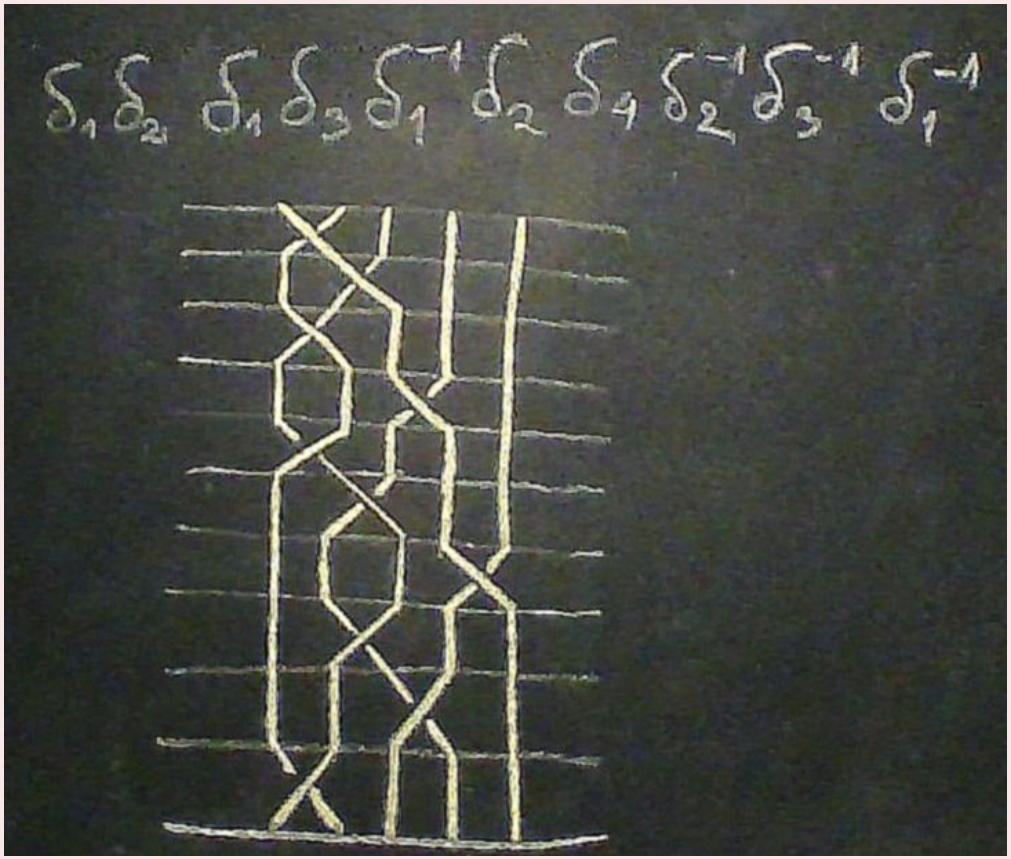
To diagramy powstające przez składanie pasków podanych poniżej i tylko takich (odpowiednie kody δ, δ^{-1}).



Dla wygody dopuszczamy używanie generatora trywialnego, czyli wiązki równoległych pasm (kod $\circ$).

Warkocze.

Przykładowy warkocz o czterech pasmach.



Warkocze.

Deformacje warkoczy

Warkocze mają luźne końce, będziemy je deformować, ale tylko tak, żeby wrozpatrywanych diagramach nie pojawiły się generatory $\cap$ ani $\cup$.

Dopuszczamy wykonywanie na warkoczach tych ruchów Reidemeistera, które nie zaburzają struktury warkoczy. Dopuszczamy ruchy przedstawione na rysunku. Zamiast zaznaczać, które pasmo idzie górą, a które dołem, przyjmujemy następującą konwencję:

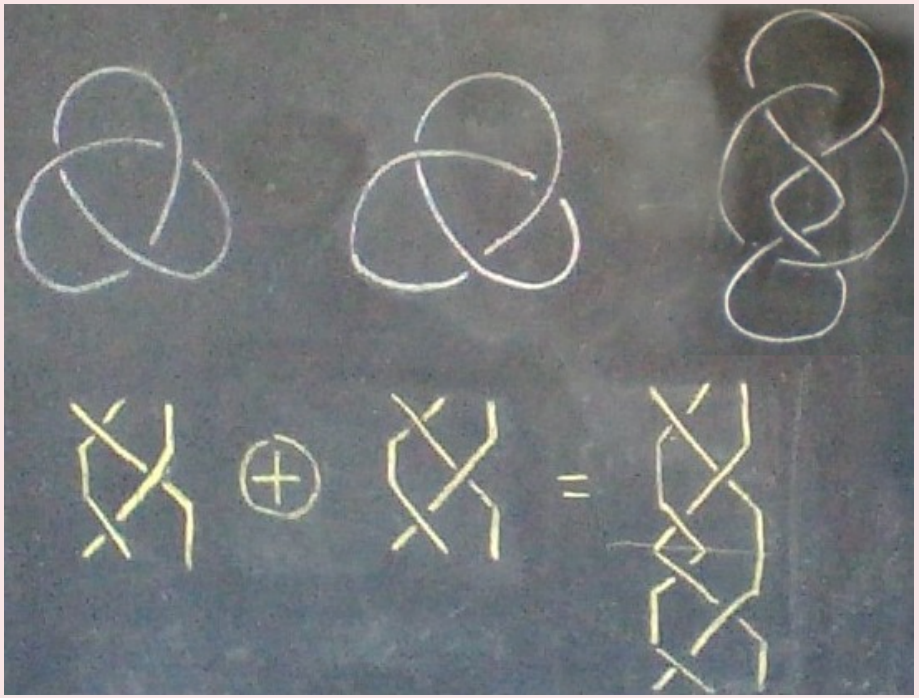
- dopuszczalne są te ruchy, które odpowiadają schematowi przedstawionemu na rysunku i są topologiczne, tzn. bez rozcinania wykonalne.

Możemy wykonywać drugi i trzeci ruchu Reidemeistera. Według kodów ruchów Reidemeistera:

- 2R: $\delta_n {\delta_n}^{-1} = {\delta_n}^{-1} \delta_n = \circ\circ$, gdzie $\circ$ generator trywialny, $n \geq 1$.
- 3R: $\delta_{n-1}\delta_n\delta_{n-1} = \delta_n\delta_{n-1}\delta_n$, gdzie $n \geq 2$.

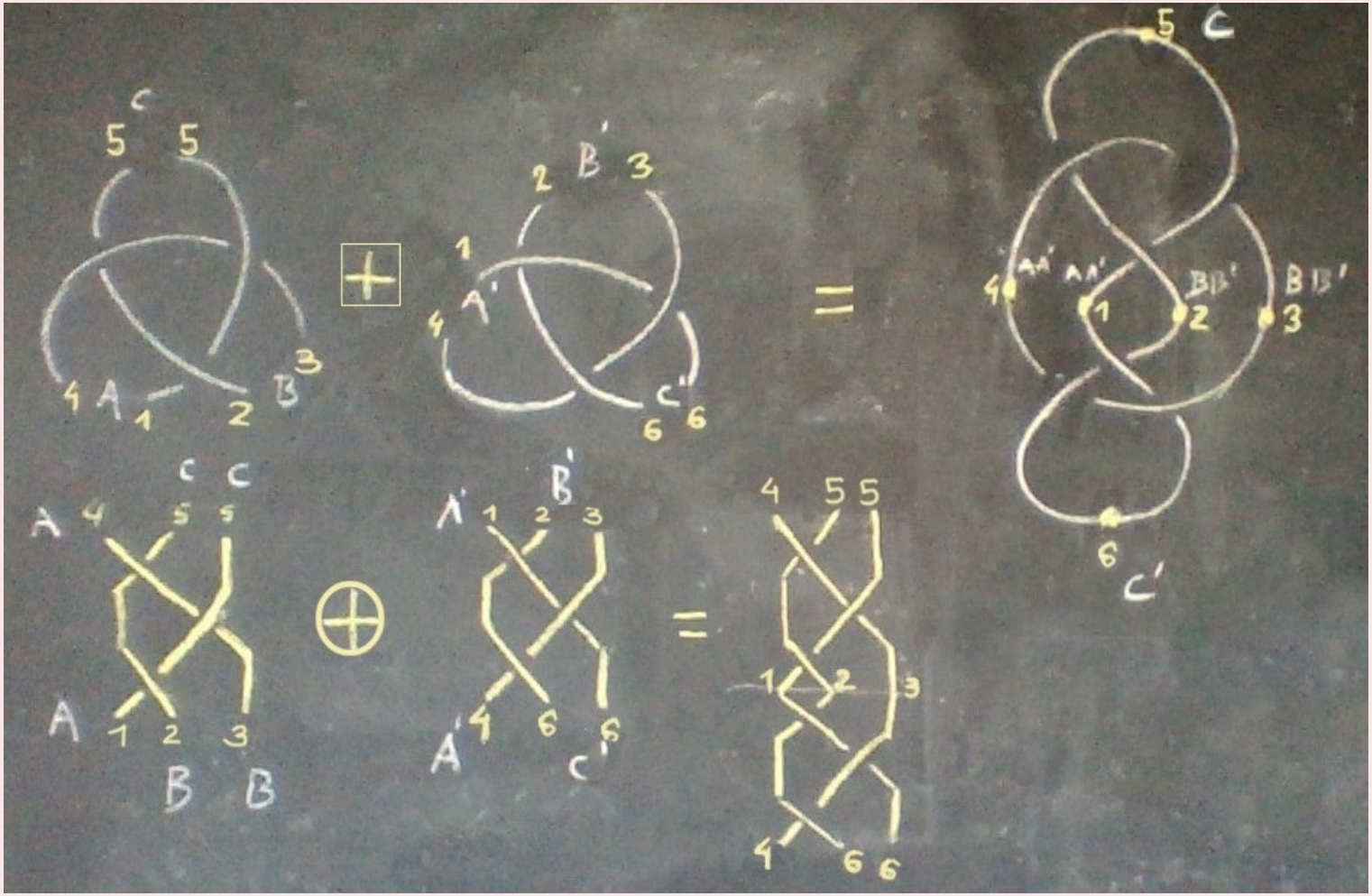
Grupa warkoczy.

Sklejanie warkoczy



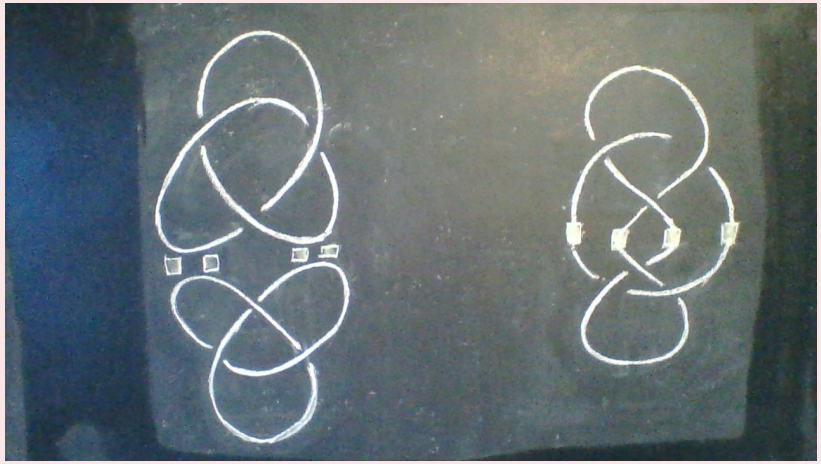
Grupa warkoczy.

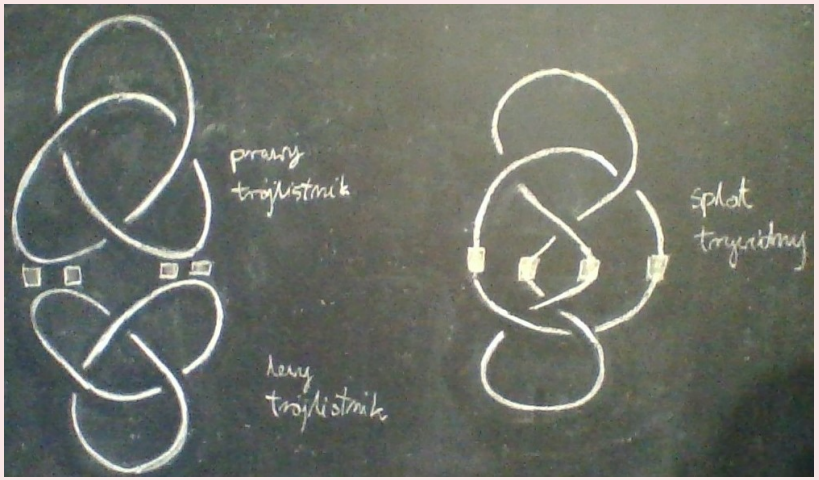
Przykład sklejenia dwóch węzłów, do splotu.



Grupa warkoczy.

Przykład sklejenia dwóch węzłów, do splotu.





Grupa warkoczy.

Klasy równoważności warkoczy.

Klasy równoważności warkoczy o n pasmach (ze względu na ruchy RII, RIII) stanowią grupę. Nazywamy ją grupą warkoczy o n pasmach B_n.

Dwa fakty

- Jeeli dwa warkocze są w tej samej klasie tzn. reprezentują ten sam element w grupie warkoczy, to ich domknięcia są równoważne jako węzły.
- Jeżeli weźmiemy dwa warkocze należące do B_n, które są w tej grupie sprzężone, i te warkocze domkniemy, to również otrzymamy równoważne węzły.

Grupa warkoczy, a równoważność węzłów.

Twierdzenie Markova.

Jeżeli domknięcia dwóch warkoczy są równoważne, to można przerobić jeden warkocz na drugi za pomocą operacji (które zmieniają liczbę pasm, i są pewnego rodzaju ruchem Reidemeistera typu I):

$$B_n \ni \gamma \longleftrightarrow \gamma {\delta_n}^{\pm 1} \in B_{n+1}.$$

Twierdzenie Markova wyraża zagadnienie równoważności węzłów w języku ściśle algebraicznym. Grupa warkoczy daje się opisać za pomocą generatorów i relacji, a szukanie niezmienników węzłów jest, na mocy twierdzenia Markova, w znacznej mierze zredukowane do szukania funkcji, które przyjmują jednakowe wartości na elementach sprzężonych.

Tą właśnie drogą poszedł Jones, uzyskując w roku 1984 swój słynny wielomian.

Niezmienniki.

- Twierdzenie Reidemeistera podaje warunek konieczny i wystarczający równoważności dwóch diagramów splotów. Jednak nie daje nam efektywnej metody pozwalającej na rozwiązanie problemu równoważności splotów.
- Niezmiennikiem splotów nazywamy funkcję, która każdemu diagramowi przyporządkowuje pewien obiekt algebraiczny w taki sposób, aby równoważnym diagramom odpowiadały te same obiekty.

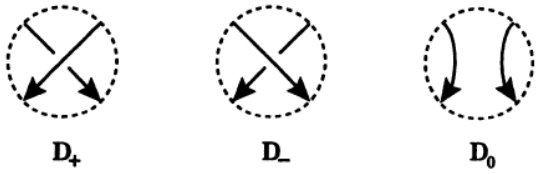
Wielomian Jonsa.

Załóżmy, że K jest zorientowanym węzłem (lub splotem) oraz D to zorientowany regularny diagram dla K.
Wtedy $V_K(t)$ wielomian Jonsa K można zdefiniować jednoznacznie z natępujących dwóch aksjomatów.
(Wielomian jest wielomianem Laurenta dla $\sqrt{t}$, co rozumiemy jako występowanie składników z ujemnymi potęgami $\sqrt{t}$.
Wielomian $V_K(t)$ jest niezmiennikiem K.)

A1. Jeśli K jest trywialnym węzłem, wtedy przyjmujemy $V_K(t) = 1$.

A2. Załóżmy, że D_+, D_-, D_0 to regularne diagramy, odpowiednio, trzech węzłów (lub splotów), K_+, K_-, K_0.
Te regulatne diagramy są dokładnie takie same w sąsiedztwie jednego skrzyżowania. W tym sąsiedztwie, regularne diagramy różnią się w sposób pokazany na rysunku obok.
(Zauważ: W przypadku D_+ (D_-) w tej okolicy, istnieją jedynie dodatnie (ujemne) skrzyżowania.)
Wtedy wielomiany Laurenta trzech węzłów (lub splotów) są połączone następującą relacją

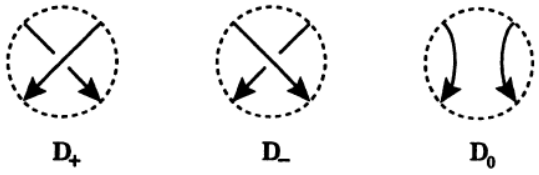
$$\frac{1}{t} V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})V_{D_0}(t).$$



Wielomian Jonsa.

Trywialny splot złożony z μ składowych

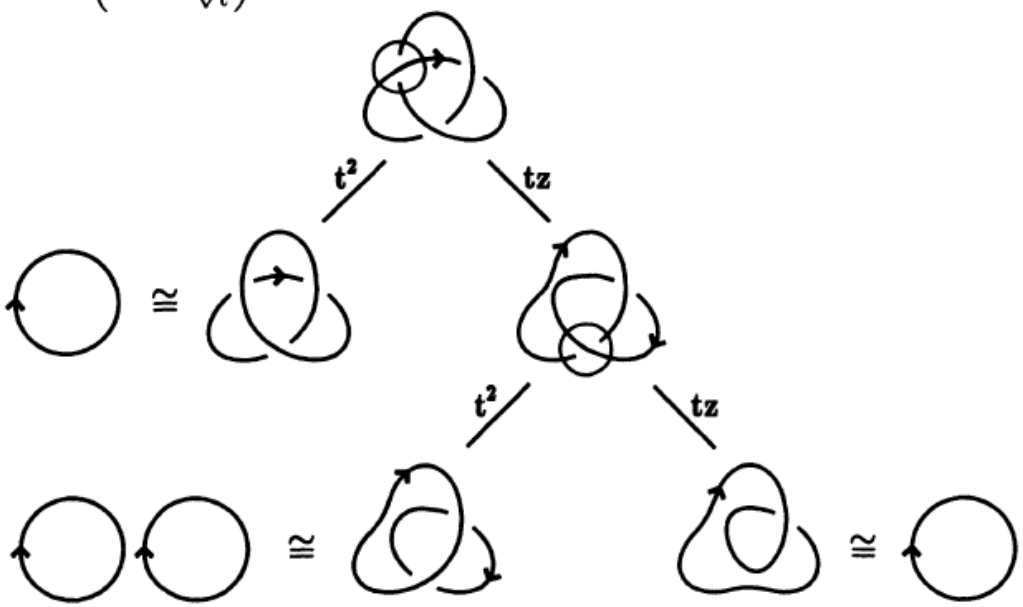
$$V_{0_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\mu-1}.$$



Wielomian Jonsa.

$$V_{D_+}(t) = t^2 V_{D_-}(t) + tz V_{D_0}(t)$$
$$V_{D_-}(t) = t^{-2} V_{D_+}(t) - t^{-1} z V_{D_0}(t),$$

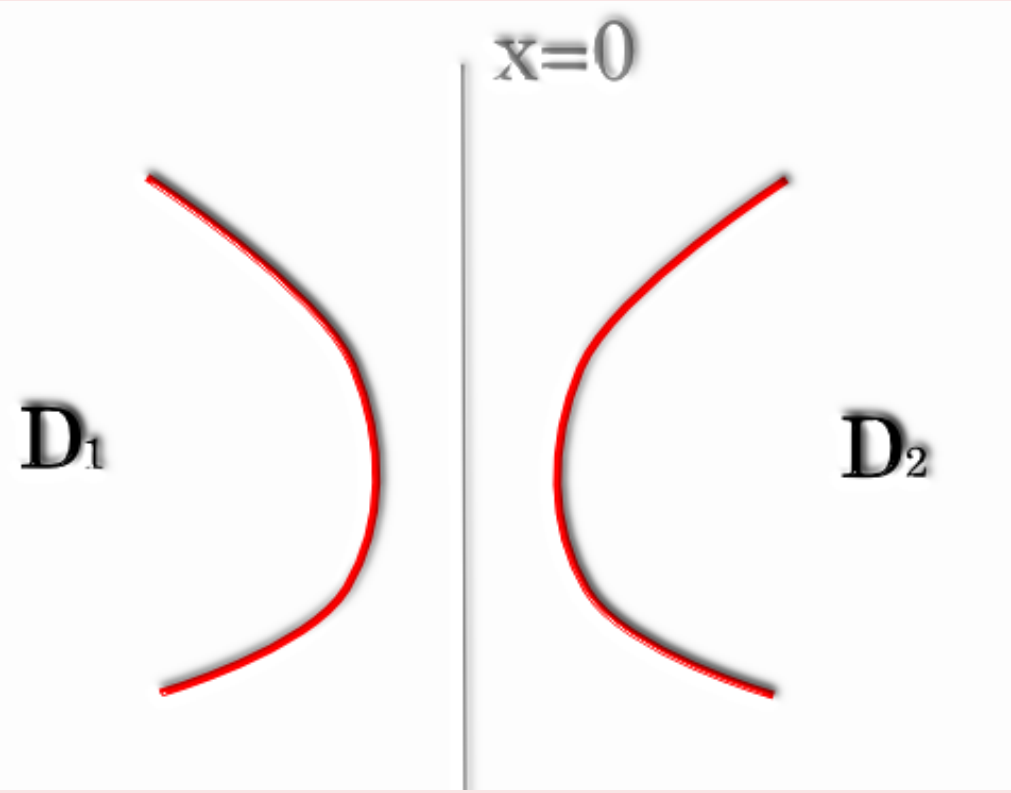
$z = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right).$



$$V_K(t) = t^2 V_O(t) + t^3 z V_{OO}(t) + t^2 z^2 V_O(t)$$
$$= t + t^3 - t^4.$$

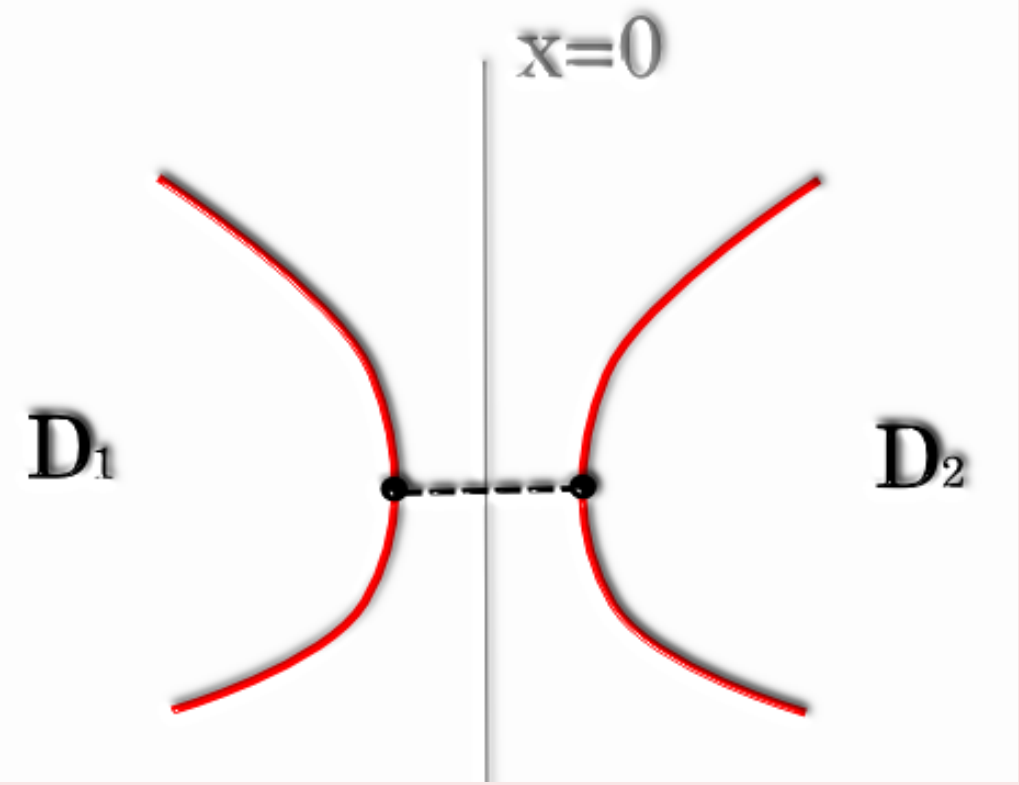
Arytmetyka węzłów raz jeszcze.

Niech D_1 będzie diagramem węzła położonym w półpłaszczyźnie $x < 0$ oraz niech D_2 będzie diagramem innego węzła, który leży w półpłaszczyźnie $x > 0$.



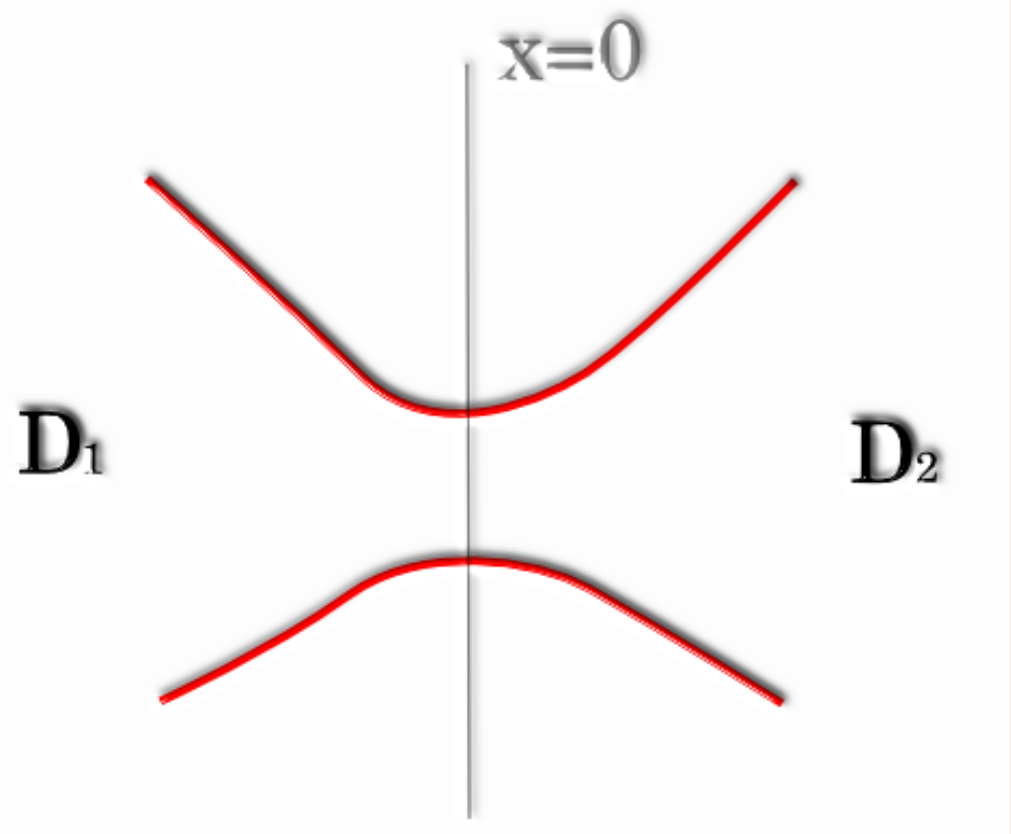
Arytmetyka węzłów raz jeszcze.

Następnie wybieramy po jednym punkcie z każdego diagramu i łączymy wybrane punkty krzywą, która nie przecina żadnego z diagramów poza punktami końcowymi.



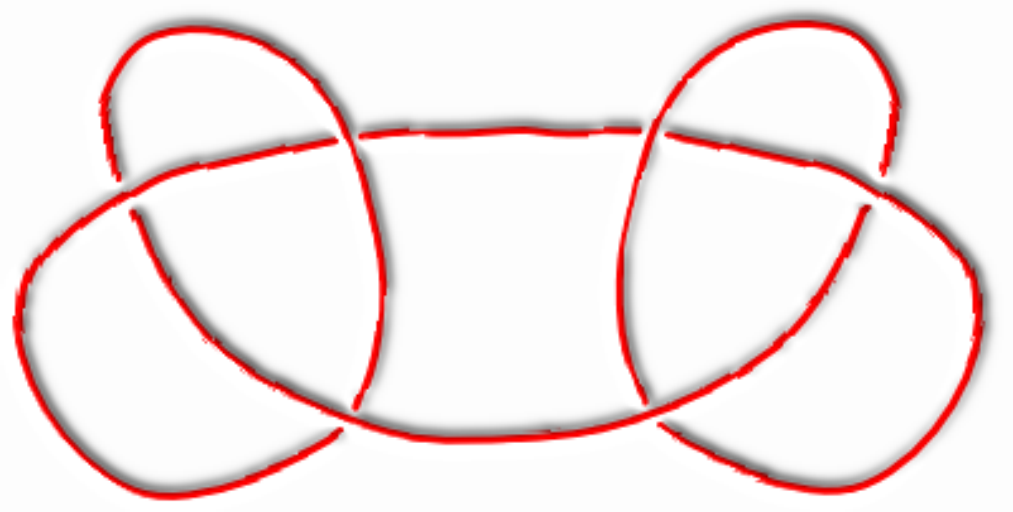
Arytmetyka węzłów raz jeszcze.

W kolejnym kroku "pogrubiamy" łączącą krzywą i otrzymujemy sumę dwóch węzłów, którą oznaczamy $D_1 \sharp D_2$.



Arytmetyka węzłów raz jeszcze.

Po zastosowaniu operacji sumy spójnej do dwóch trójlistników otrzymujemy następujący diagram węzła.

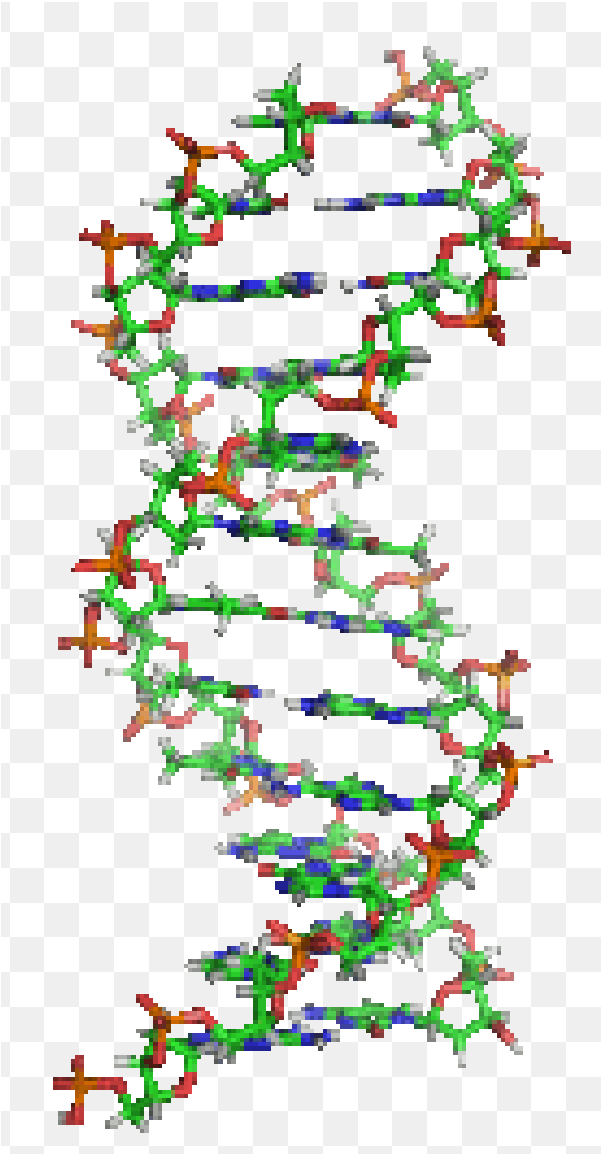


Arytmetyka węzłów raz jeszcze.

Suma dwóch węzłów jest dobrze określona, co oznacza, że diagramy, które powstaną przez powtórzenie powyższej procedury z innym wyborem punktów i krzywej będą równoważne.
Zbiór węzłów z powyżej zdefiniowaną operacją jest monoidem (operacja jest łączna, przemienna, posiada element neutralny, jak mnożenie w liczbach naturalnych).

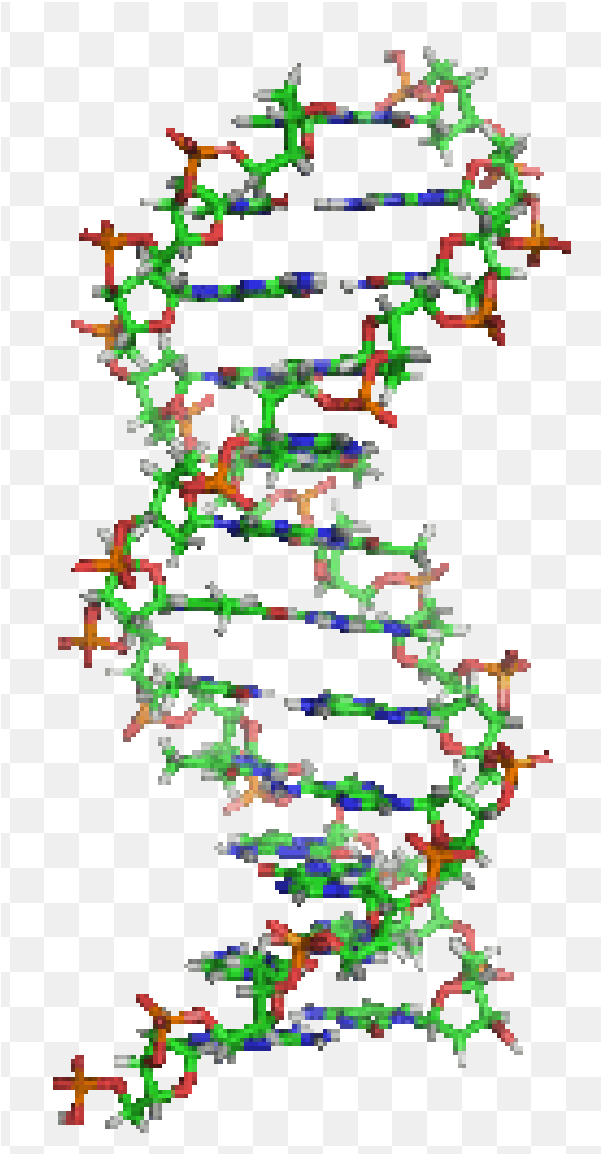
Teoria węzłów w biologii molekularnej.

- Crick i Watson, w jednym z najbardziej niezwykłych odkryć 20-tego wieku, wyjaśnili podstaową strukturę DNA.
- Otrzymali w 1962 roku Nagrodę Nobla z medycyny w dziedzinie fizjologii.
- Wykazali, że DNA posiada strukturę podwójnej prawoskrętnej helisy.
- Dwie nici polinukleotydowe są wzajemnie splecione i biegną równolegle w dwóch przeciwległych kierunkach (ułożenie przeciwrównolegle), tworząc w ten sposób podwójną helisę.
- Oplatają linią śrubową wspólną oś długą.



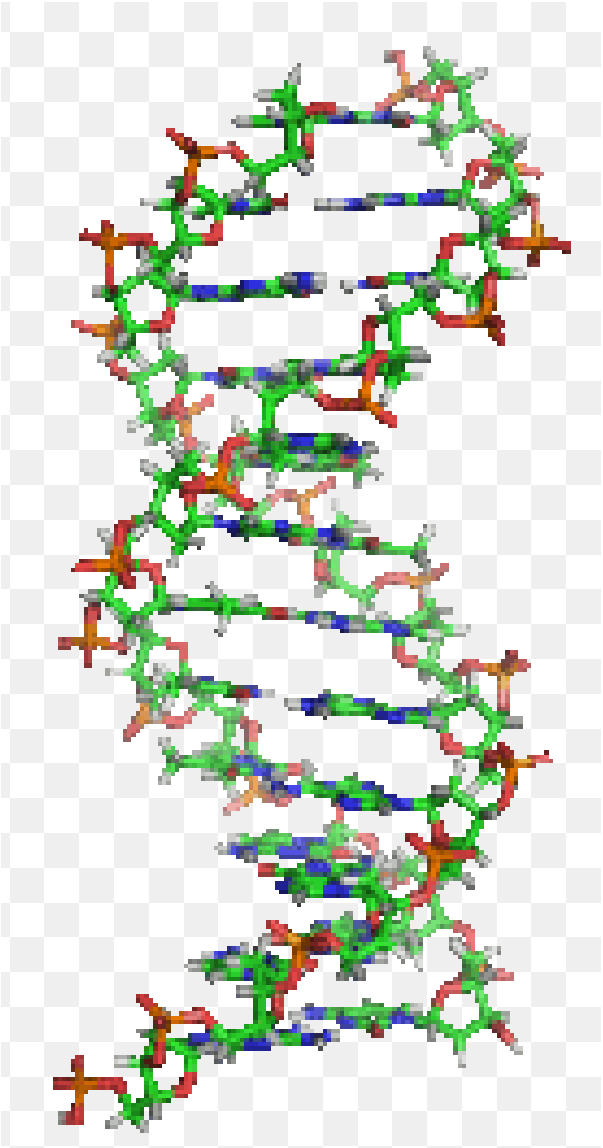
Teoria węzłów w biologii molekularnej.

- Kwas deoksyrybonukleinowy (DNA) tworzy najważniejszy w przyrodzie zapis określający kompletną strukturę i wszystkie funkcje nie tylko pojedynczych komórek, ale i całych organizmów.
- Podstawowe funkcje DNA to kodowanie informacji związanej z sekwencją RNA i białek, kontrolą ich syntezy oraz przekazywanie informacji genetycznej następnym pokoleniom.
- W ramach projektu The Human Genome Project oraz innych badań w 2003 roku zsekwencjonowano cały genom człowieka.



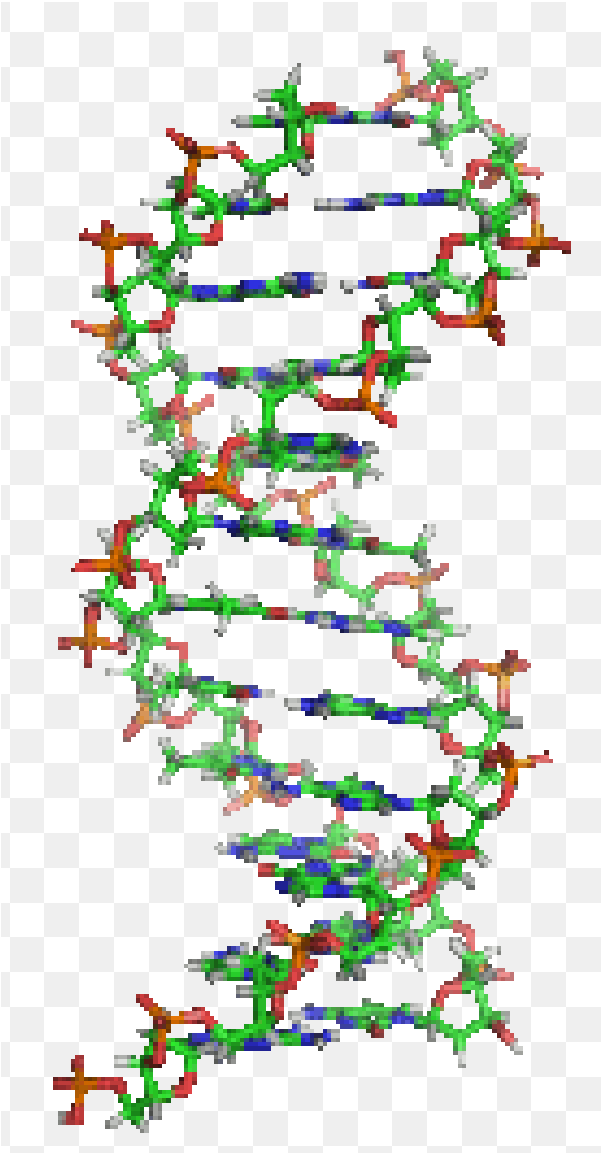
Teoria węzłów w biologii molekularnej.

- DNA jest liniowym polimerem, w którym monomeryczną podjednostką są cztery chemicznie odrębne nukleotydy.
- Każdy nukleotyd składa się z trzech komponentów: cukru pentozy, zasady azotowej (adenina, cytozyna, guanina, tymina) i reszty kwasu fosforowego.
- Mogą one być połączone razem w łańcuchy o długości setek, tysięcy, a nawet milionów jednostek.



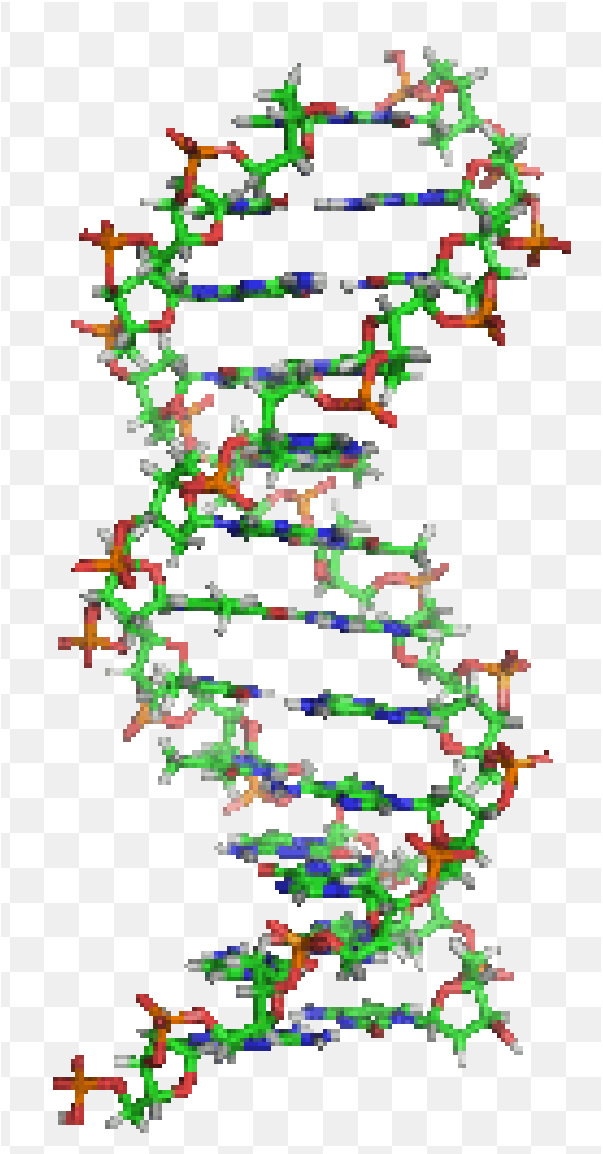
Teoria węzłów w biologii molekularnej.

- Najbardziej rozpowszechnioną w przyrodzie formą podwóójnej helisy jest prawoskrętna B-DNA.
- Ponadto spotykane są również formy prawoskrętne A, C, D, E i lewoskrętna Z-DNA.
- Kwas RNA - kwas rybonukleinowy, jest drugim typem kwasu nukleinowego. Jego budowa jest podobna do budowy DNA z dwiema zasadniczymi różnicami: cukrem wchodzącym w skład RNA jest ryboza, a zamiast tyminy występuje uracyl.



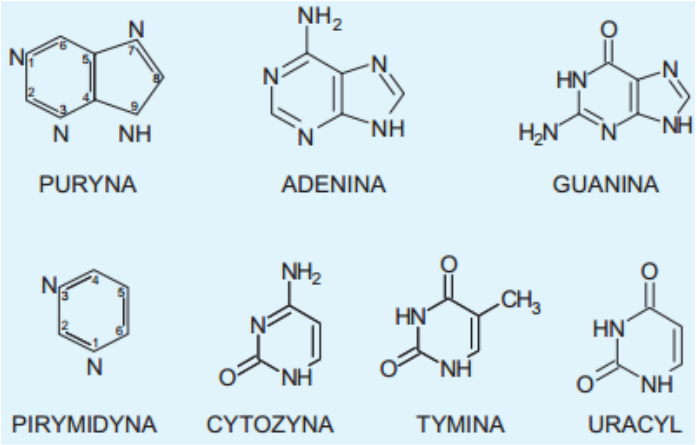
Teoria węzłów w biologii molekularnej.

- Mechanizm wiernego kopiowania informacji genetycznej jest obecny we wszystkich komórkach podlegających podziałom.
- Najważniejszą cechą procesu replikacji jest jej semikonserwatywny charakter, co oznacza, że każda nić DNA stanowi matrycę do wytworzenia nowej, komplementarnej nici.
- Podstawowym procesem zapewniającym precyzyjne przekazywanie informacji genetycznej komórkom potomnym jest proces powielania genomu zwany replikacją DNA.
- Cząsteczka DNA może także przyjmować formę pierścienia i dlatego może być splątana lub związana.
- Ponadto cząsteczke DNA można czasowo przerwać. W tym przerwanym stanie DNA może ulec fizycznej deformacji struktury, by następnie ulec rekombinacji.



Cechy modelu Watsona i Cricka, znanego jako helisa B-DNA

1. Dwa łańcuchy polinukleotydowe, biegnące w przeciwnych kierunkach, okręcają się wokół wspólnej osi tworząc prawoskrętną, dwuniciową helisę.
2. Zasady purynowe i pirymidowe znajdują się wewnątrz helisy, natomiast reszty fosforanowe i deoksyrybozowe są na zewnątrz.
3. Adenina (A) tworzy parę z tyminą (T), a guanina (G) z cytozyną (C).



Zasady azotowe wchodzące w skład kwasów nukleinowych.

Własności DNA

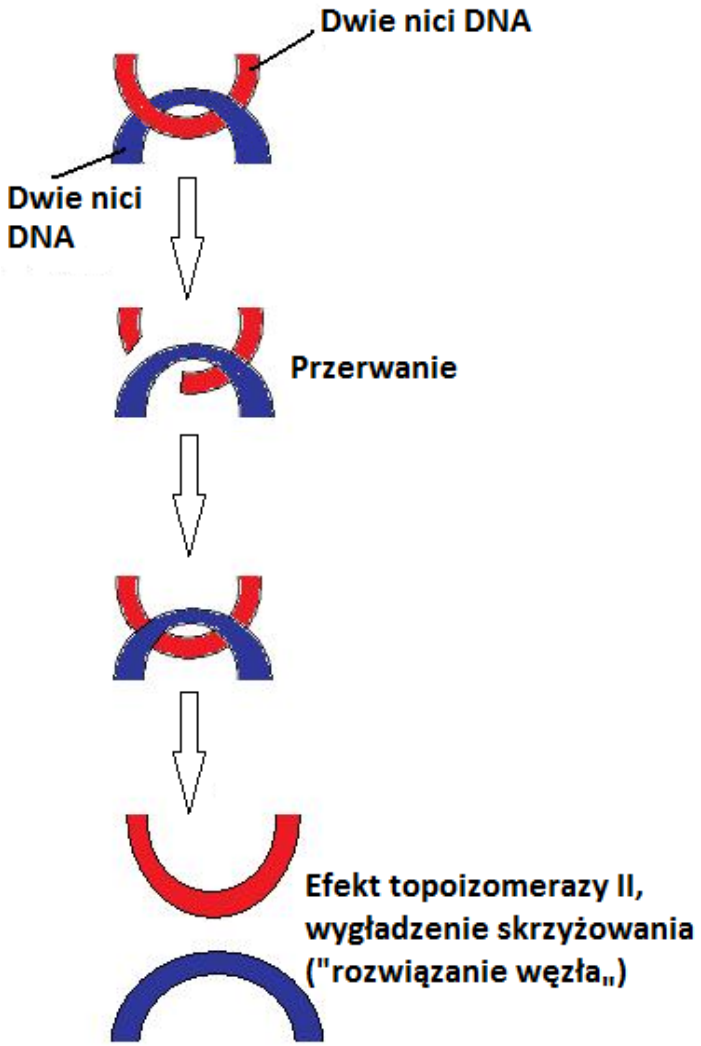
- Koliste cząsteczki DNA, wykazujące przestrzenne skręcenie wokół siebie zostały nazwane formami superhelikalnymi.
- Helisa może łatwo się wyginać w łuk lub przyjmować formę superhelikalną bez większych lokalnych zmian struktury.

Teoria węzłów w biologii molekularnej.

Topoizomerazy

Grupa enzymów biorących udział w replikacji, gdzie odpowiadają za stopień skręcenia podwójnej helisy.

- We wczesnych latach 70 - siątych odkryto, że enzym topoizomeraza umożliwia cały proces od początkowego przerwania do rekombinacji DNA.
- Topoizomerazy rozplątywują podwójną helisę DNA, udostępniając w ten sposób matrycę dla enzymów replikacyjnych lub transkrypcyjnych.
- Działanie topoizomerazy jest połączone z nowymi niezmiennikami splotów.
- Pokazano, że kiedy topoizomerazy powodują zmiany formy DNA to jest to proces podobny do tego co lokalnie dzieje się w skein diagramach.
- Działanie topoizomerazy jest połączone z nowymi niezmiennikami, ważnym konceptem jest tu indeks zaczepienia.



Topologiczne podejście do enzymologi.

Enzymologia

Dział biochemii zajmujący się enzymami, ich strukturą, właściwościami, mechanizmami działania, przebiegiem katalizowanych przez nie reakcji, funkcjami, drogami biosyntezy oraz sposobami ich izolowania i oczyszczania.

- W niektórych przypadkach stwierdzono, że DNA, który ma kształt pierścienia składającego się z jednej nici lub dwóch nici zwiniętych w podwójną helise.
- Taka pojedyncza nić DNA może być dosłownie wiązana w sensie o jakim mówiliśmy dotychczas.
- Modele abstrakcyjnych obiektów (węzłó i splotów) możemy teraz zaobserwować w rzeczywistości pod mikroskopem elektronowym.
- Ostatnie badania pokazują, że typ węzłu DNA ma znaczenie na funkcję, działanie cząsteczki DNA w komórce.

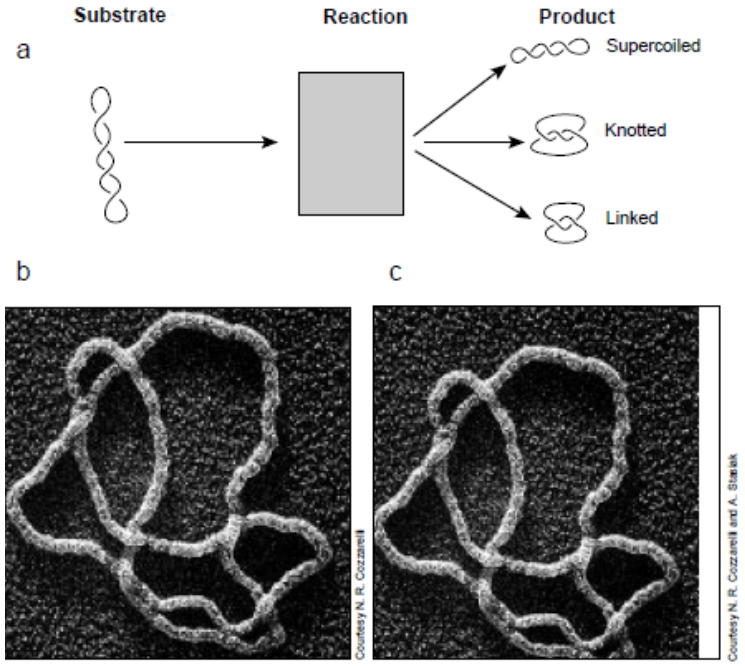
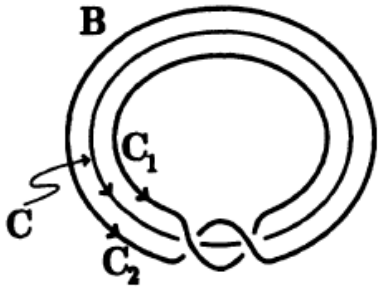


Figure 1
(a) Topological approach to enzymology, (b) DNA (+) Whitehead link, (c) DNA knot 6_5^*.

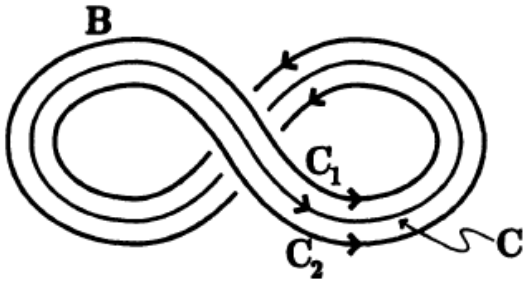
Matematyczny model cząsteczki DNA.

- Matematyczny model cząsteczki DNA to zwykle cienka, długa, zorientowana, skręcona wstążka.
- Na tym rysunku, wstążka jest homeomorficzna z $S^1 \times [-1, 1]$, ale nie z wstęgą Möbiusa.



$\mathrm{lk}(C_1, C_2) = 1$
$\mathrm{Wr}(B) = 0,\ \mathrm{Tw}(B) = 1$

(a)

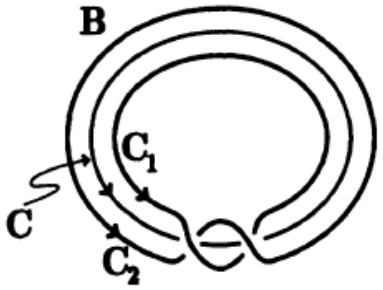


$\mathrm{lk}(C_1, C_2) = -1$
$\mathrm{Wr}(B) = -1,\ \mathrm{Tw}(B) = 0$

(b)

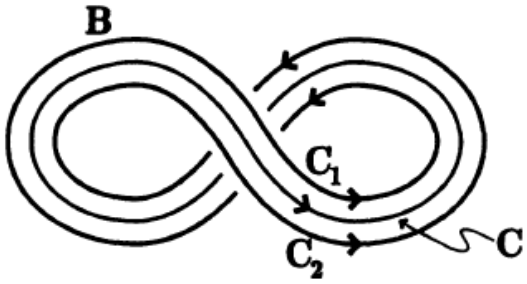
Matematyczny model cząsteczki DNA.

- Obie krzywe C_1 oraz C_2, które stanowią brzegi wstęgi B reprezentują zamknięte nici DNA.
- Możemy ustalić orientację na krzywej C, która stanowi oś dla B.



$\mathrm{lk}(C_1, C_2) = 1$
$\mathrm{Wr}(B) = 0,\ \mathrm{Tw}(B) = 1$

(a)

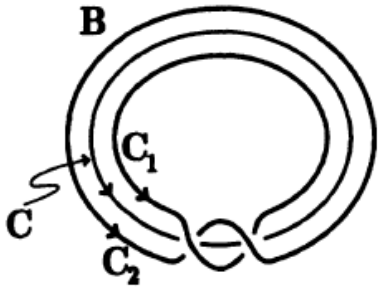


$\mathrm{lk}(C_1, C_2) = -1$
$\mathrm{Wr}(B) = -1,\ \mathrm{Tw}(B) = 0$

(b)

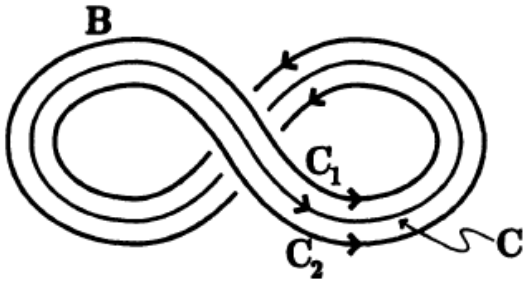
Matematyczny model cząsteczki DNA.

- Obie krzywe C_1 oraz C_2, które stanowią brzegi wstęgi B reprezentują zamknięte nici DNA.
- Możemy ustalić orientację na krzywej C, która stanowi oś dla B (tj. centralnej krzywej $S^1 \times \{0\}$).
- Orientacja na C idukuje orientacje na C_1 i C_2.
- Indeks zaczepienia $lk(C_1, C_2)$ jest niezmiennikiem, i jego zmiana ma bardzo istotny wpływ na strukturę cząsteczki DNA.
- Topoizomerazy katalizują przekształcanie DNA do formy superhelikalnej oraz jego relaksację, tnąc i ponownie łącząc nici helisy.
- Dla przykładu, wiadomo, że jeśli zredukujemy indeks zaczepienia (zwany też indeksem zaplątania) dwuniciowej cząsteczki DNA, wtedy rezultatem jest powstanie form superhelikalnych.



$\mathbf{lk(C_1, C_2) = 1}$
$\mathbf{Wr(B) = 0,\ Tw(B) = 1}$

(a)

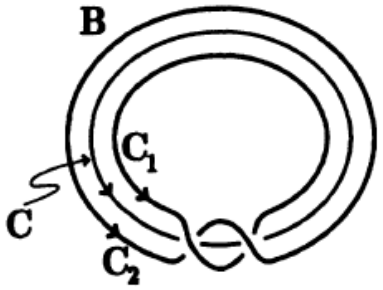


$\mathbf{lk(C_1, C_2) = -1}$
$\mathbf{Wr(B) = -1,\ Tw(B) = 0}$

(b)

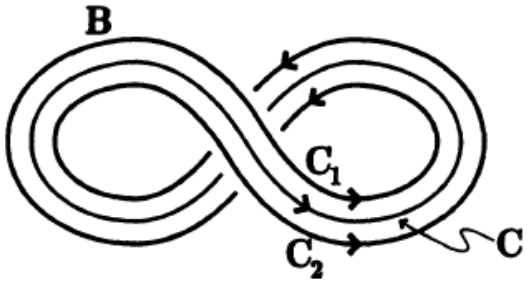
Matematyczny model cząsteczki DNA.

- Redukcja indeksu zaczepienia cząsteczki DNA może być osiągnięte przez działanie topoizomerazy na cząsteczkę DNA.
- W rzeczywistości, orientacja cząsteczki DNA nie jest dokładnie jak wyżej.
- Orientacje, w rzeczywistości, na dwóch niciach DNA są wzajemnie przeciwne, dlatego może powinniśmy przypisać wzajemnie orientacje dla krzywych C_1 i C_2.
- Jednak w przypadku supła stworzonego przez C_1 i C_2, indeks zaczepienia zdefiniowany na cząsteczce DNA w biologii i indeks zaczepienia zdefiniowany na cz



$\mathrm{lk}(C_1, C_2) = 1$
$\mathrm{Wr}(B) = 0,\ \mathrm{Tw}(B) = 1$

(a)



$\mathrm{lk}(C_1, C_2) = -1$
$\mathrm{Wr}(B) = -1,\ \mathrm{Tw}(B) = 0$

(b)

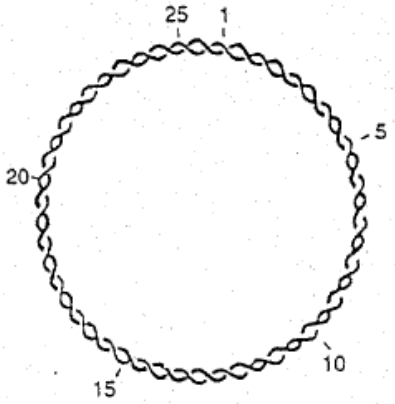
Liczba opleceń DNA jest cechą topologiczną, determinującą stopień skręcenia superhelikalnego.

- Jak zaobserwował Jerome Vinograd w roku 1963, kolisty DNA wirusa *polio* w czasie wirowania rozdzielał się na dwa pasma. Podczas rozwiązywania tej zagadki odkrył on ważną własność kolistego DNA, jakiej nie mają cząsteczki liniowe.
- Rozważmy odcinek o długości 260 pz i konformacji helisy B - DNA.
- Ponieważ ilość zasad przypadających na jeden skręt w cząsteczce DNA wynosi $10,4$, ta liniowa cząsteczka tworzy $25 = \frac{260}{10,4}$ skrętów.

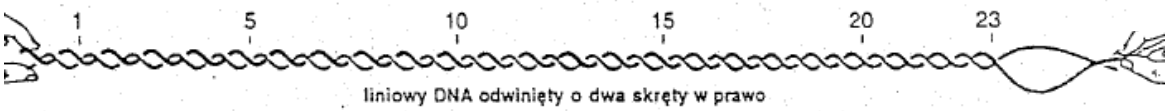
Liczba opleceń DNA jest cechą topologiczną, determinującą stopień skręcenia superhelikalnego.

Teraz połączmy końce tej helisy, tworząc *zrelaksowany* kolisty DNA.

Zupełnie inny kolisty DNA może powstać, kiedy odwiniemy liniową cząsteczkę DNA o dwa skręty przed połączeniem jej w strukturę kolistą.



rozluźniona cząsteczka kolista



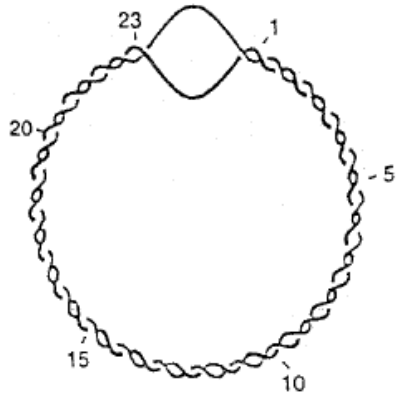
liniowy DNA odwinięty o dwa skręty w prawo

Liczba opleceń DNA jest cechą topologiczną, determinującą stopień skręcenia superhelikalnego.

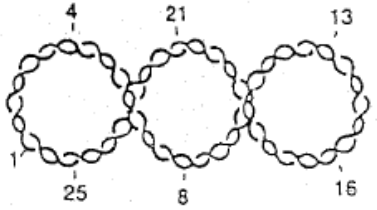
- Jakie są następstwa odwinięcia DNA przed połączeniem końców?
- Możliwe jest przybranie przez nią dwóch konformacji.:

  DNA może przybrać strukturę tworzącą 23 skręty helisy oraz odwiniętą pętle nie tworzącą dodatkowych splotów.

  DNA może takrze przybrać strukturę superchelikalną, gdzie helisa tworzy 25 skrętów oraz 2 skręty lewoskrętnej (określonej jako ujemna) struktury superhelikalnej.



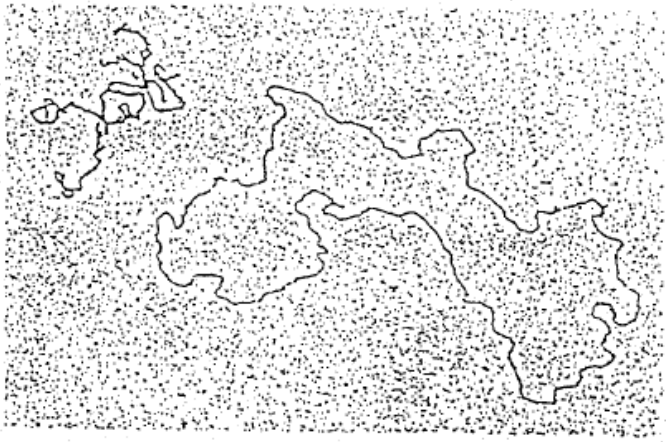
$Lk = 23$, $Tw \sim 23$, $Wr \sim 0$
odwinięta cząsteczka kolista



$Lk = 23$, $Tw \sim 25$, $Wr \sim -2$

Liczba opleceń DNA jest cechą topologiczną, determinującą stopień skręcenia superhelikalnego.

- Przybranie konformacji superhelikalnej znacząco wpływa na ogólnką formę DNA.
- Cząsteczka superhelikalna DNA jest bardziej zwarta niż zrelaksowany (rozluźniony) DNA tej samej długości.
- Dlatego w czasie wirowania lub elektroforezy superhelikalny DNA porusza się szybciej niż jego zrelaksowana forma.
- Podczas eksperymentu Vinograda szybciej sedymentował superhelikalny DNA, natomiast wolniej sedymentujący DNA był zrelaksowany.



Mikrografia elektronowa rozluźnionej i ujemnie superhelikalnej formy DNA. [Dzięki uprzejmości: Dr. Jack Griffith]

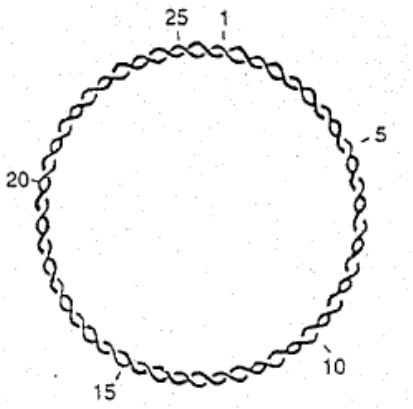
Dziękuję za obejrzenie prezentacji, spis prac, z których korzystałem, wraz z rysunkami (rysunki przerobiłem w programie graficznym) znajduje się na ostatnim slajdzie.

Topologia. Właściwości strukturalne cząsteczki, które nie ulegają zmianie podczas deformacji.

Kluczową właściwością topologiczną cząsteczki kolistego DNA jest *liczba opleceń* (indeks zaczepienia, ang. *linking number* - Lk), która określa ile razy jedna nić DNA owija się prawoskrętnie wokół osi helisy, sprowadzonej do prostej leżącej na płaszczyźnie.

Liczba opleceń, przykłady

- Dla zrelaksowanego DNA przedstawionego na rysunku obok $Lk = 25$.



rozluźniona cząsteczka kolista

Topologia.

Dziedzina matematyki zajmująca się deformacjami nazywa się topologią. (str. ??)

Matematyka to nie tylko arytmetyka, algebra, geometria, rachunek różniczkowy czy całkowy.
W matematyce wyodrębniło się wiele nowych dziedzin.
Topologia, to dział matematyki badający te własności figur, które się nie zmieniają przy deformacjach
(rozciąganie, wyginanie, skręcanie,
ale bez rozrywania i sklejania).

Semantyka - nazwa topologia powstała z połączenia greckich słów:

- $\tau o \pi o \varsigma$ znaczy miejsce, położenie,
- $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$ można interpretować jako naukę.

Czyli topologia to nauka o położeniu i kształcie.
Na początku XX wieku używany był termin " analysis situs " (łacina) czyli analiza położenia.

zanurzenie (str. ??)

W topologii ogólnej zanurzeniem przestrzeni A w przestrzeń B jest homeomorfizm $f : A \hookrightarrow B$.

krzywa zamknięta (str. ??)

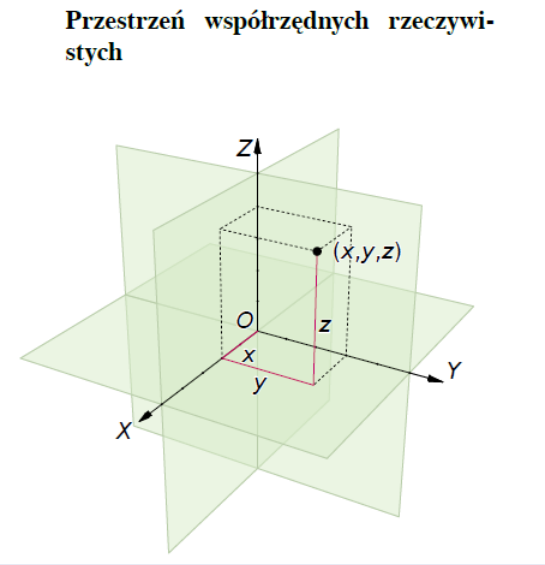
Rozmaitość jedno wymiarowa, spójna, zamknięta.

rozmaitość 1-wymiarowa (str. ??)

Rozmaitość 1-wymiarowa, to zbiór, który lokalnie " przypomina "
1-wymiarową przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^1$.
Przykłady: okrąg, sinusoida.

przestrzeń euklidesowa (str. ??)

(przestrzeń o geometrii euklidesowej)
Niech dana będzie przestrzeń liniowa V nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ wymiaru n, w której jest określony standardowy iloczyn skalarny (nazwany euklidesowym).
Przestrzeń afiniczną (zamknięta na kombinacje afiniczne) (E, V) nazywa się wówczas przestrzenią euklidesową wymiaru n.
Przestrzeń współrzędnych rzeczywistych ($n-$elementowych ciągów liczb rzeczywistych jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$) jest przestrzenią afiniczną nad samą sobą, wektory i punkty utożsamia się w naturalny sposób.



rysunek z Wikipedii

przestrzeń spójna

- Przestrzeń topologiczna X, której nie można rozłożyć na sumę dwóch niepustych, rozłącznych podzbiorów otwartych.
  Równoważnie:
  - X nie może być rozłożona na dwa rozłączne i niepuste zbiory domknięte,
  - jedynymi podzbiorami X zarazem otwartymi i domkniętymi są X i zbiór pusty.
- Silniejsze pojęcie: przestrzeń spójna drogowo, w której dowolne dwa punkty dają się połączyć drogą.
- Podzbiór przestrzeni topologicznej nazywa się spójnym, jeżeli jest spójny jako podprzestrzeń tej przestrzeni.

sfera trójwymiarowa S^3 (str. ??)

Oznaczana też $\mathbb{S}_3$.

$$\mathbb{S}_3 = \partial\mathbb{B}_4 \subset \mathbb{R}^4,$$

gdzie $\mathbb{B}_4$ to jednostkowa kula $4-$wymiarowa.

krzywe łamane, kawałkami liniowe (str. ??)

Linia łamana to w geometrii linia utworzona z ciągu odcinków (zwanych jej bokami) w taki sposób, że
1) żadne dwa następujące po sobie odcinki nie leżą na jednej prostej,
2) wierzchołek (ang. vertex) będący końcem pierwszego odcinka jest początkiem drugiego odcinka, wierzchołek będący końcem drugiego jest początkiem trzeciego i tak dalej.
Jeśli wierzchołek będący początkiem pierwszego boku jest jednocześnie i końcem ostatniego, to łamaną nazywamy zamkniętą..

krzywe gładkie (str. ??)

Termin o podwójnym znaczeniu, oznaczający krzywą mającą parametryzację klasy regularności C^1 lub C^∞.
Pierwszy z tych warunków oznacza, że krzywa ma w każdym punkcie styczną zmieniającą się w sposób ciągły wzdłuż krzywej.

homeomorfizm (str. ??)

Intuicyjnie to przekształcenie, które dowolnie ściska, rozciąga, wygina lub skręca figurę, nie robi jednak w niej dziur, nie rozrywa jej ani nie skleja jej fragmentów.
Homeomorfizmy są ciągłymi bijekcjami, których funkcja odwrotna jest również ciągła.

Łamana zwyczajna

Łamana zwyczajna występuje wtedy gdy:
1.dwa odcinki mające wspólny koniec nie leżą na jednej linii prostej.
2.pierwszy koniec może być wspóólny dla co najwyżej dwóch odcinków.

Krzywa zamknięta

Krzywą γ na płaszczyźnie nazywamy odwzorowanie ciągłe przedziału (α, β) w płaszczyznę.
Jeśli $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ krzywą tą nazywamy krzywą zamkniętą, a jeśli ponadto jest ona różnowartościowa w przedziale (α, β) to nazywamy ją krzywą Jordana.
W praktyce krzywą Jordana nazywamy też obraz tej krzywej na płaszczyźnie i ten obiekt jest homeomorficzny z okręgiem.

Literatura.

1. Krzysztof CIESIELSKI, Zdzisław POGODA *Królowa bez Nobla*, DEMART,Warszawa 2013.
2. Szczepan HUMMEL *Rozstrzygalność problemu rozpoznania węzła trywialnego*, praca licencjacka pod kierunkiem Agnieszki Bojanowskiej, MIMUW, Warszawa, 2005.
3. Włodzimierz JAKOBSCHE, Józef PRZYTYCKI, *Topologia 3-wymiarowych rozmaitości*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 1987.
4. Marek KORDOS *Zobaczyć to, czego nie widać, czyli kultura matematyczna w praktyce*, AKSJOMAT, Toruń 2009.
5. Marek KORDOS *Wykłady z historii matematyki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994.
6. Zdzisław POGODA *Poliboromeusze*, Delta, styczeń 2011, publikacja elektroniczna 18-12-2010, adres internetowy: http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_wezlow/2011/01/01/Poliboromeusze/, data odczytu strony: 01-11-2014.
7. Wojtek POLITARCZYK *Krótki wstęp do teorii węzłów*, Poznańska Fundacja Matematyczna, publikacja elektroniczna 11-01-2013, adres internetowy: http://pfm.wmi.amu.edu.pl, data odczytu strony: 01-11-2014.
8. Paweł TRACZYK *Od węzłów do warkoczy: pierwszy krok*, Szkoła Matematyki Poglądowej, Matematyka - Społeczeństwo - Nauczanie, adres internetowy: http://www.msn.ap.siedlce.pl/smp/?strona=msn, data odczytu strony: 01-11-2014.

Festiwal nauki, przygotowanie, efekty.

- Zabawki druciane z Empika lub z papierniczego na ulicy Krupniczej, duże modele 60zł+100 zł zakupić.
- Zrobić węzły z liny, na planszach dwa węzły równoważne zabawa polega na przerobieniu jednego na drugi używając modelu z liny. Zrobić przykład pokazowy. Dla przykładu odlątaj węzeł z rysunku obok powyżej.
- Kupić 5 sztuk gumek rubber loops, patrz rysunek obok poniżej. Zrobić bransoletki, pierścionki, nauczyć robić bransoletki studentów, zatrudnić ich do tej pracy.
- Koszulki darmowe (pieniądze dla koła) z nadrukiem np. dzikiego węzła, (można zrobić między Halą Targową, a Stradomiem).
- Podzielić zabawki na trzy stopnie trudności.