ROZRÓŻNIANIE WĘZŁÓW

KOLOROWANIE I INDEKS ZACZEPIENIA

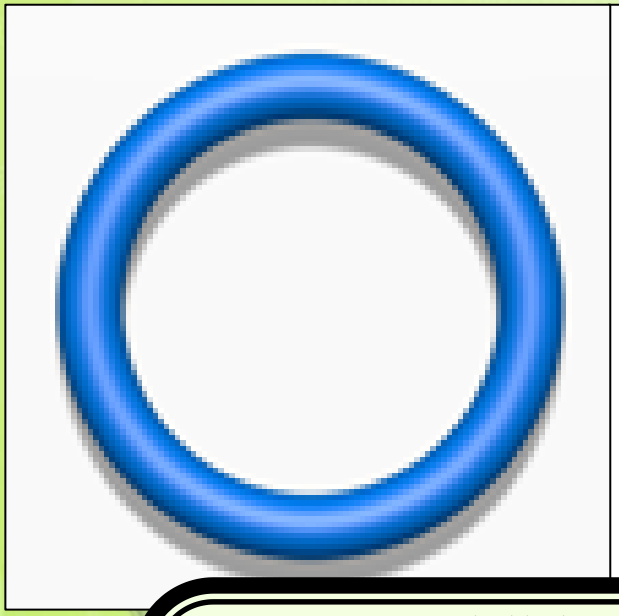
CrystalGraphics

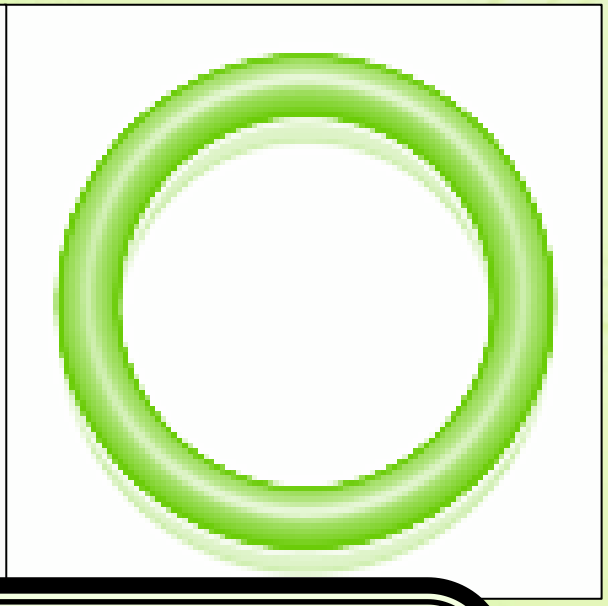
WĘZEŁ I SPLOT

- **WĘZEŁ** to homeomorficzny obraz okręgu w przestrzeni. Węzły otrzymujemy więc poprzez umieszczenie okręgu w przestrzeni na różne sposoby. Używając interpretacji sznurkowej: węzeł powstaje, gdy kawałek sznurka zapleciemy w dowolny sposób, a następnie skleimy jego końce.
- Kilka węzłów tworzy **SPLOT**, a poszczególne węzły nazywane są jego ogniwami. Sam węzeł zatem jest szczególnym przypadkiem splotu

CrystalGraphics

PRZYKŁADY SPLOTÓW

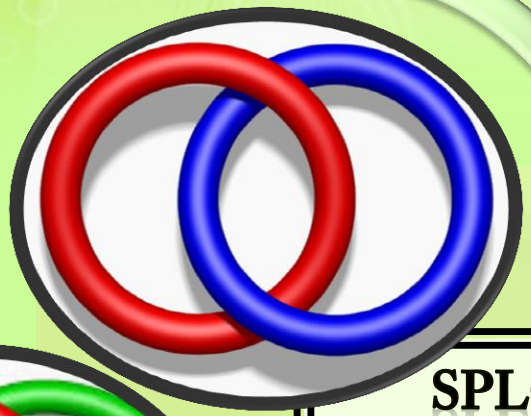




SPLOT TRYWIALNY

jest najprostszym splotem. W splocie trywialnym okrąg nie będzie miał punktów wspólnych z drugim okręgiem

CrystalGraphics CrystalGraphics



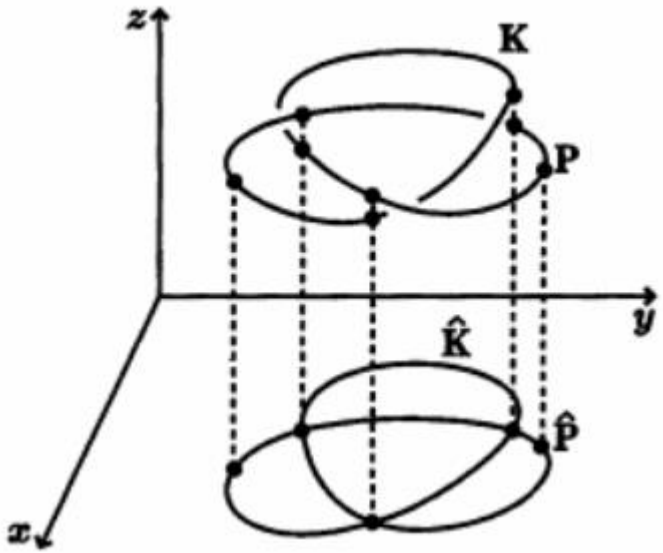
SPLOT HOPFA

SPLOT
BOROMEUSZÓW

POLIBOROMEUSZ

DIAGRAMY

- Regularne rzuty splotów i węzłów na płaszczyznę nazywane **DIAGRAMAMI**.
- Diagramy traktujemy dwuwymiarowo



CrystalGraphics
CrystalGraphics

DIAGRAMY

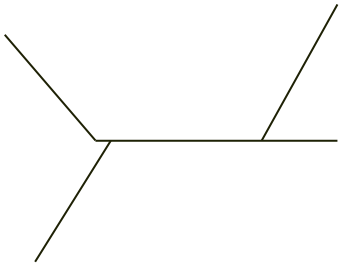
Rzut węzła nazywamy regularnym jeżeli

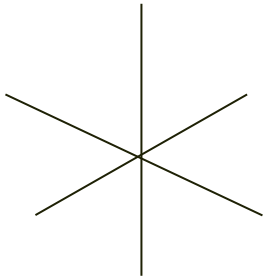
- Ma skończoną liczbę skrzyżowań i wszystkie są podwójne
- Żaden wierzchołek węzła wielościennego nie jest przeciwobrazem punktu podwójnego.

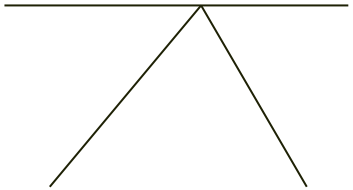
CrystalGraphics

DIAGRAMY

Sytuacje niedozwolone przy rzucie regularnym:







Dla każdego węzła wielościennego istnieje rzut regularny.

CrystalGraphics

NIEZMIENNIKI WĘZŁÓW I SPLOTÓW

- Dana własność węzła (splotu) jest jego **NIEZMIENNIKIEM**, jeżeli nie ulega zmianie podczas żadnego z trzech ruchów Reidemeistera. Jeżeli więc dwa sploty są równoważne, to niezmiennik jest zgodny dla obu splotów.
- Jeśli jednak niezmiennik różni się dla dwóch splotów, to sploty te nie są ze sobą równoważne.

CrystalGraphics

NIEZMIENNIKI WĘZŁÓW I SPLOTÓW

- **ROLA NIEZMIENNIKÓW** wskazać, że dane sploty nie są ze sobą równoważne Niezmienniki te służą do wskazania, że dane węzły, czy sploty, nie są podobnie zasupłane. Znajdują tym samym zastosowanie przy rozwiązywaniu problemów natury klasyfikacyjnej.

CrystalGraphics

INDEKS ZACZEPIENIA

- Indeksem zaczepienia splecionych z sobą węzłów nazywamy liczbę:

$$L_k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=N}^{N} e_i$$

Gdzie:

e_i (i=1,2…,N) – liczby określające wartości znaków N skrzyżowań widzianych w badanym rzucie rozważanego splotu

INDEKS ZACZEPIENIA

- Pojęcie indeksu zaczepienia jest zależne od orientacji określonej na węzłach
- Przy zmianie orientacji jednego z węzłów indeks zaczepienia splotu zmienia swój znak.
  Gdy zmienimy orientację obu węzłów, wartość indeksu zaczepienia pozostaje niezmieniona.

CrystalGraphics

INDEKS ZACZEPIENIA

- Do obliczeń wartości indeksu zaczepienia nie będą brane pod uwagę samoskrzyżowania, tj. skrzyżowania nitek pochodzących z tego samego węzła.

CrystalGraphics

INDEKS ZACZEPIENIA

- Indeks zaczepienia jest niezmiennikiem splotu. Jego wartość jest stała przy wykonywaniu dowolnych przekształceń izotopii przestrzennej.

CrystalGraphics

INDEKS ZACZEPIENIA

- Wartość indeksu zaczepienia nie zawsze jest różna dla różnych splotów np. splot Whiteheada i splot trywialny mają indeks zaczepienia równy 0. Do odróżnienia tych splotów potrzebne są inne niezmienniki.

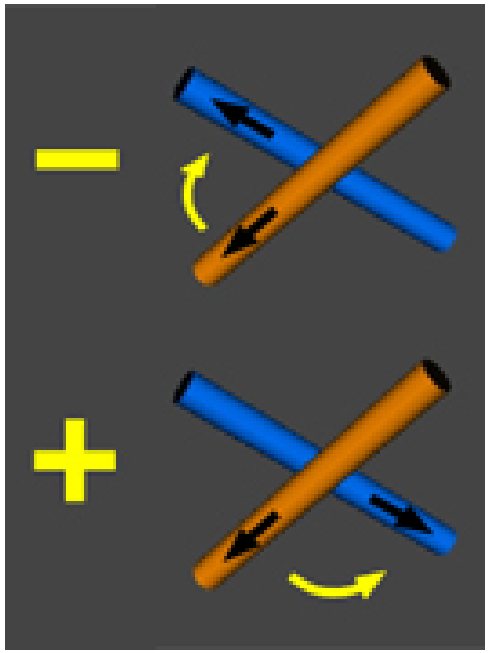
CrystalGraphics

ORIENTACJA DIAGRAMÓW

- Orientacja diagramu D to wybór kierunku obiegu każdej składowej splotu.
- Każda składowa posiada dwie orientacje, więc jeśli rozważany splot posiada n składowych, to można go zorientować na 2^n sposobów.
- Skrzyżowania w zorientowanym diagramie możemy podzielić na dwie grupy **DODATNIE** i **UJEMNE**

CrystalGraphics

SKRZYŻOWANIA



SKRZYŻOWANIE

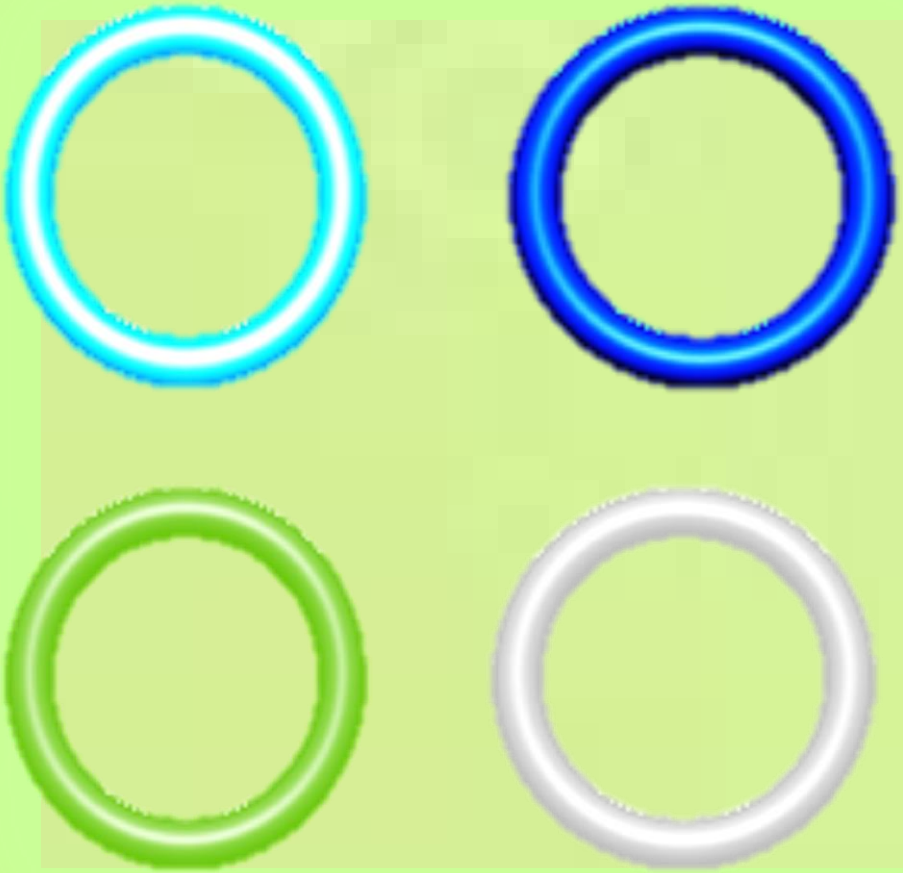
- ujemne
- dodatnie

Poszczególnym skrzyżowaniom przypisujemy wartość +1 lub –1, którą dalej będziemy nazywać **ZNAKIEM SKRZYŻOWANIA**; Obowiązuje tu pewna konwencja ustanowiona przez topologów.

W celu wyznaczenia znaku jakiegoś skrzyżowania wyobraźmy sobie, że jest to skrzyżowanie jednokierunkowych dróg. Wjedźmy na skrzyżowanie drogą przebiegającą górą i spójrzmy na kierunek ruchu obowiązujący na drodze biegnącej dołem. Jeśli ruch ten odbywa się w lewo, znak skrzyżowania jest dodatni (+1), jeśli w prawo - ujemny (-1)

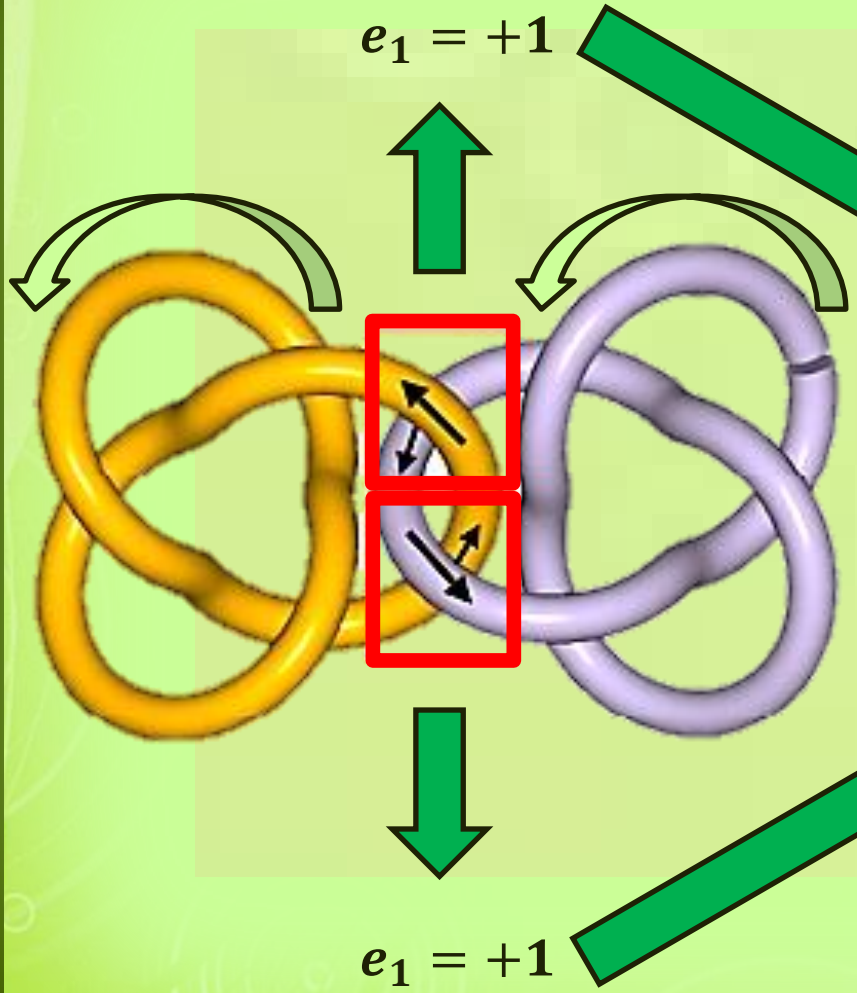
CrystalGraphics

PRZYKŁADY



$L_k = 0$

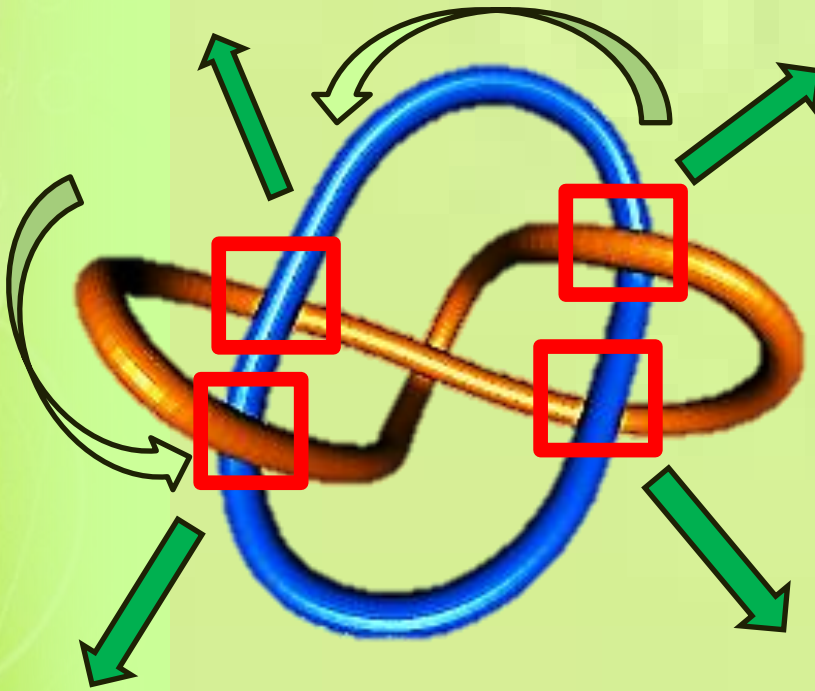
PRZYKŁADY



$$L_k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=N}^{N} e_i$$

$$L_k = \frac{1+1}{2} = 1$$

PRZYKŁADY



$$L_k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=N}^{N} e_i$$

$$L_k = \frac{1 + 1 - 1 - 1}{2} = 0$$

INDEKS ZACZEPIENIA

Inną metodą wyznaczenia indeksu zaczepienia jest metoda analityczna, w której obliczane są wartości krzywoliniowej całki podwójnej:

$$L_k = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{K1\,K2} \frac{(dr_1 \times dr_2) \cdot r_{1,2}}{{r_{1,2}}^3}$$

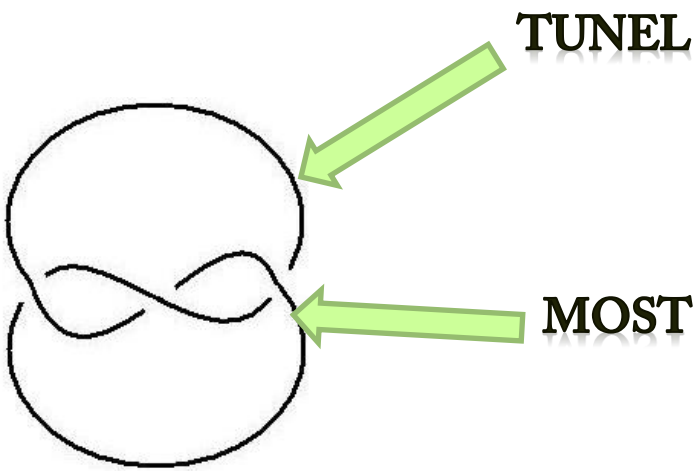
Gdzie:

Wektory r_1 , r_2 są promieniami wodzącymi punktów znajdujących się, odpowiednio, na węźle K_1 oraz węźle K_2, natomiast $r_{1,2} = r_2 - r_1$ oznacza wektor łączący punkt na węźle pierwszym z punktem na węźle drugim

TUNELE I MOSTY

TUNEL – jest to część segmentu na diagramie węzła, która przechodzi pod skrzyżowaniem

MOST – jest to część segmentu na diagramie węzła, która idzie nad skrzyżowaniem



CrystalGraphics
CrystalGraphics

LICZBA MOSTOWA

Dla danego regularnego diagramu D liczebność mostów jest nazywana **LICZBĄ MOSTOWĄ.**

CrystalGraphics

LICZBA MOSTOWA

Dla węzła lub splotu K :

$$br(K) = \min_{D \in \Delta} br(D)$$

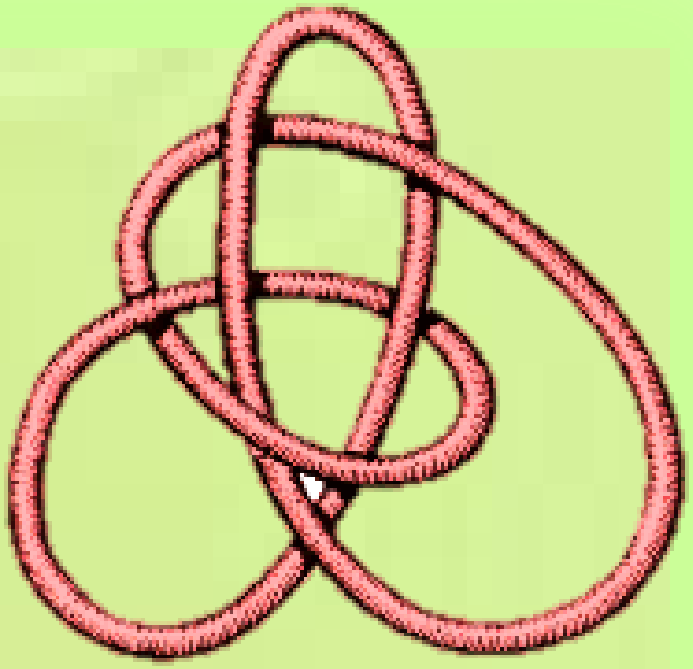
Jest **NIEZMIENNIKIEM** węzła K, gdzie **Δ** to zbiór wszystkich regularnych diagramów K.

CrystalGraphics

PRZYKŁADY

6 MOSTÓW

PRZYKŁADY



5 MOSTÓW

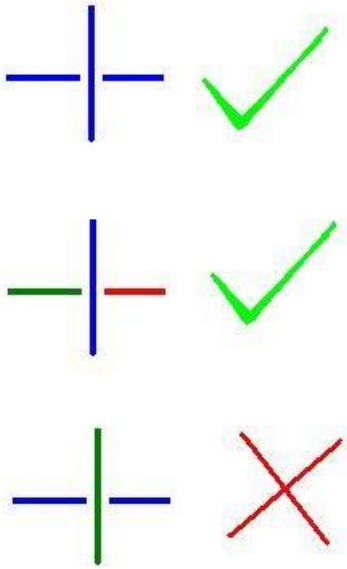
PRZYKŁADY

7 MOSTÓW

KOLOROWANIE WĘZŁÓW

TRÓJKOLOROWANIE

- Węzeł jest 3-kolorowalny, jeśli każdy łuk na diagramie da się pokolorować jednym z trzech kolorów (np. czerwony, zielony, niebieski), z zastrzeżeniem że: na każdym skrzyżowaniu występuje albo jeden kolor albo wszystkie trzy



- Węzły równoważne mają taką samą liczbę możliwych kolorowań.

CrystalGraphics CrystalGraphics

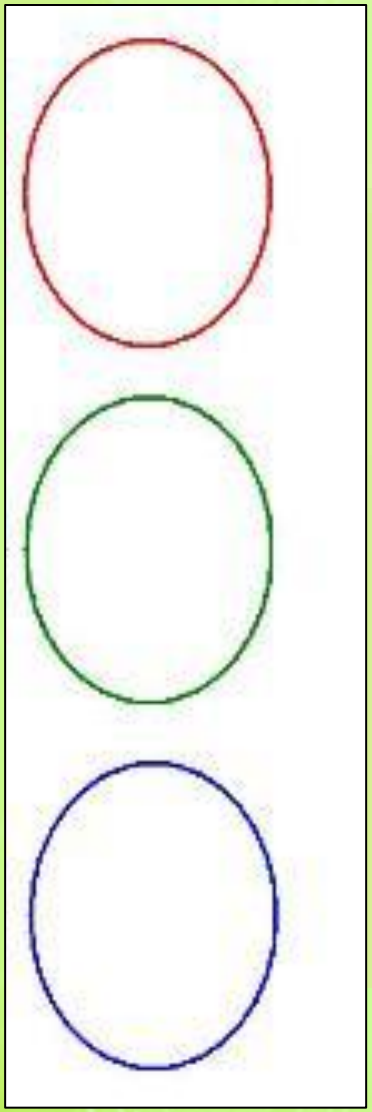
KOLOROWANIE WĘZŁÓW

TRÓJKOLOROWANIE

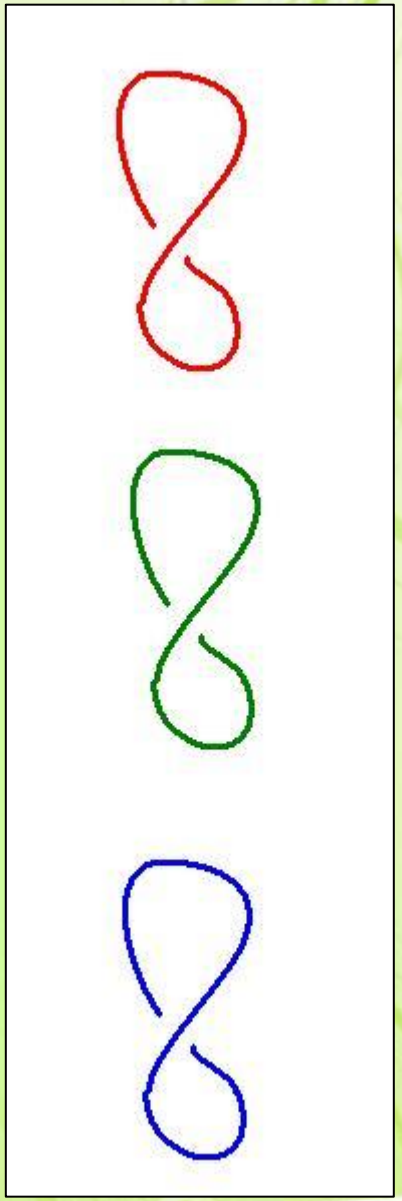
Jeśli na diagramie węzła D ilość odpowiednich kolorów $Col_3(D)$ jest zachowana w ramach ruchów Reidemeistra, to jest niezmiennikiem węzła.

CrystalGraphics
CrystalGraphics

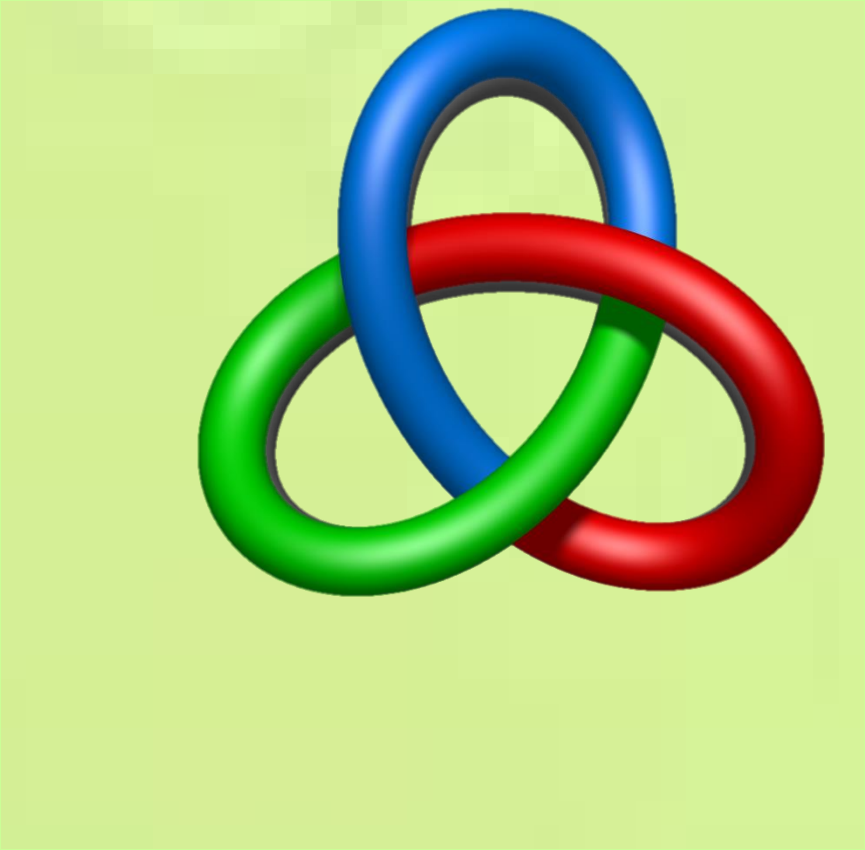
PRZYKŁADY



Węzeł trywialny ma 3 możliwe kolorowania.



PRZYKŁADY

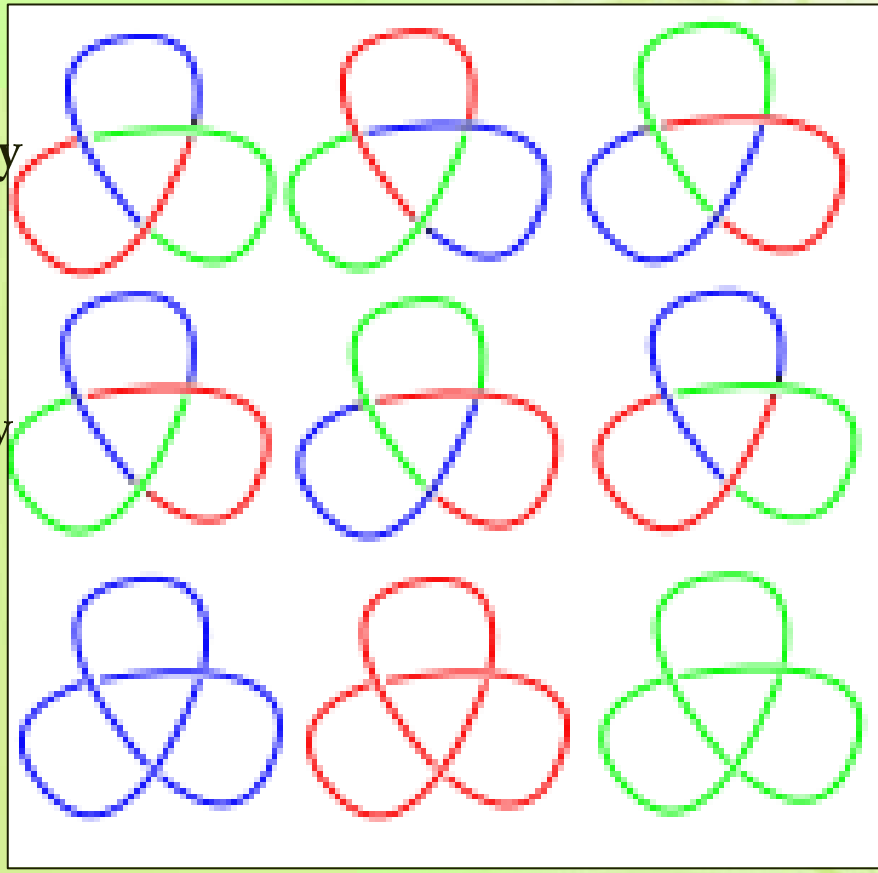


PRZYKŁADY

Niebieski – Czerwony – Zielony

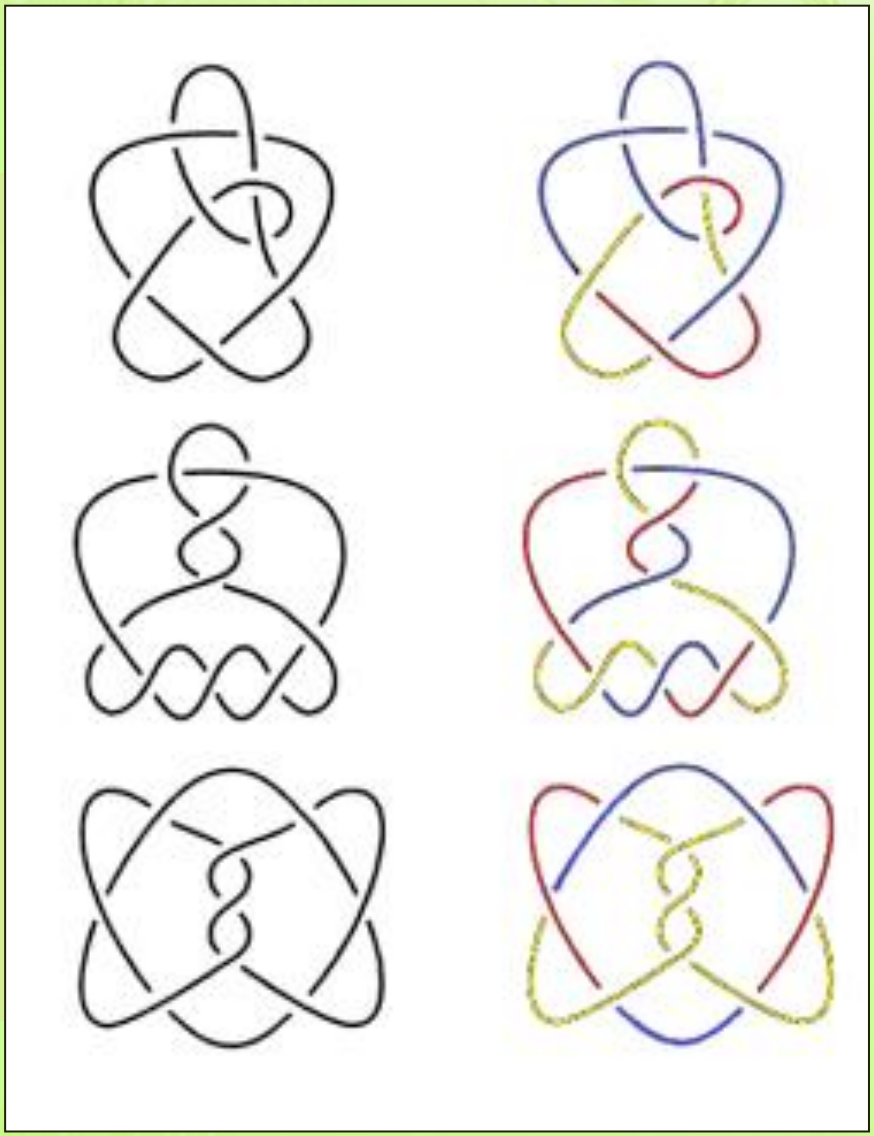
Niebieski – zielony – Czerwony

Trywialne kolorowanie

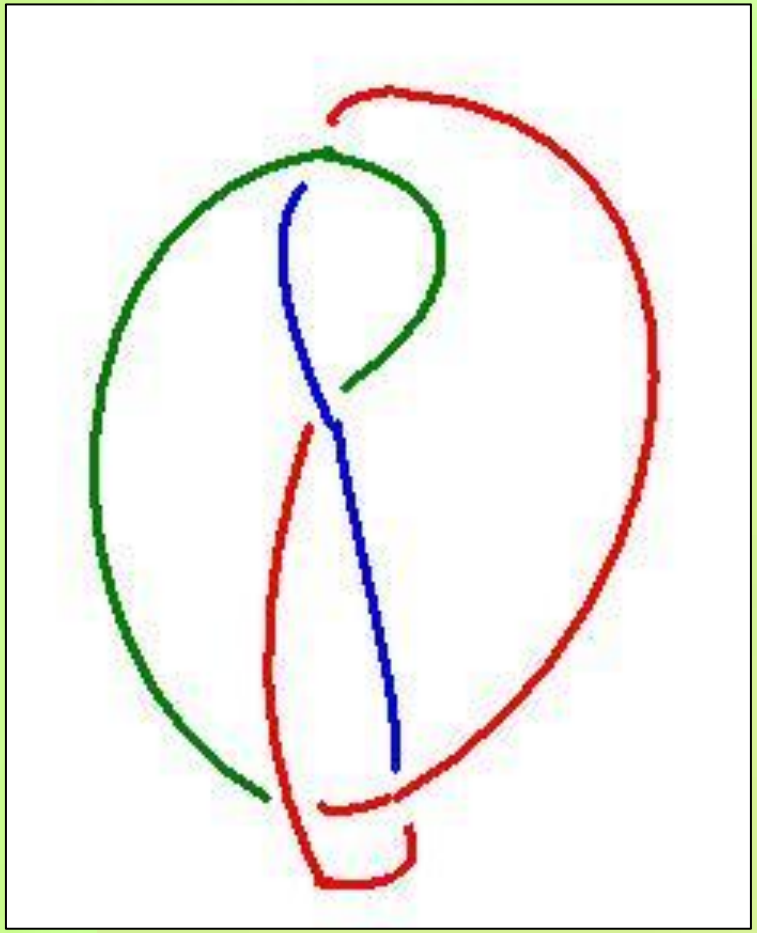


Wszystkie możliwe 3-kolorowanie trójlistnika

PRZYKŁADY



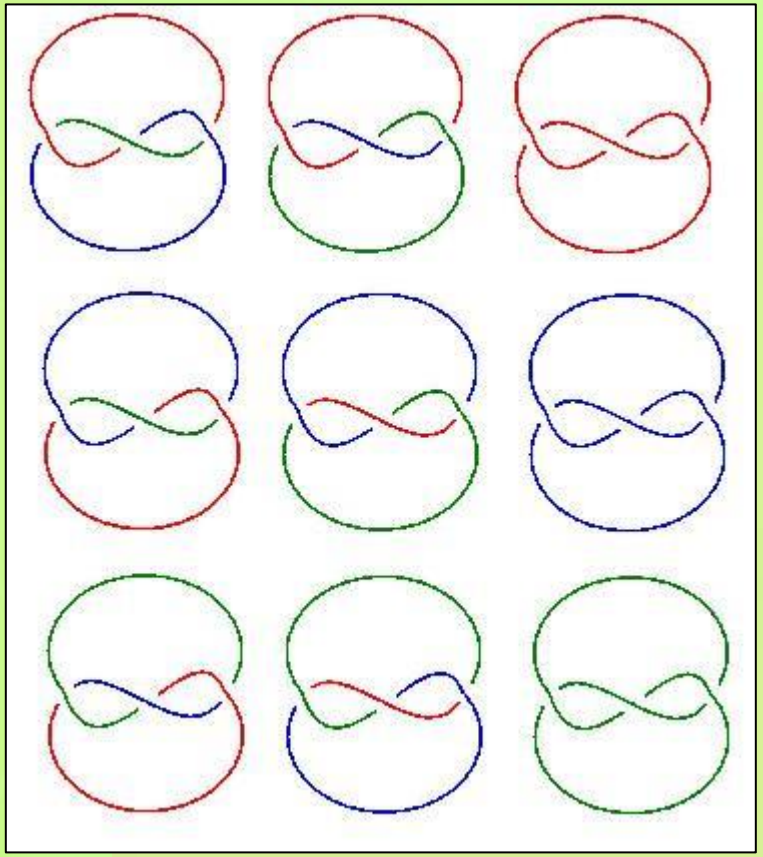
PRZYKŁADY



Tego węzła nie można pokolorować trzema różnymi kolorami.

Nie jest to jednak węzeł trywialny.

PRZYKŁADY

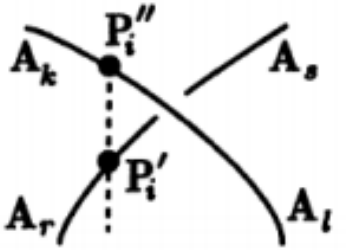


Ten węzeł można pokolorować na 9 różnych sposobów, więc nie jest trywialny.

P-KOLOROWANIE

Rozważmy segmenty $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ i przypiszmy każdemu A_i liczbę λ_i, która przyjmuje wartości ze zbioru

0,0,…,p-1



Ponadto liczby te spełniają warunki:

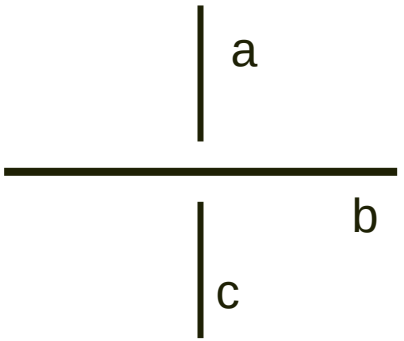
$$\lambda_k = \lambda_l$$
$$\lambda_r + \lambda_s = \lambda_k + \lambda_l \pmod p$$

Regularny diagram D jest p = kolorowalny, gdy istnieją w nim dwa segmenty o różnej przypisanej liczbie ze zbioru 0,0,…,p-1

CrystalGraphics CrystalGraphics

P-KOLOROWANIE

Dla n kolorów numerujemy je od 0 do n-1 i kolorujemy łuki diagramu tak, aby na każdym skrzyżowaniu spełniona była równość:
$a + c = 2b \pmod n$



TWIERDZENIE

Jeśli dwa węzły są równoważne, to ilość możliwych n – kolorowań ich diagramów jest taka sama.

CrystalGraphics
CrystalGraphics

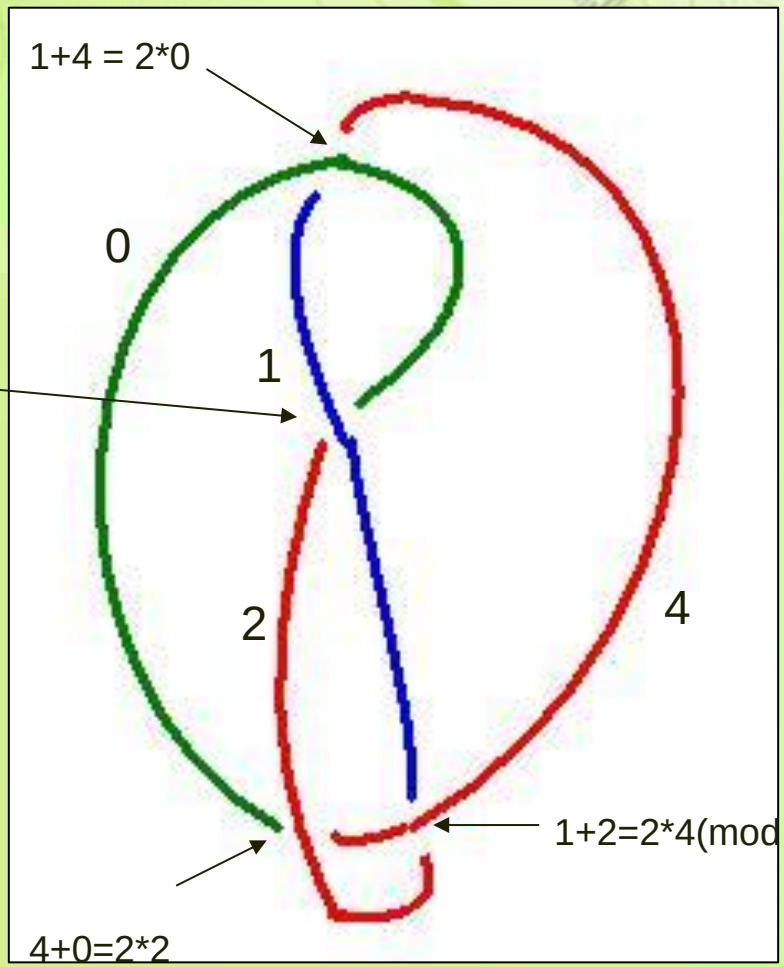
P-KOLOROWANIE

TWIERDZENIE

Jeśli dwa węzły są równoważne, to ilość możliwych p – kolorowań ich diagramów jest taka sama.

CrystalGraphics

PRZYKŁADY



Ten węzeł da się pokolorować różnymi kolorami przy 5-kolorowaniu.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

CrystalGraphics

BIBLIOGRAFIA

http://math.sjtu.edu.cn/conference/Bannai/2013/data/20131205A/slides.pdf.

S. Przybył „Poszukiwanie węzłów idealnych i ich własności”, rozprawa doktorska , Politechnika Poznańska, 2001

http://pfm.wmi.amu.edu.pl/index.php/item/13-krotki-wstep-do-teorii-wezlow-cz-2

M. Rosicka, „Kolorowanie węzłów”

SILVER D. S, WILLIAMS S. G., „Generalized n-colorings of links.”*Banach Center Publications*, 1998, 42: 381-394.