Teoria Węzłów

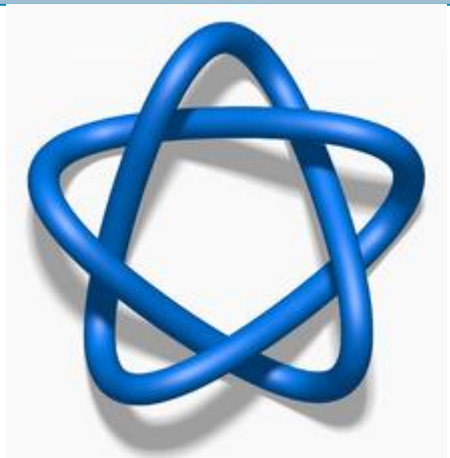
Anna Spytek

10B2

Węzeł – co to takiego?

To homeomorficzny obraz okręgu w przestrzeni.

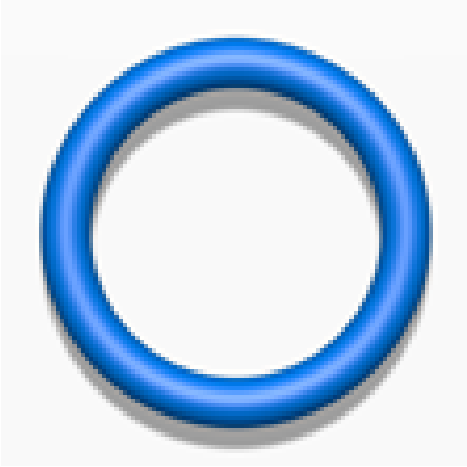
Inna interpretacja: węzeł powstaje gdy kawałek sznurka zapleciemy w dowolny sposób, a następnie skleimy jego końce.



Węzeł trywialny

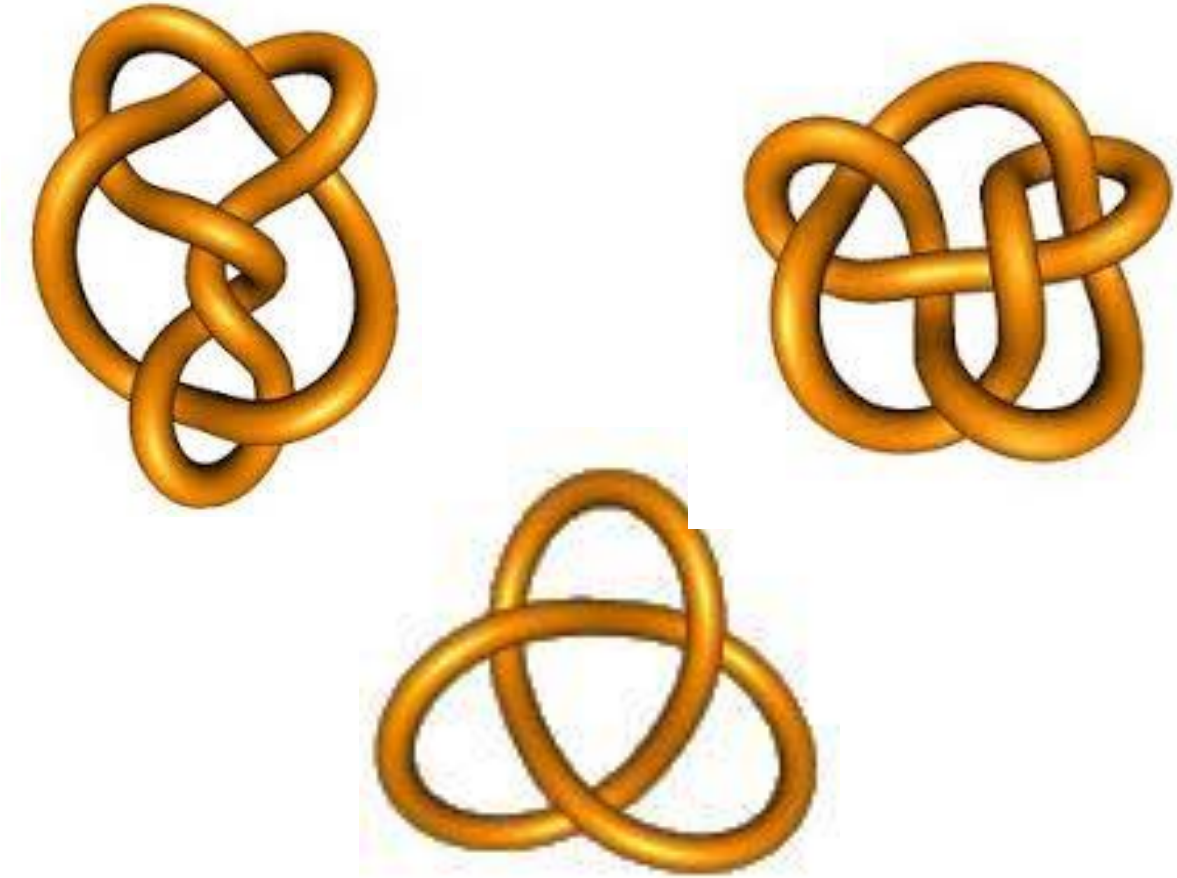
Najprostszy typ węzła, powstały przez połączenie dwóch końców prostego sznurka (nie zawierającego pętelek).

Węzłem trywialnym jest węzeł równoważny kręgowi na płaszczyźnie.

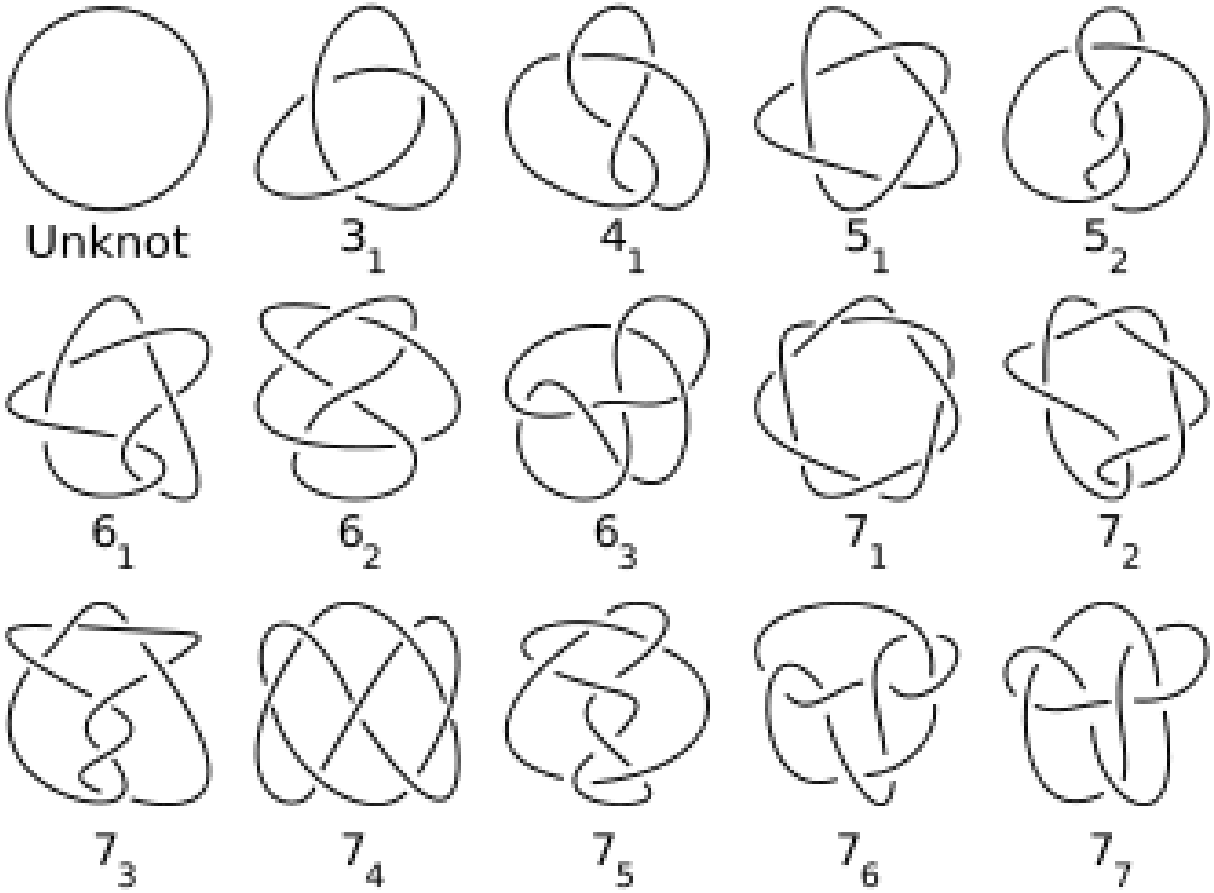


Węzeł nietrywialny

W uproszczeniu jest to węzeł nie będący węzłem trywialnym, czyli węzeł nie równoważny okręgowi.

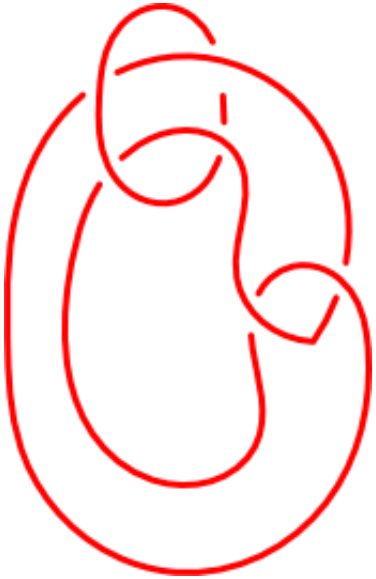


Przykłady węzłów



Splot

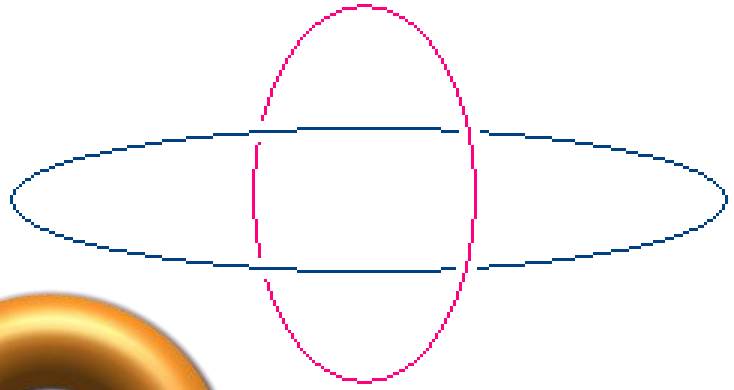
Splot tworzy kilka węzłów, a poszczególne węzły nazywane są ogniwami splotu. Sam węzeł również jest szczególnym przykładem splotu.

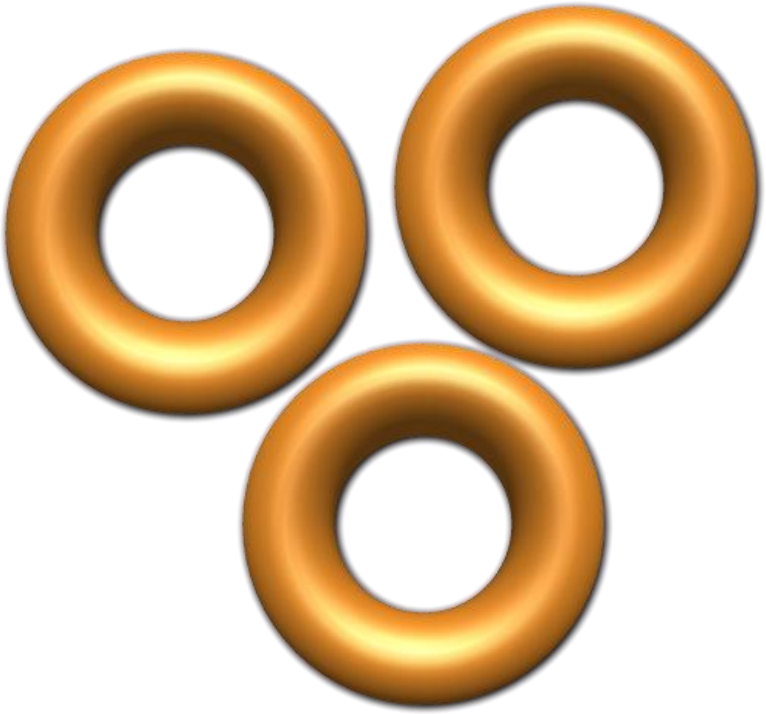


Splot Whiteheada

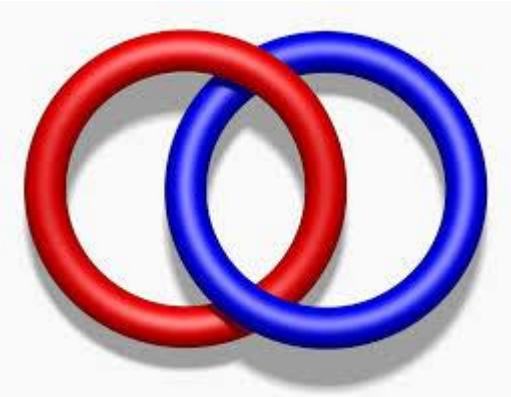
Splot trywialny

Najprostszy przykład splotu. W splocie trywialnym jedno ogniwo splotu nie będzie miało punktów wspólnych z drugim ogniwem.

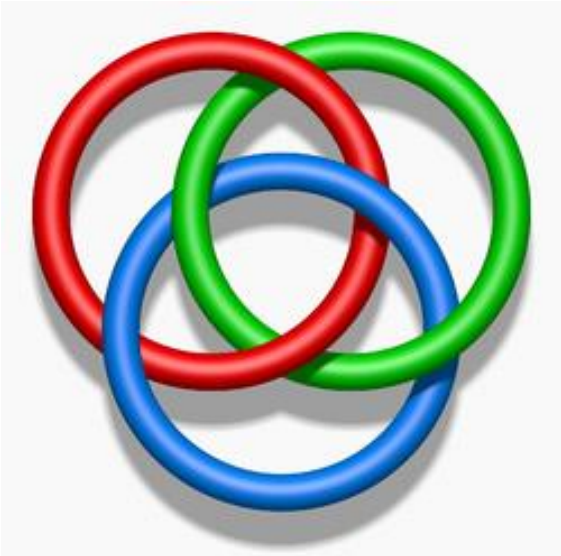




Przykłady splotów



Splot Hopfa

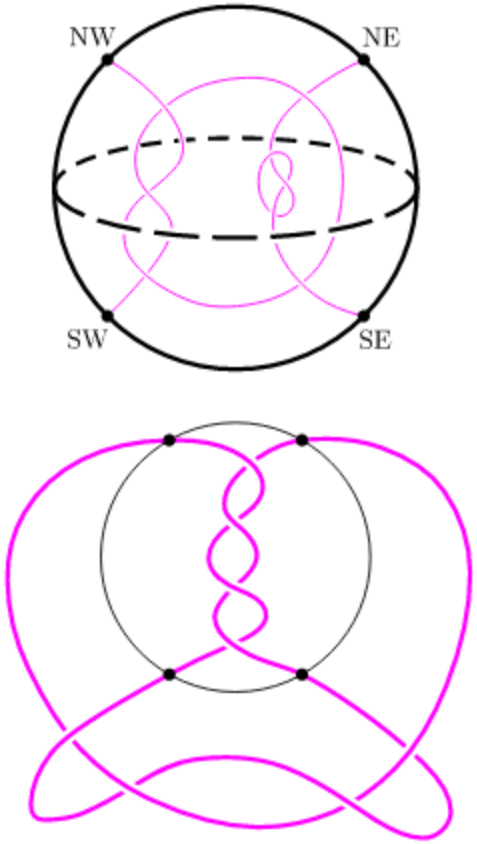


Pierścienie boromejskie

Poliboromeusz

Supeł

Z supłów tworzy się węzły. Umieszcza się je zazwyczaj tak że końce leżą na sferze.



Rys. 1. Przedstawienie supła w sferze i w węźle.

Diagram węzła

Regularne rzuty węzła na płaszczyznę.

Każdy diagram splotu składa się z kilku płaskich krzywych zamkniętych (nie mających końców wolnych), które przecinają się w skończonej ilości punktów. A w danym punkcie mogą się przecinać dwie krzywe, zaznaczając, ze jedna przechodzi górą (most), a druga dołem (tunel).

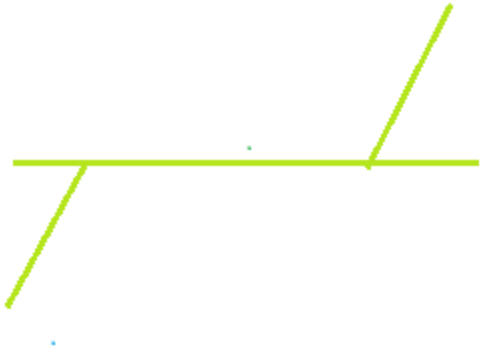
Diagram węzła

DIAGRAM WĘZŁA - obraz węzła w rzucie regularnym z zaznaczeniem gdzie cześć łuku idzie dołem (tunel), a gdzie górą (most).

Rzut węzła nazywamy regularnym jeżeli:

1. Jest skończona ilość punktów wielokrotnych i wszystkie te punkty są punktami podwójnymi
2. Żaden wierzchołek węzła wielościennego nie jest przeciwobrazem punktu podwójnego

Przypadki niedozwolone:



Zredukowany rzut regularny

Zredukowanym rzutem regularnym nazywamy diagram, który nie posiada skrzyżowań powstałych przez pojedyncze skręcenie.

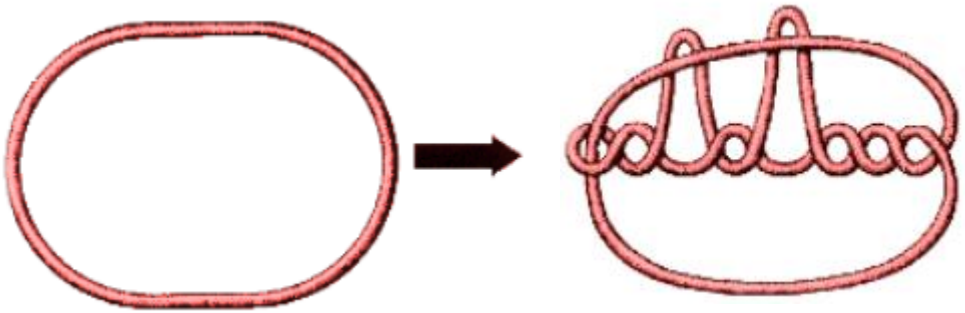
Równoważność węzłów

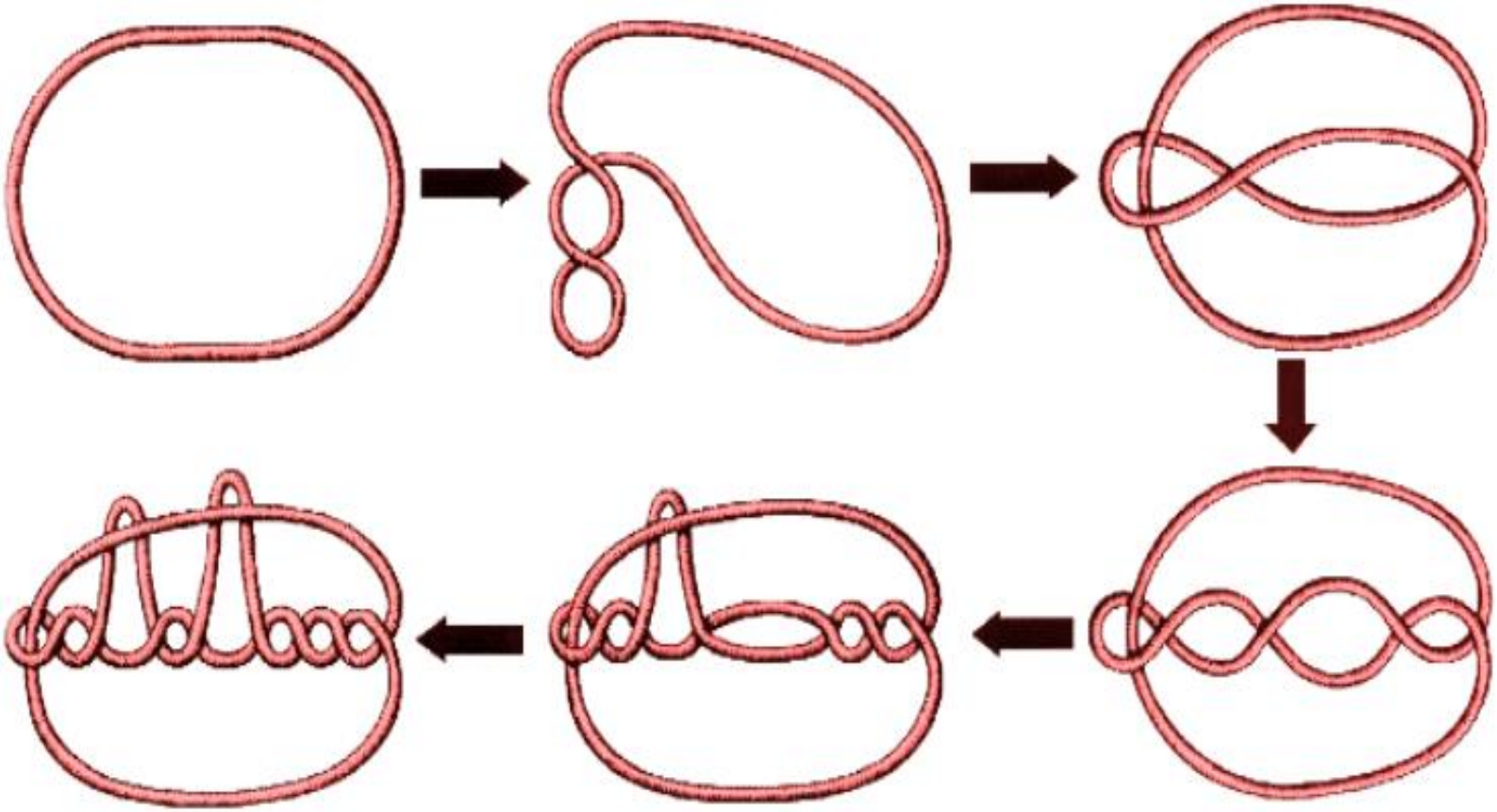
Każdemu splotowi w przestrzeni trójwymiarowej odpowiada wiele diagramów.

Dwa diagramy są równoważne , jeśli od jednego do drugiego można dojść przy pomocy skończonej liczby ruchów elementarnych – ruchów Reidemeistera lub ich odwrotności.

Równoważność węzłów

Dwa węzły są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy ich diagramy są równoważne.



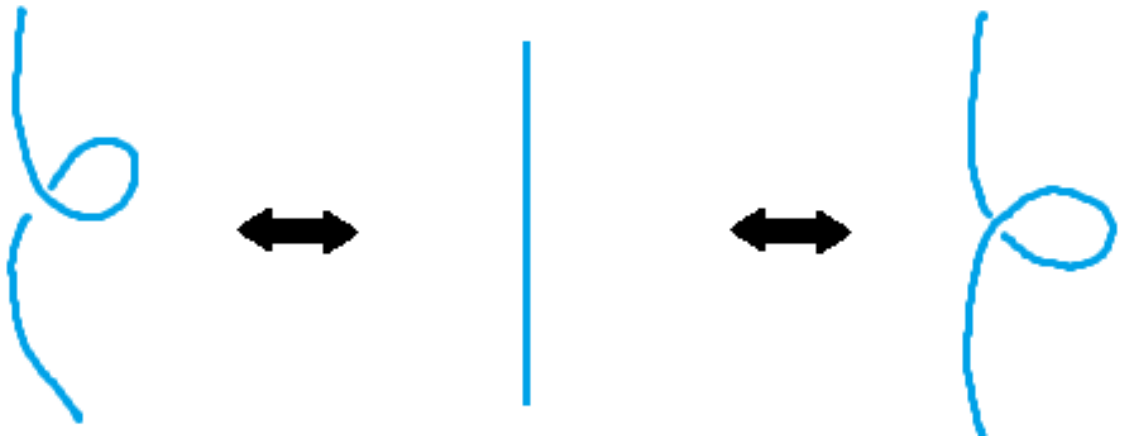


Ruchy Reidemeistera

Elementarne operacje na węzłach, służące do zmiany struktury sytemu skrzyżowań przy zachowaniu typu węzła.

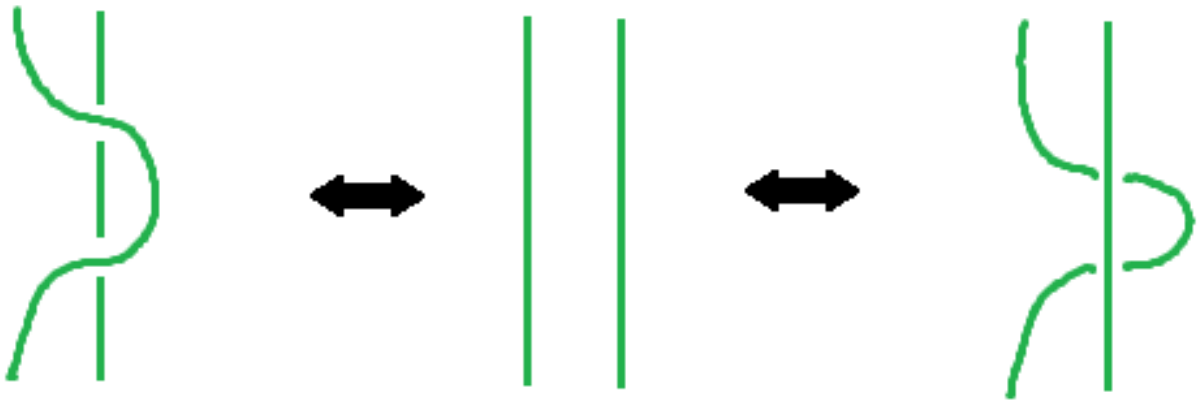
Prościej: operacje służące do sprawdzenia czy dwa sploty są sobie równoważne. Polegają one na utworzeniu bądź likwidowaniu pętelek.

Pierwszy ruch Reidemeistera



Pierwszy ruch Reidemeistera odpowiada za rozplątywanie pętelek (prawych i lewych) w splotach.

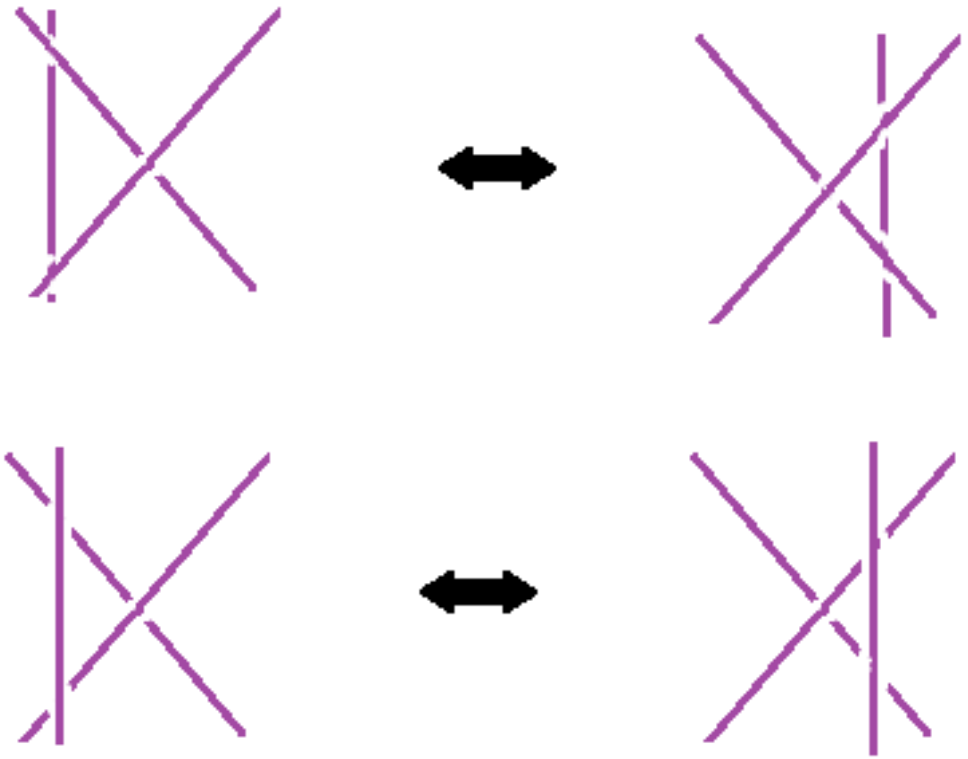
Drugi ruch Reidemeistra



Ten ruch elementarny tworzy lub eliminuje skrzyżowania pod warunkiem, że powstały przez rozciągnięcie jednej z dwóch biegnących obok siebie lin nad lub pod drugą.

Trzeci ruch Reidemeistra

Posiada dwa warianty.



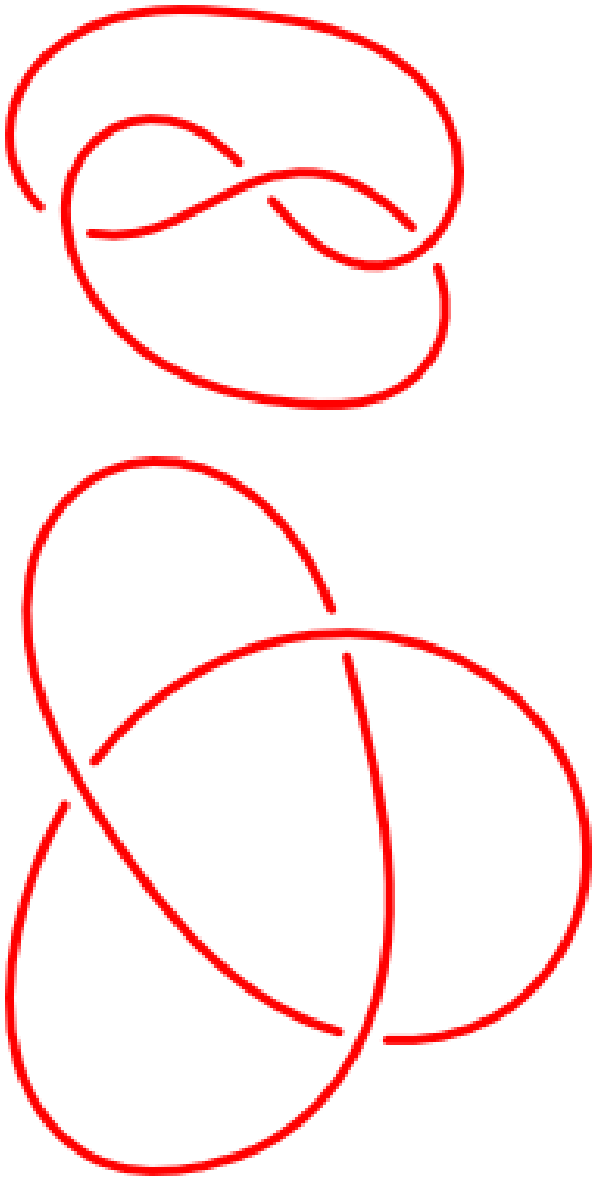
Nie powoduje zmiany ilości skrzyżowań, a tylko zmienia ich konfigurację.

Twierdzenie Reidemeistera

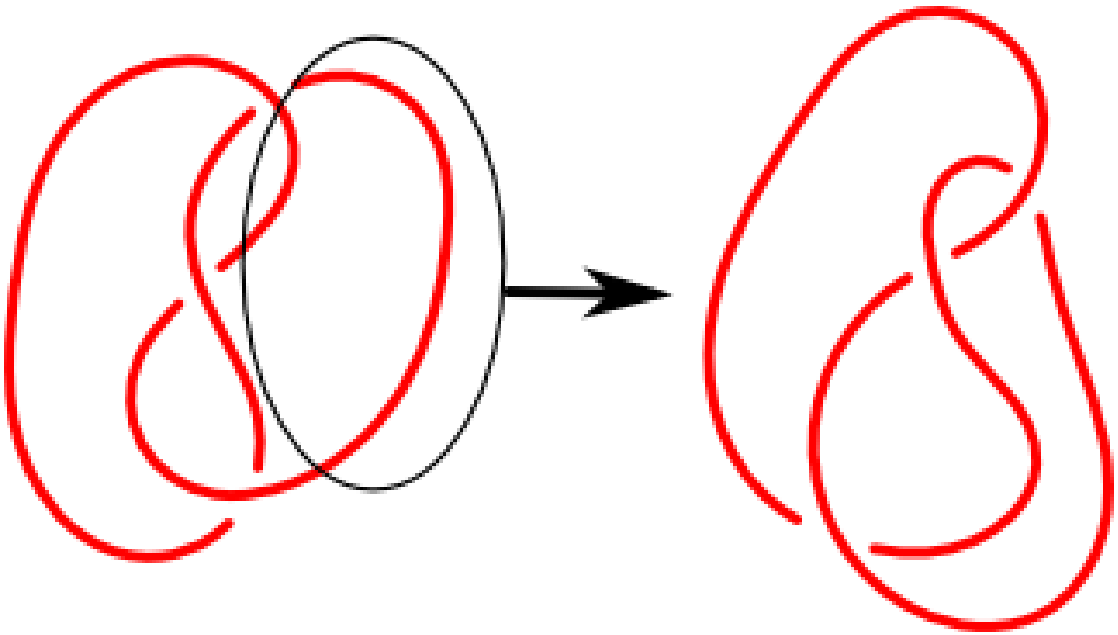
Jeśli D_1 i D_2 są diagramami splotów, które odpowiadają temu samemu splotowi, wówczas istnieje ciąg ruchów Reidemistra oraz izotopii planarnych przekształcających jeden diagram w drugi.

ZABRONIONE jest rozrywanie i sklejanie węzła.

Przykład przekształceń z zastosowaniem ruchów Reidemeistera

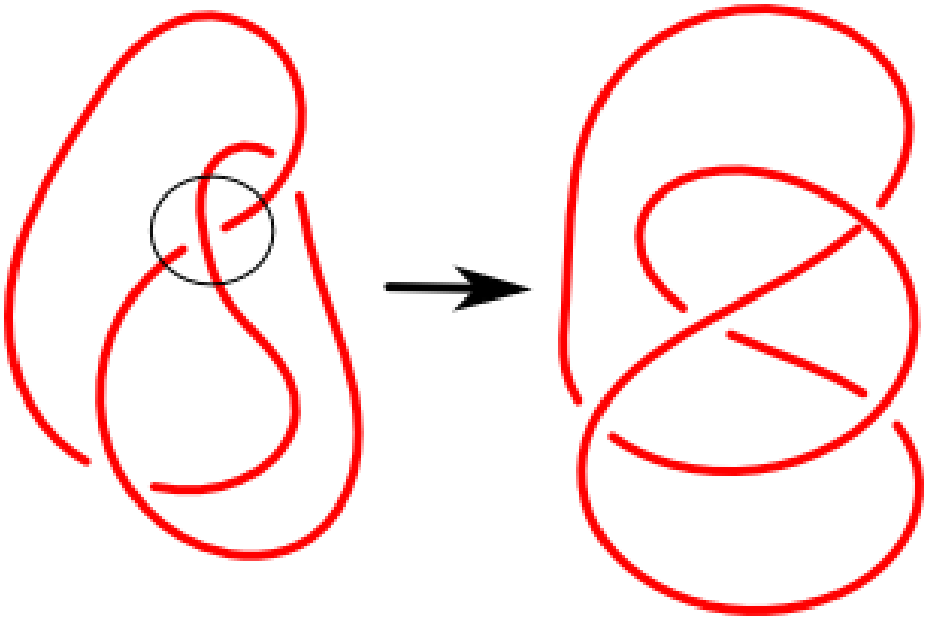


Krok I



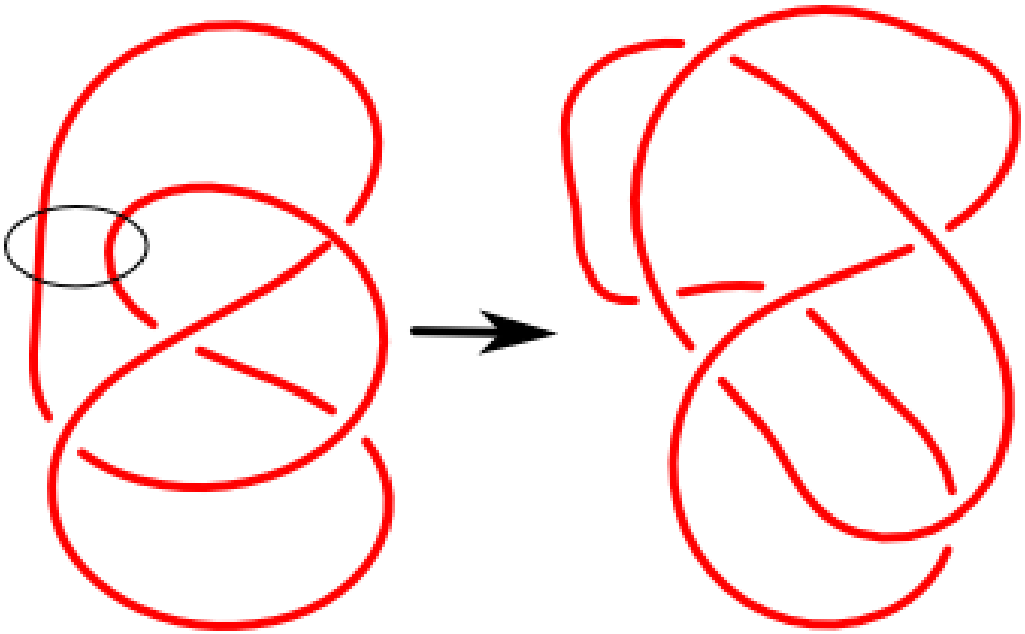
Izotopia planarna

Krok II



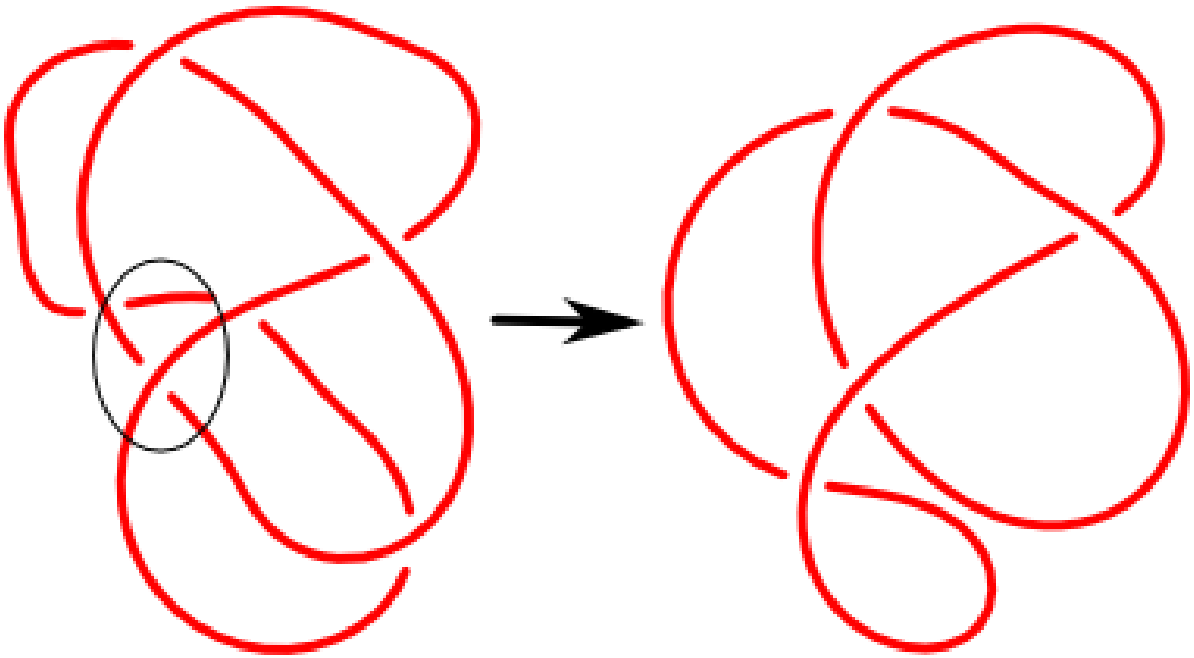
Trzeci ruch Reidemeistera

Krok III



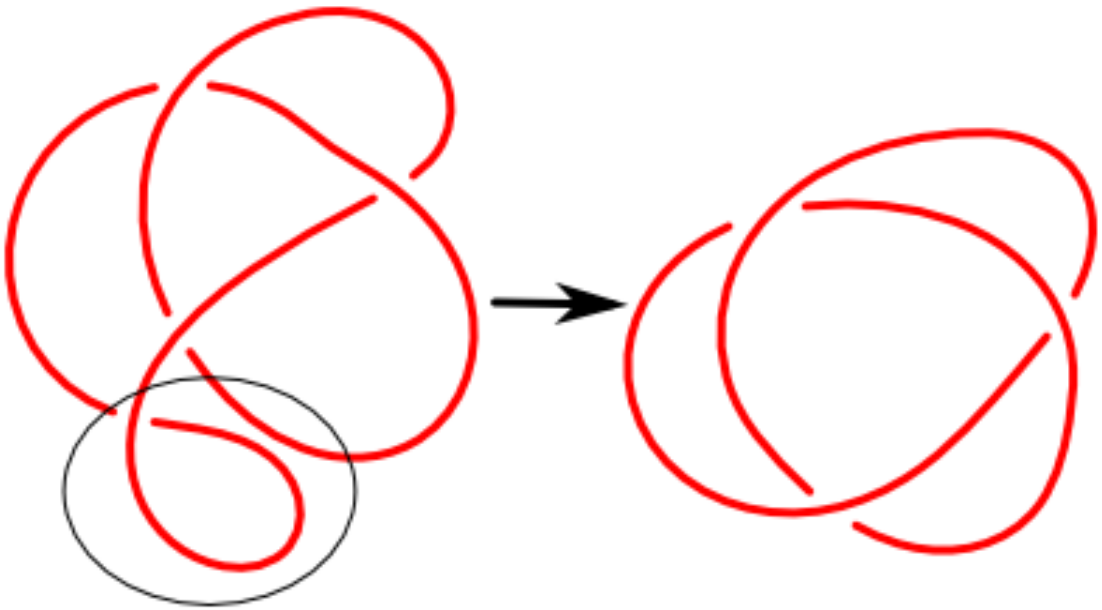
Drugi ruch Reidemeistera

Krok IV



Trzeci ruch Reidemeistera

Krok V

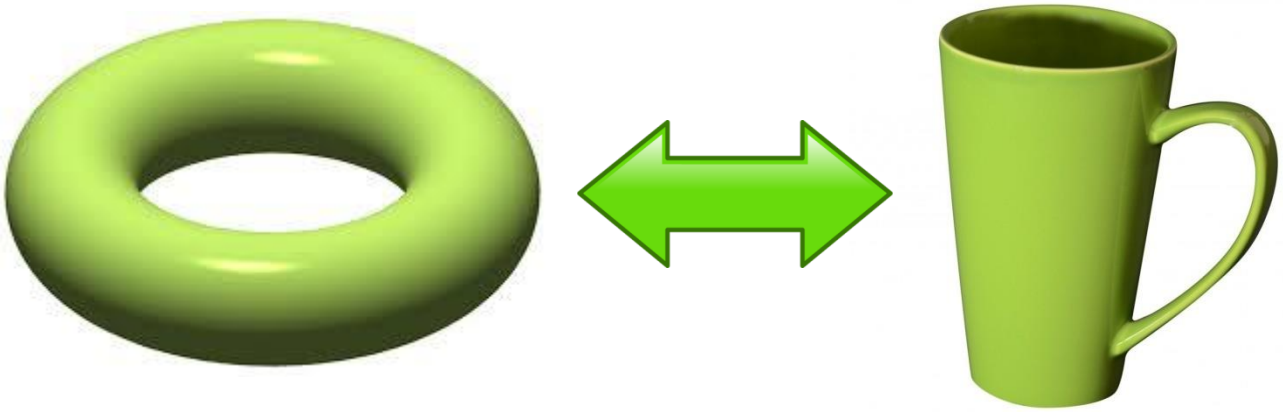


Pierwszy ruch Reidemeistera

Deformacje

Deformacje pozwalające przekształcić jeden obiekt w inny to HOMEOMORFIZMY

Przekształcenie, które dowolnie ściska, rozciąga, wygina lub skręca figurę, nie robi jednak w niej dziur, nie rozrywa jej ani nie skleja jej fragmentów.



Równoważność węzłów

Dwa sploty lub węzły są równoważne, jeśli istnieje homeomorfizm przeprowadzające jeden w drugi:

$$h: S^3 \longrightarrow S^3$$

S – powierzchnia kuli (sfera) z punktem w nieskończoności

To znaczy, że :

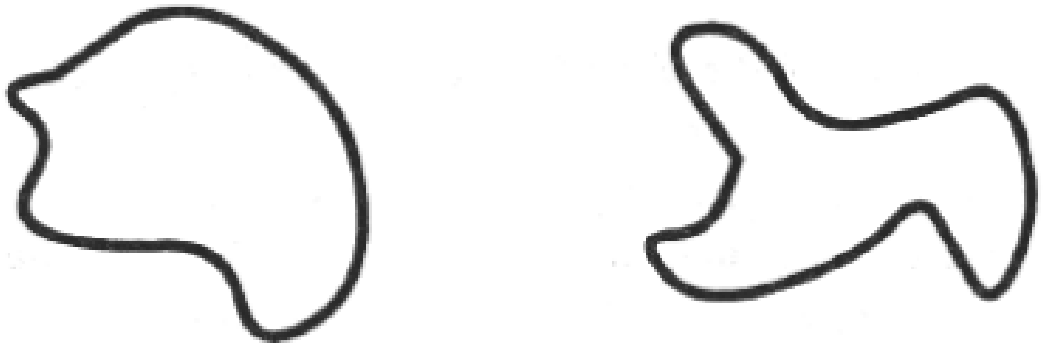
Cała sfera ma przejść na inną sferę homeomorficznie, tak aby jeden z węzłów przeszedł w węzeł drugi.

Dwa węzły nie są równoważne wtedy gdy jeden da się przekształcić w drugi homeomorficznie, ale wtedy gdy to przestrzeń otaczającą jeden węzeł da się przekształcić na przestrzeń otaczającą węzeł drugi.

Twierdzenie

Jeśli dwa węzły – K_1 oraz K_2 leżące w S_3 są równoważne, to ich dopełnienia $S_3 - K_1$ oraz $S_3 - K_2$ są homeomorficzne.

Równoważność węzłów



Powyżej przedstawione diagramy również reprezentują węzły równoważne, jednakże do ich przekształcenia jeden w drugi nie ma konieczności stosowania ruchów Reidemeistera, wystarczą deformacje.

Równoważność splotów

Dwa sploty $L=\{K_1,K_2,\ldots,K_m\}$ oraz $L'=\{K'_1,K'_2,\ldots,K'_n\}$ są równoważne jeśli spełnione są następujące warunki:

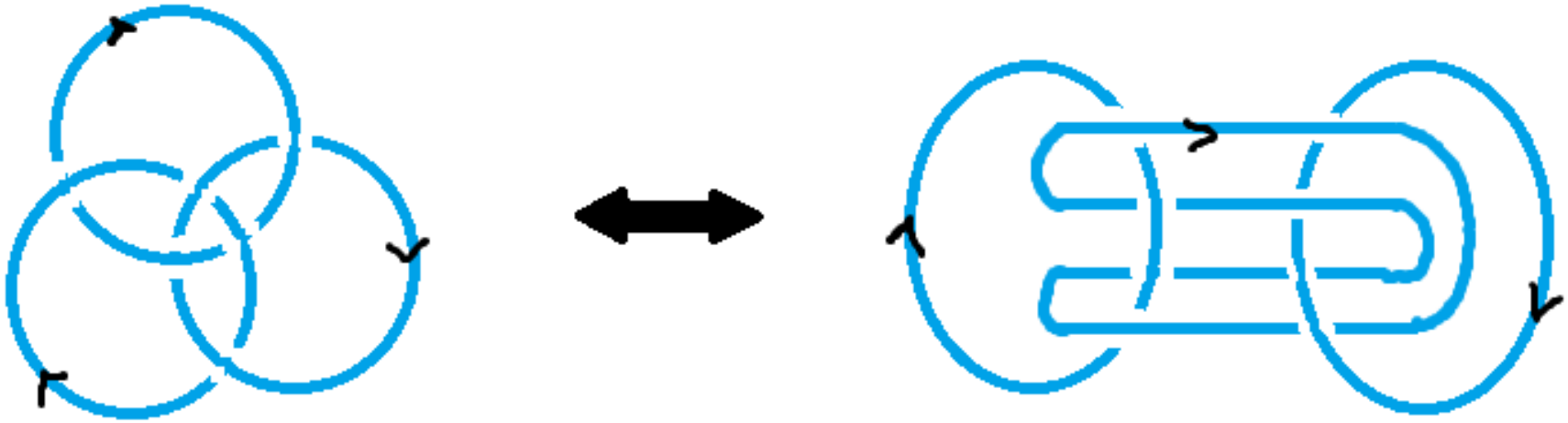
1. m=n, czyli sploty L i L' posiadają taką samą liczbę części składowych czyli ogniw (węzłów)
2. Jest możliwa zamiana splotu L na L' na skutek przeprowadzenia skończonej liczby ruchów elementarnych.

Zamiana: $K_1 \rightarrow K'_1$

Zamiana: $K_m \rightarrow K'_n$ (m=n)

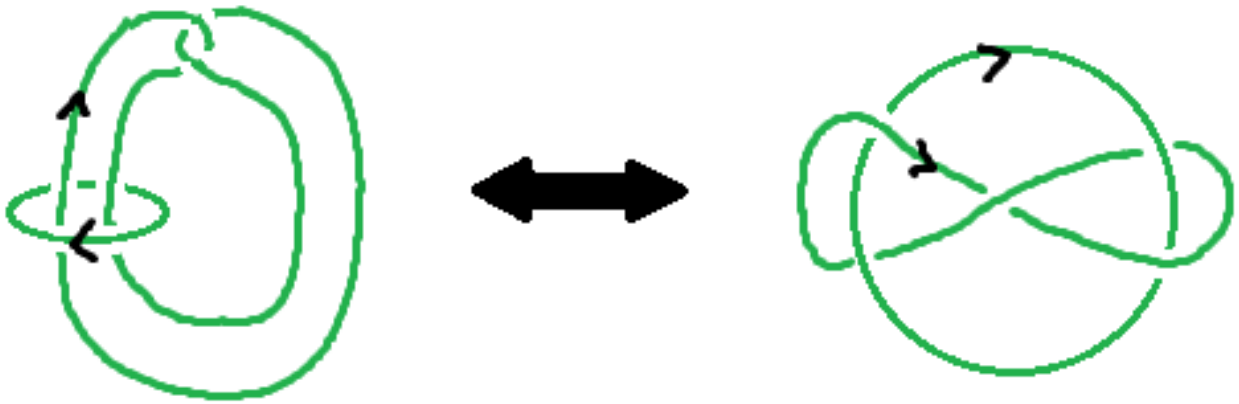
Sploty Równoważne

Splot Boromeusza



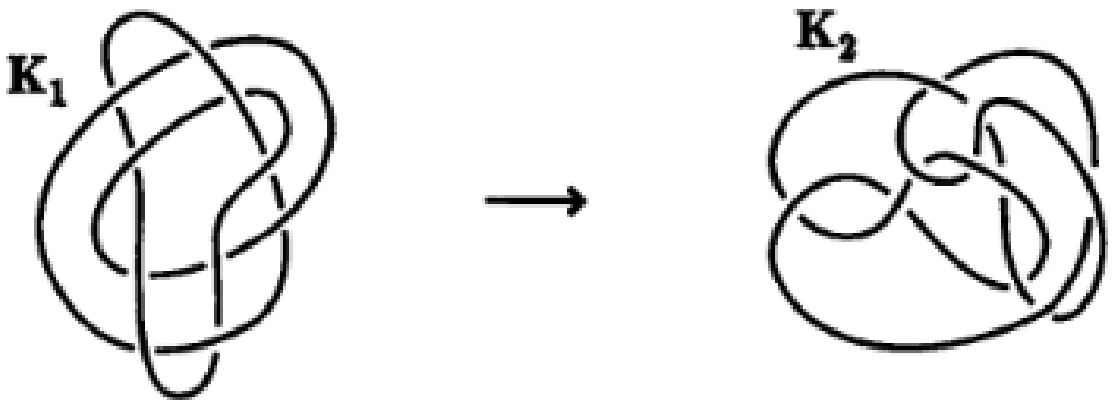
Sploty równoważne

Splot Whitheada

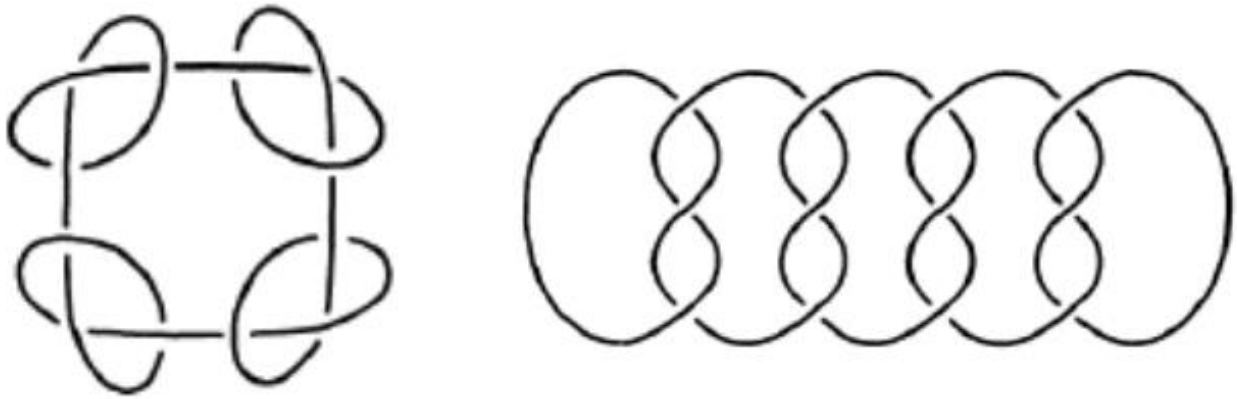


Węzły Perka

W 1970 roku Amerykanin K.Perko udowodnił że przedstawione niżej węzły są równoważne wykonując skończoną liczbę ruchów elementarnych.

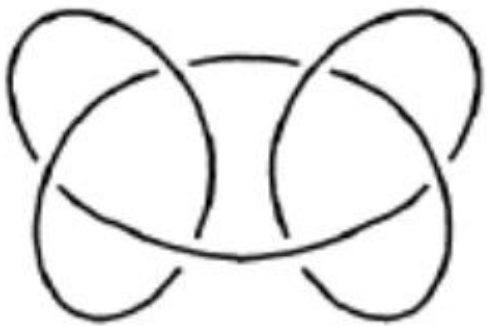


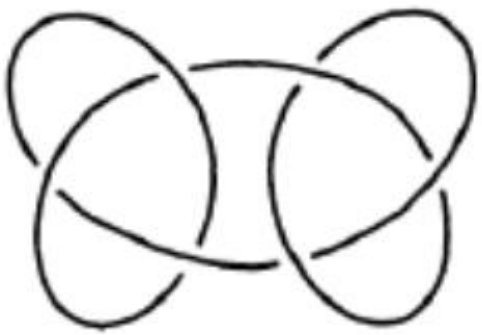
Czy węzły są równoważne ?



Tak

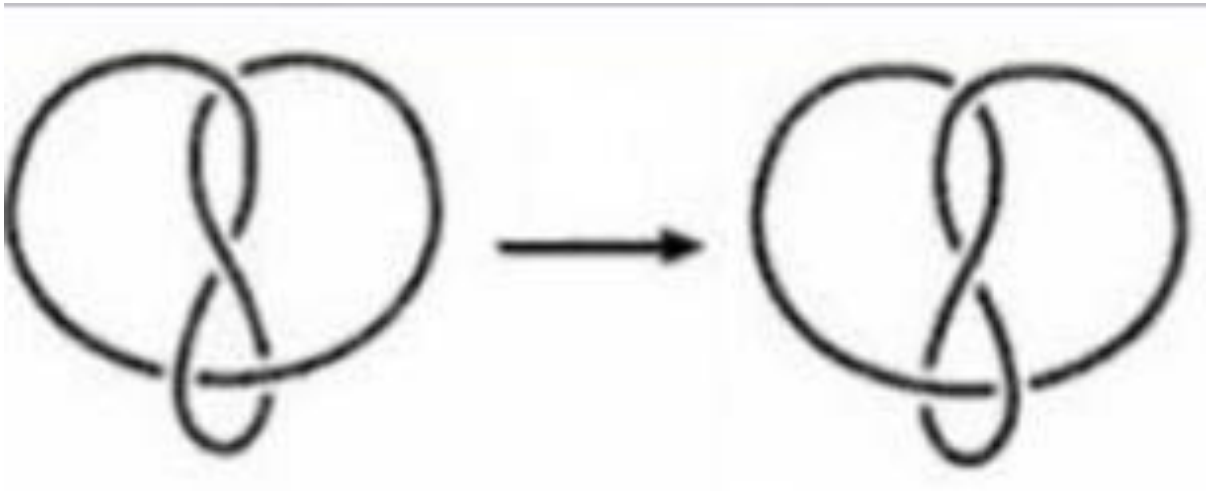
Czy węzły są równoważne ?



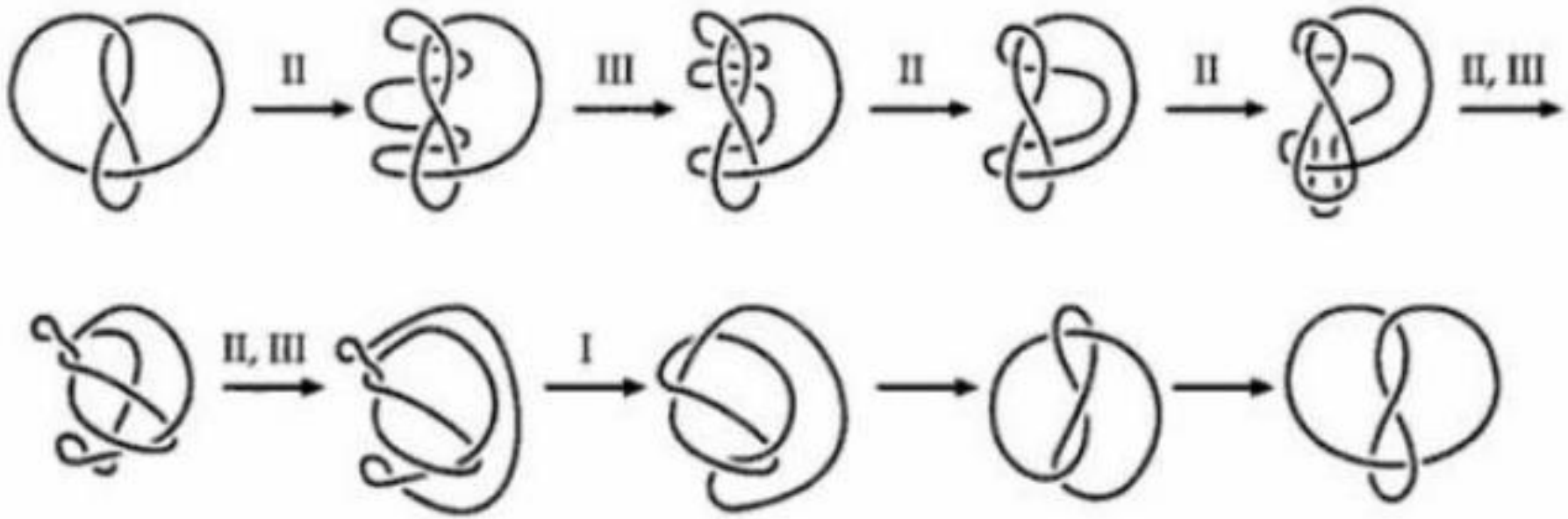


NIE

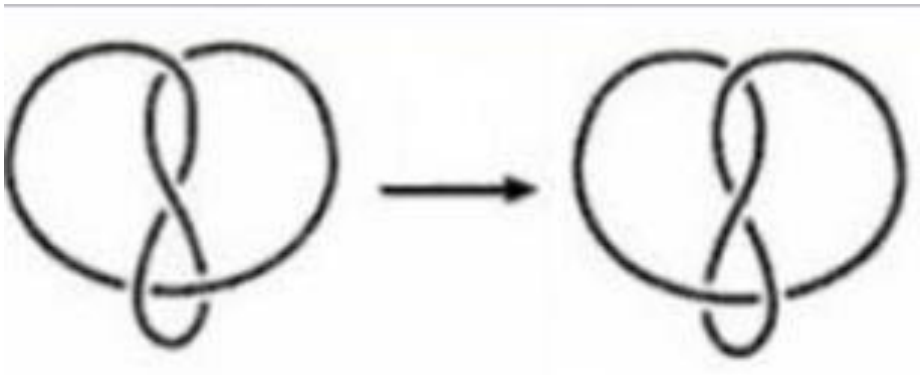
Czy węzły są równoważne ?



Odpowiedź: TAK

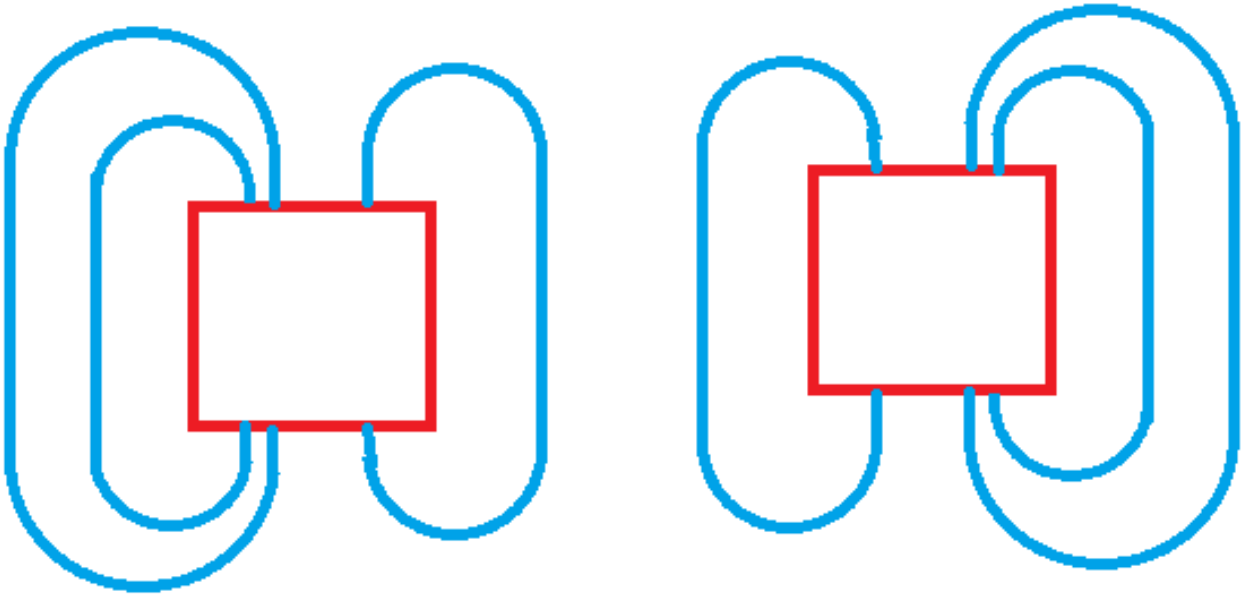


Spostrzeżenie



Jak widać na poprzednim slajdzie aby udowodnić że węzły te są równoważne konieczne było zastosowanie wielu ruchów Reidemeistera. Jest tak w przypadku diagramów na płaszczyźnie.

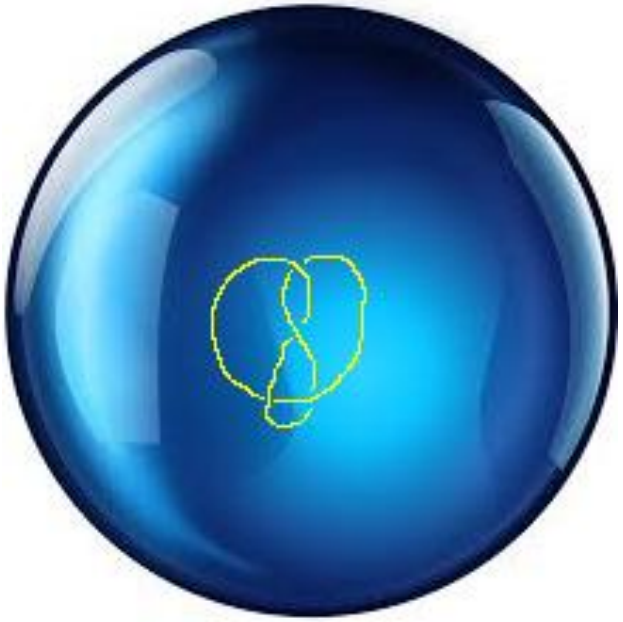
Jeśli te diagramy umieścić na sferze to w ogóle się one nie różnią.



W obu prostokątach może być dowolny fragment jakiegoś diagramu, taki sam dla obu wersji, oba diagramy na sferze będą takie same.

Diagramy na sferze

- Sfera powinna być tak duża, aby umieszczony na niej węzeł był niemal płasko rozłożony
- Stosując izotopie planarną można udowodnić równoważność węzłów na sferze.



DNA i Teoria Węzłów

Na podstawie artkułu:

„DNA and Knot Theory”

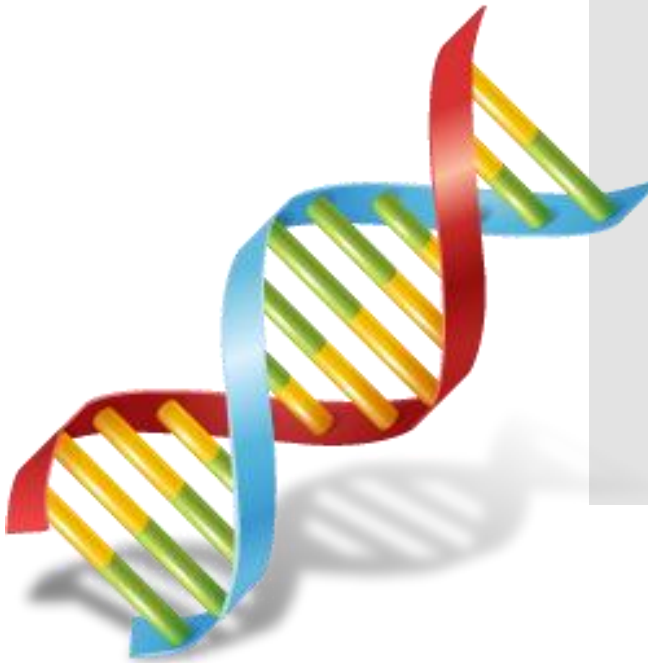
Koya Shimokawa, Mariel Vazquez

Tytułem wstępu: DNA

TOPOLOGIA
dział matematyki zajmujący się badaniem własności figur geometrycznych i brył, które nie ulegają zmianie nawet po radykalnym ciągłym zdeformowaniu tych figur

- Ma strukturę podwójnej helisy;
- Struktura DNA odkryta została przez Watson'a i Crick'a w 1953 roku;
- Oś helisy postrzegana może być jako ciąg w przestrzeni trójwymiarowej, dzięki czemu można badać jej topologię;
- Koliste cząsteczki DNA mogą być połączone i poplątane.

TOPOLOGIA DNA – badanie geometrycznych i topologicznych własności kolistego DNA.



Węzły, sploty

- Węzeł – homeomorficzny obraz okręgu w przestrzeni. Dowolna krzywa zanurzona w przestrzeni trójwymiarowej.
- Węzły trywialne – najprostsza klasa splotów. Węzeł trywialny może być rozplątany w skończonej liczbie kroków (pionowych i poziomych obrotów).

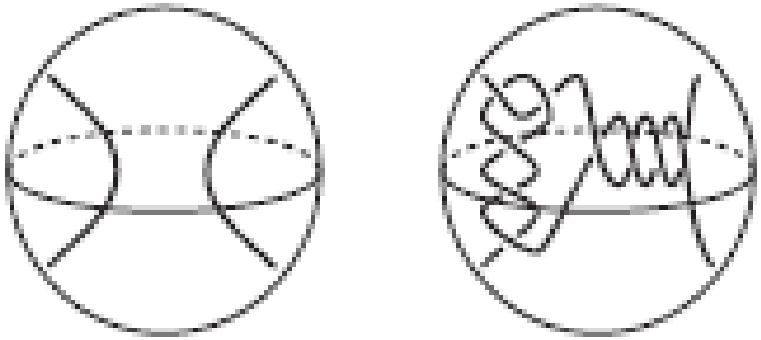


図 1 : Rational tangles.

Węzły, sploty

- Numerator N(T) splotu T jest połączeniem dwóch górnych punktów końcowych splotu T z łukiem i dwóch dolnych punktów końcowych splotu T z innym łukiem (rysunek po lewej).
- Z dwóch splotów S i T, nowy splot można uzyskać łącząc dwa wschodnie punkty splotu S z dwoma zachodnimi punktami końcowymi splotu T (rysunek po prawej) Otrzymany splot jest nazywany sumą S i T i oznaczony przez S+T.

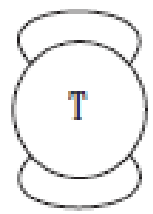


図 2 : The numerator $N(T)$

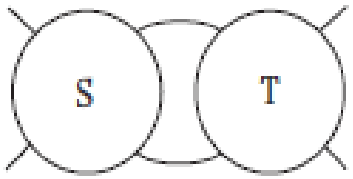


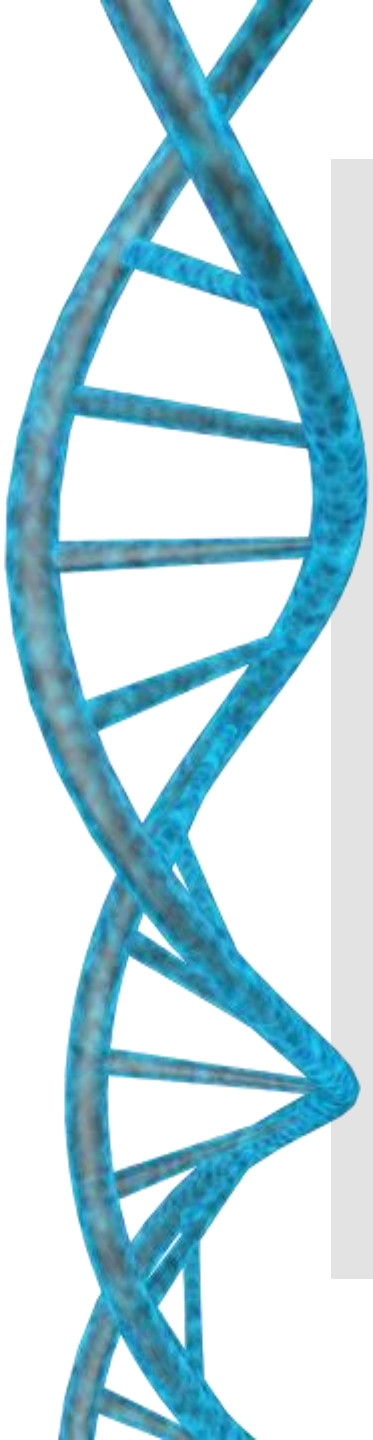
図 3 : The tangle sum $S+T$

Genomy, plazmidy

- Koliste genomy i naturalnie występujące plazmidy są przedmiotem supełkowania i wiązania.
- Te koliste formy DNA są częste u prokariotów (np. genom bakterii Escherichia coli).
- Węzły DNA i sploty mogą być eksperymentalnie wykrywane przy użyciu elektroforezy żelowej albo mikroskopu elektronowego.

Miejscowo-specyficzna rekombinaza DNA

- To enzymy zdolne do zmiany topologii DNA.
- Enzymy te wiążą dwa specyficzne miejsca DNA, wprowadzając jedną dwu niciową przerwę po każdej stronie, rekombinują wolne końce i szczelnie je zamykają.
- Ich komórkowa rola to zmiana kodu genetycznego organizmu przez połączenie lub wycięcie segmentu DNA przenosząc fragment DNA do nowego położenia przez odwrócenie segmentu DNA w genomie, lub przez zmianę jej topologicznej formy.



Metoda splotów

- Została wprowadzona przez Ernesta i Sumnersa;
- Jest używana do scharakteryzowania topologicznego działania kilku miejscowo specyficznych rekombinaz;
- W metodzie splotów, enzymy i węzeł DNA można modelować jako splot E. Splot O_f jest zewnętrzną częścią E i zawiera DNA niezwiązane z enzymem.

Założenia metody splotów

1. Mechanizm enzymu jest stały i niezależny od topologii substratu. Działanie pojawia się w dwuniciowym splocie E, który jest suma dwóch splotów O_b I P. Sploty O_b I O_f pozostają niezmienione podczas reakcji rekombinacji.
2. Rekombinacja jest modelowana przez chirurgię splotów, gdzie splot P zmienia się w splot R. P może być uznany za trywialny. Czasami R może okazać się trywialny. W innych przypadkach R może być uznane za trywialne ze względów biologicznych.

$$\begin{cases} N(O_f + O_b + P) = N(O + P) = K_0 \\ N(O_f + O_b + R) = N(O + R) = K_1 \end{cases} \tag{1}$$

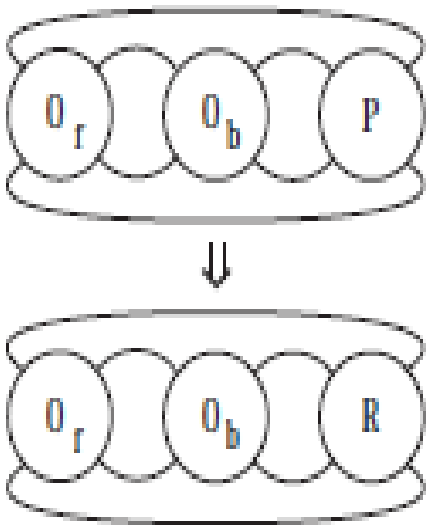


図 4 : Tangle model of recombination

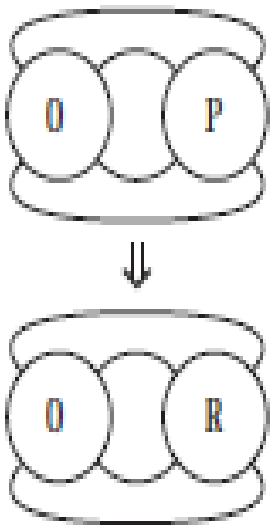


図 5 : Tangle model of recombination II

Zastosowania

- Ernest i Sumners scharakteryzowali działanie resolwatazy Tn3.
- Działanie resolwatazy DNA Tn3 na DNA jest progresywne to znaczy enzym może pośredniczyć w więcej niż jednym obrocie rekombinacji.
- W procesie rekombinacji każdy obrót rekombinacji dodaje kopię rekombinowanego splotu R do nici DNA. Równanie n-tego obrotu:

$$N(O_f + O_b + nR) = N(O + nR) = K_n$$

Topoizomerazy typu II

- Enzymy niezbędne w każdym żywym organizmie.
- Odgrywają one kluczową rolę w istotnych procesach komórkowych, takich jak replikacja DNA.
- Enzym ten wiąże segment DNA, wprowadza dwuniciowe przerwy, transportuje drugi segment przez przerwę i ponownie zamyka przejściową przerwę.
- Enzymy te efektywnie rozplątywały nawet bardzo skomplikowane węzły DNA (z dużą liczbą skrzyżowań).

Literatura:

- „Poszukiwanie węzłów idealnych i ich własności" Rozprawa doktorska Sylwester Przybył
- „Od węzłów do warkoczy: pierwszy krok" Paweł Traczyk
- „Arytmetyka supełków" Agnieszka Janiak-Osja, Zdzisław Pogoda
- http://pfm.wmi.amu.edu.pl/index.php/zdjecia/item/9-krotki-wstep-do-teorii-wezlow
- „Rozstrzygalnośc problemu rozpoznawania węzła trywialnego" Praca licencjacka Szczepan Hummel
- „DNA and Knot Theory" Koya Shimokawa, Mariel Vazquez

Dziękuję za uwagę

Anna Spytek

10B2