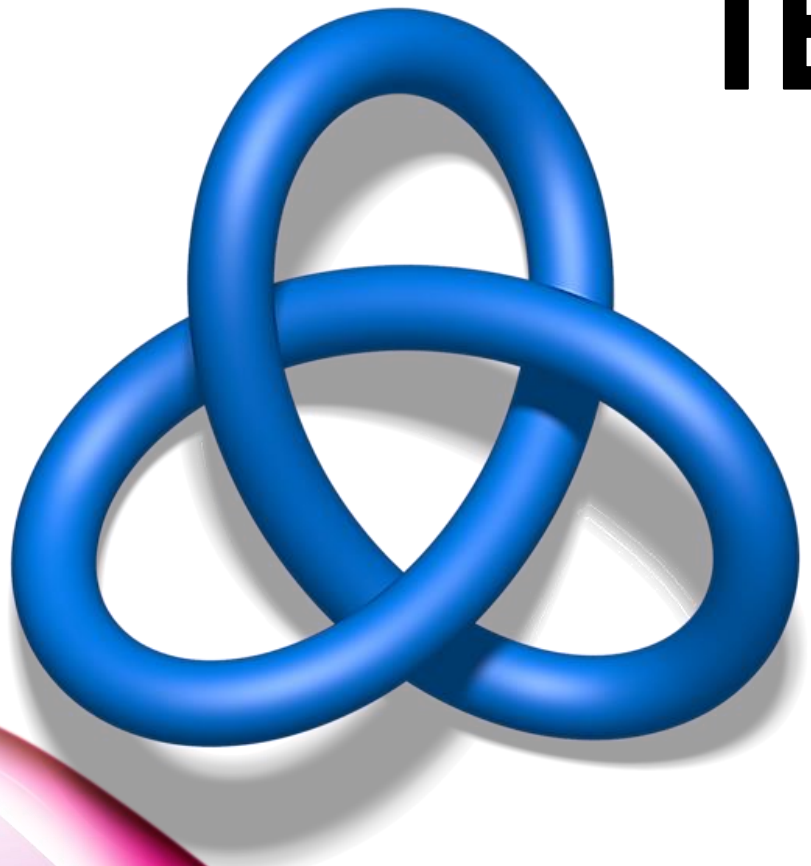


TEORIA WĘZŁÓW

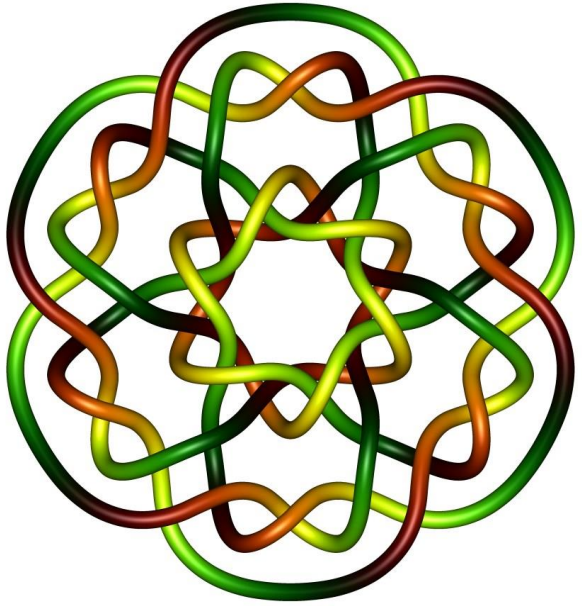
Kodowanie węzłów
Warkocze
Twierdzenie Aleksandra

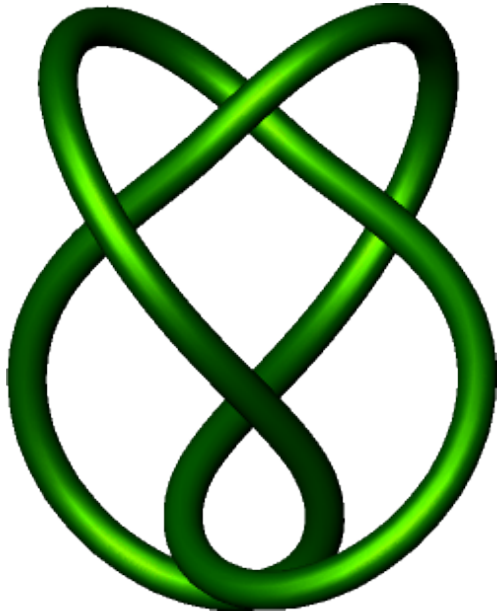
Dominika Stelmach gr. 10B2

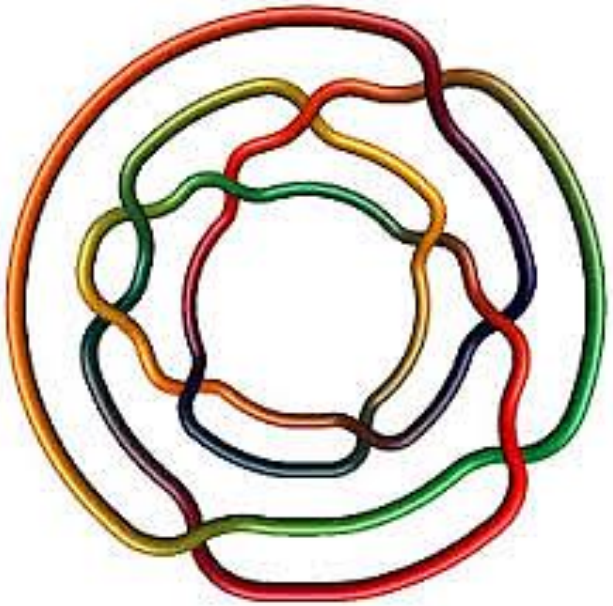
WPROWADZENIE

Teoria węzłów jest rzadkim przykładem dziedziny matematycznej, która współcześnie jest bardzo modna i intensywnie rozwijana.

Charakteryzuje się tym, że jej podstawowe pojęcia są dostępne codziennemu doświadczeniu każdego z nas







DEFINICJA WĘZŁA

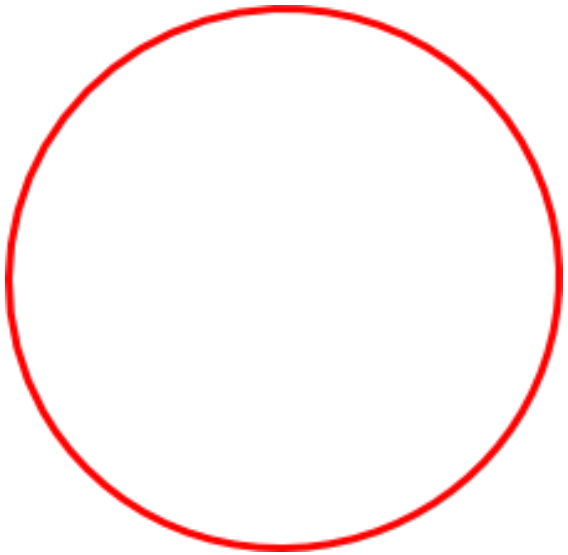
W matematyce węzeł to:

- krzywa zamknięta zanurzona w $\mathbf{R}^3$
- krzywa w przestrzeni trójwymiarowej, która jest **homeomorficzna** z okręgiem

DEFINICJA SPLOTU

Jest to suma skończonej ilosci wezłów wzajemnie rozłącznych, zwanych ***składowymi splotu***, które mogą być zasupłane i splecione ze sobą.
Wezeł jest splotem o jednej składowej.

PRZYKŁADY WĘZŁOW

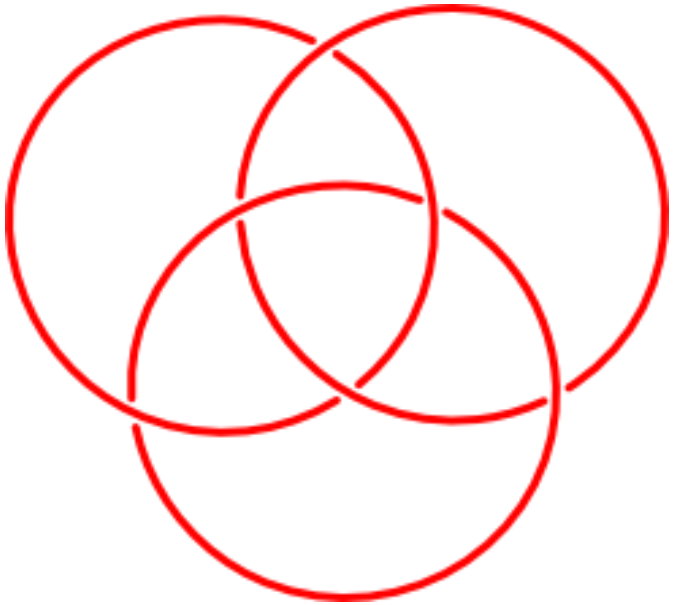


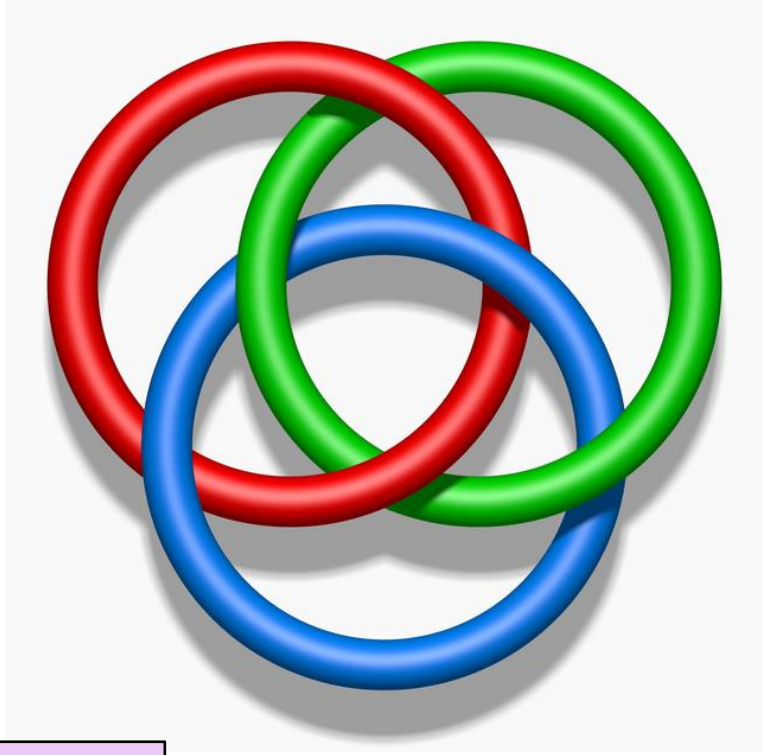
Węzeł trywialny

Trójlistnik lewy

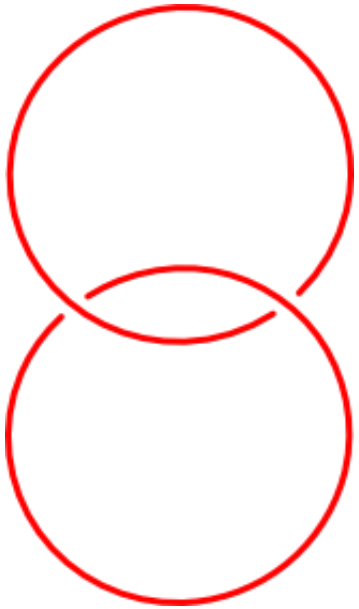
Trójlistnik prawy

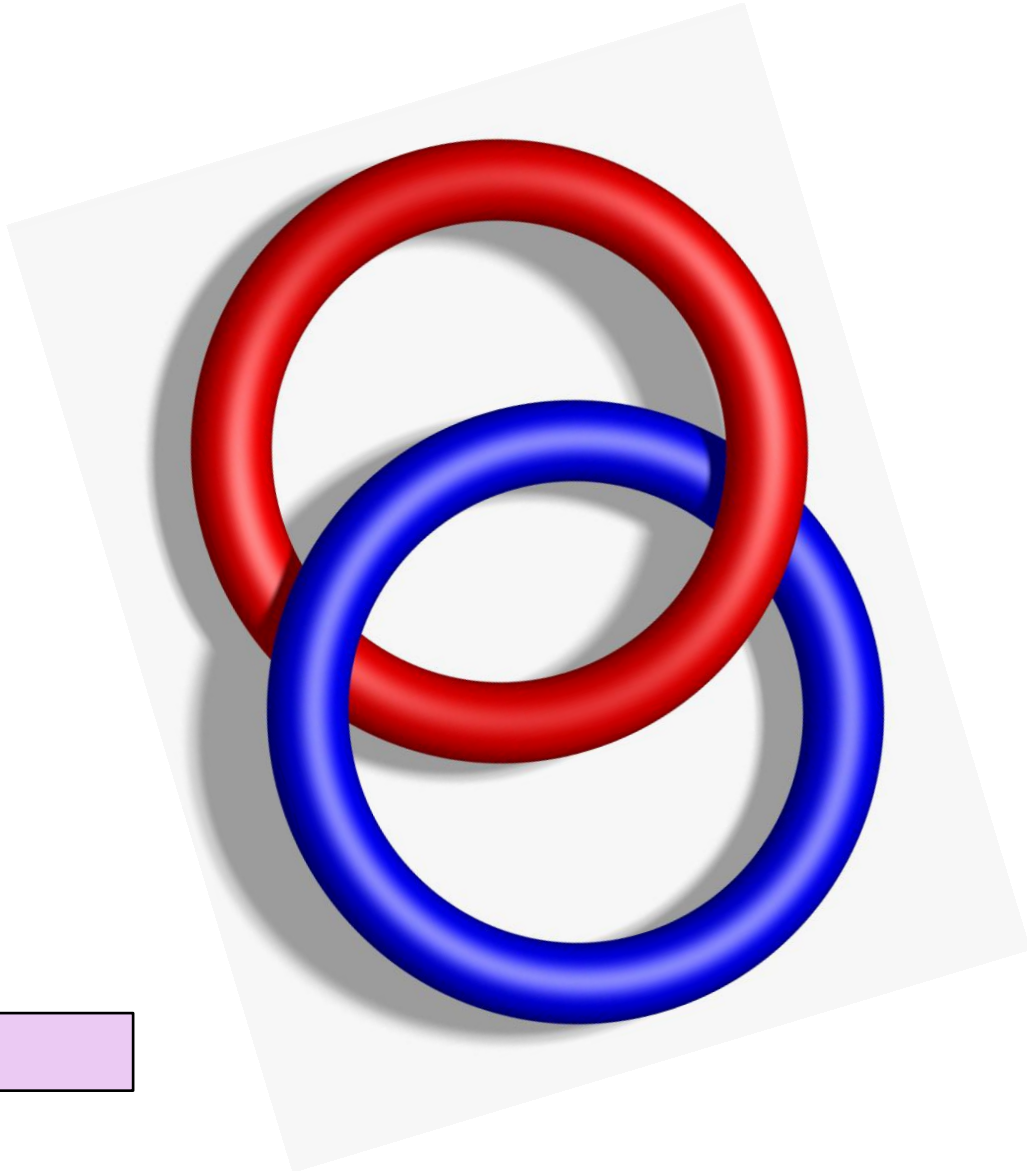
PRZYKŁADY WĘZŁÓW





Węzeł boromejski



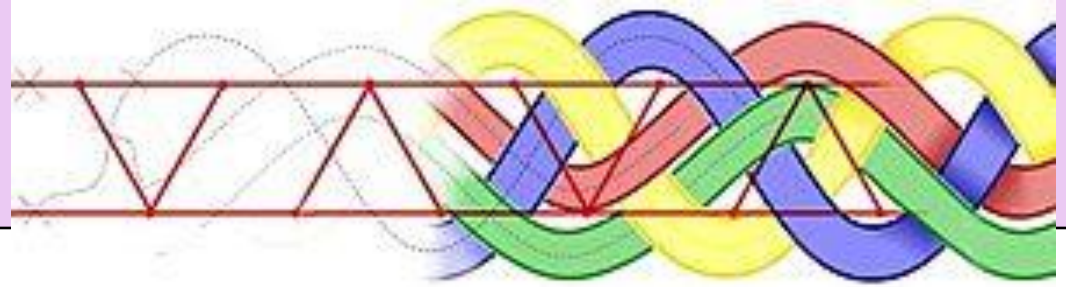


Splot Hopfa

TEORIA WARKOCZY

- Jest to dział topologii zainspirowany geometryczną konstrukcją warkoczy zapoczątkowany przez **Emila Artina**

- Teoria warkoczy znajduje zastosowanie między innymi w kryptografii



1925 r.

KILKA SŁÓW O PERMUTACJACH…

Definicja matematyczna:

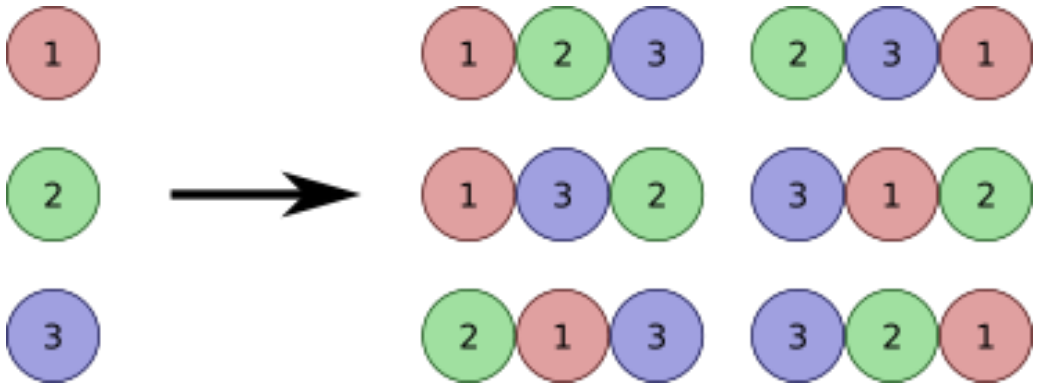
Permutacją zbioru *n*-elementowego nazywamy każdy *n*-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Permutacja spełnia następujące warunki:

- każda permutacja obejmuje wszystkie dane elementy
- istotna jest tylko **kolejność** elementów permutacji

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 2 \end{array}$$

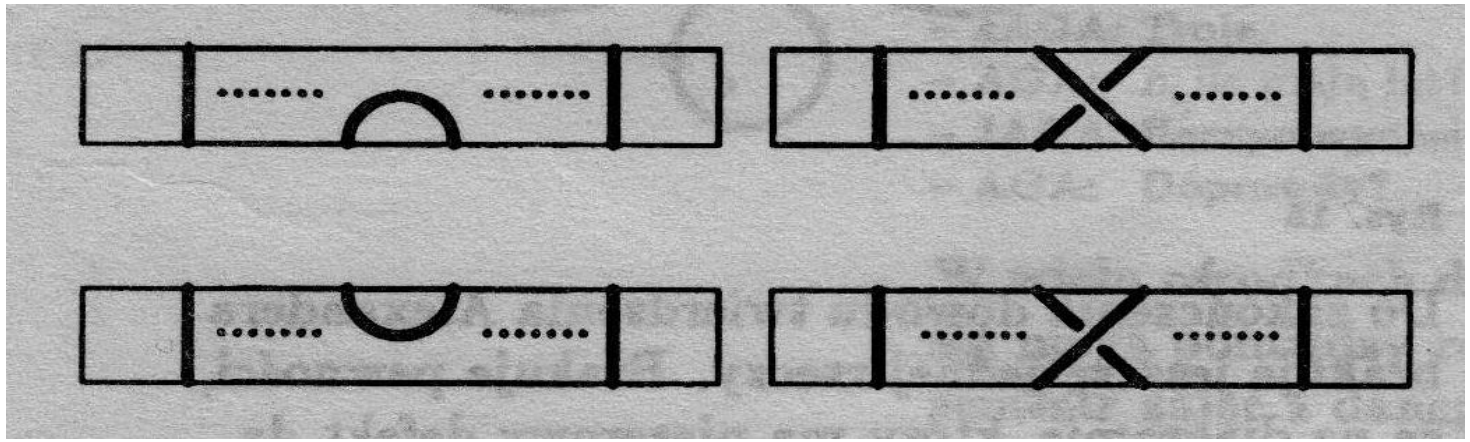
$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 0 \end{array}$$



Przykład permutacji zbioru S3 (S!=6)

DEFINICJA WARKOCZA

Jest to **diagram** powstający przez składanie pasków podanych poniżej i tylko takich (odpowiednie kody δ i δ^{-1})



ZROZUMIENIE DEFINICJI…

- Rysunek przedstawia pewien diagram pocięty na poziome paski
- Zawartość każdego paska jest bardzo prosta – wystepują tylko **4 typy** pasków

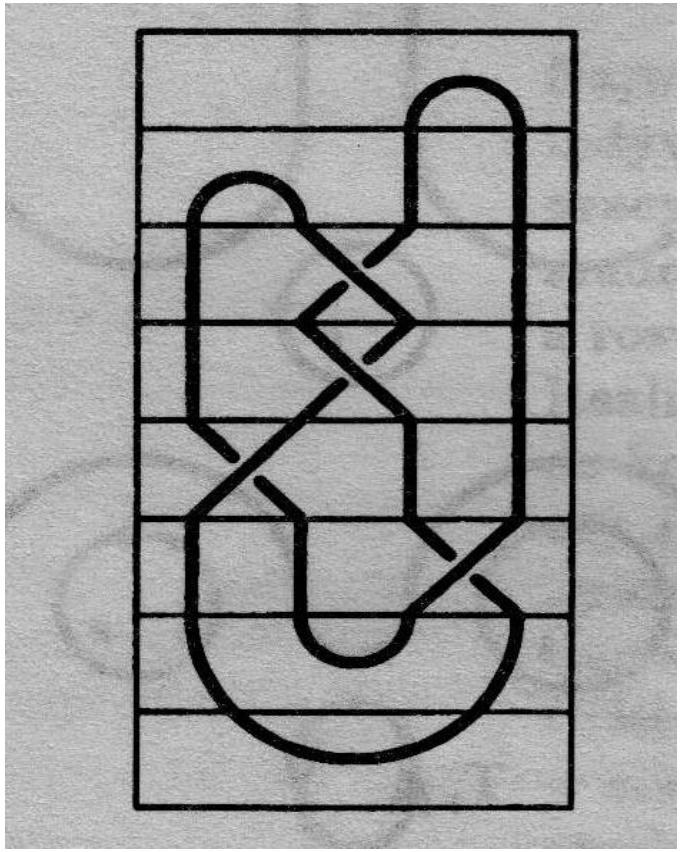
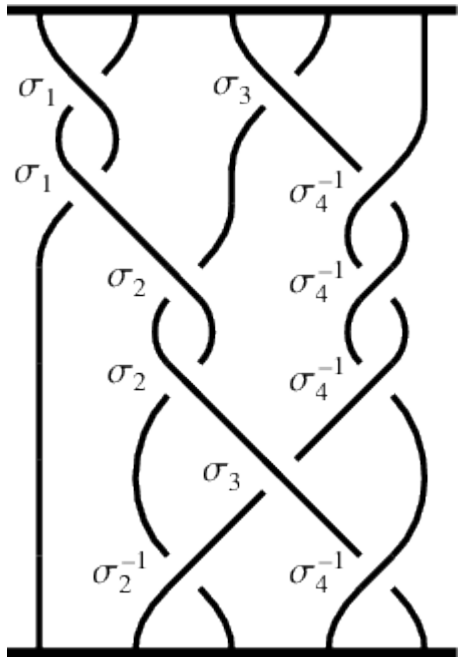


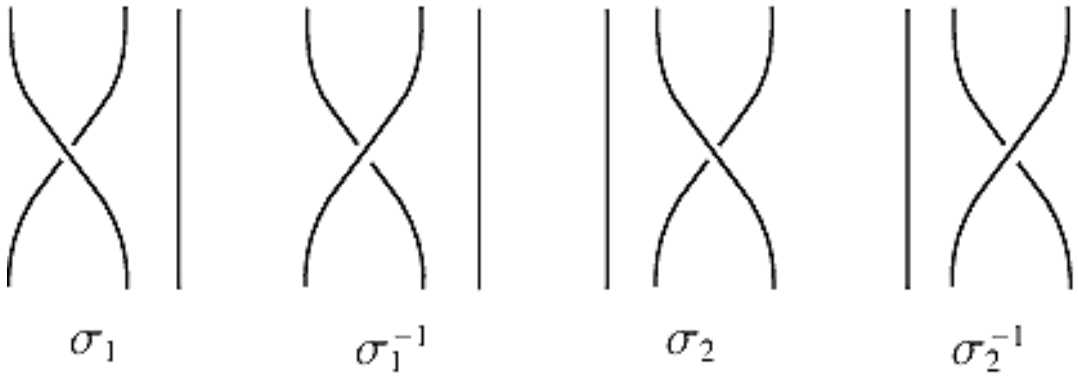
Diagram z rysunku ma kod:

$$\cap_3 \cap_1 \delta_2 \delta_2 \delta_1^{-1} \delta_3^{-1} \cup_2 \cup_1$$

Przy pomocy ewentualnych deformacji, tak aby dwa skrzyżowania nie występowały na jednym poziomie, możemy zawsze dokonać podziału na poziome paski.

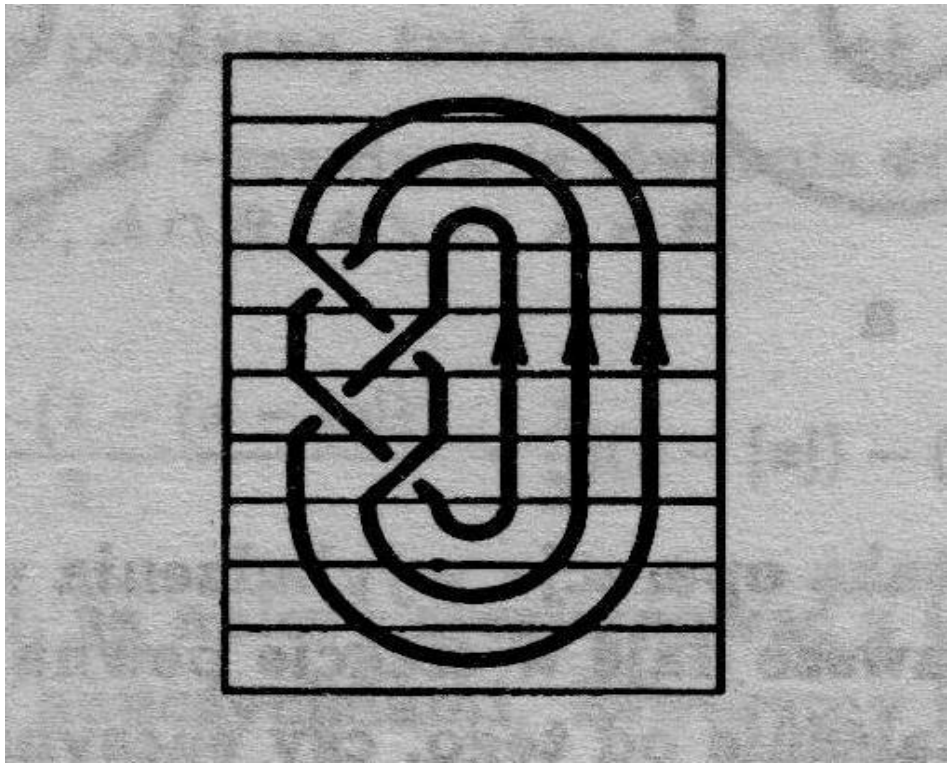
Takie przedstawienie diagramu w postaci określonej liczby elementarnych cegiełek pozwala **zakodować** diagram





Przykład kodowania węzła

W tym przypadku mamy do czynienia z jednym wielokrotnym generatorem typu ∩ na górze i jednym wielokrotnym generatorem typu U na dole.



Ważna jest **orientacja** – strzałki zaznaczone na pasmach diagramu. Taki szczególny zorientowany diagram nazywany jest **domkniętym warkoczem**

Przykład kodowania węzła

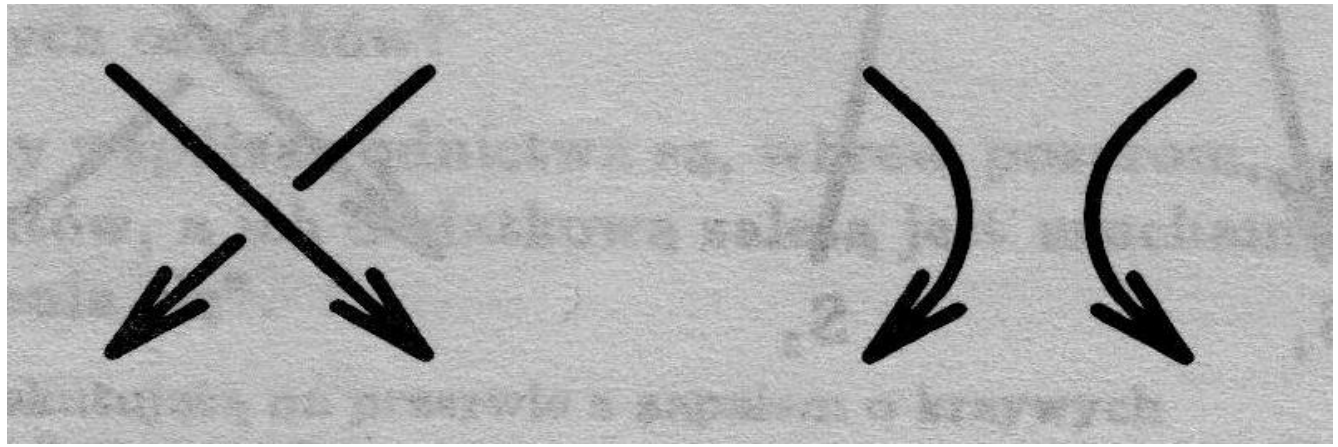
DOMKNIĘTY WARKOCZ - WARUNKI

Domkniętym warkoczem nazywamy taki diagram, który daje się zdeformować do diagramu opisanego poniżej:

- Generatory typu ∩ występują tylko na początku, natomiast generatory typu U tylko na dole
- Występuje jeden wielokrotny generator na górze oraz jeden wielokrotny generator na dole
- Wystepuje orientacja (strzałki)

TWIERDZENIE ALEKSANDRA

Każdy zorientowany węzeł można przedstawić w postaci domkniętego warkocza

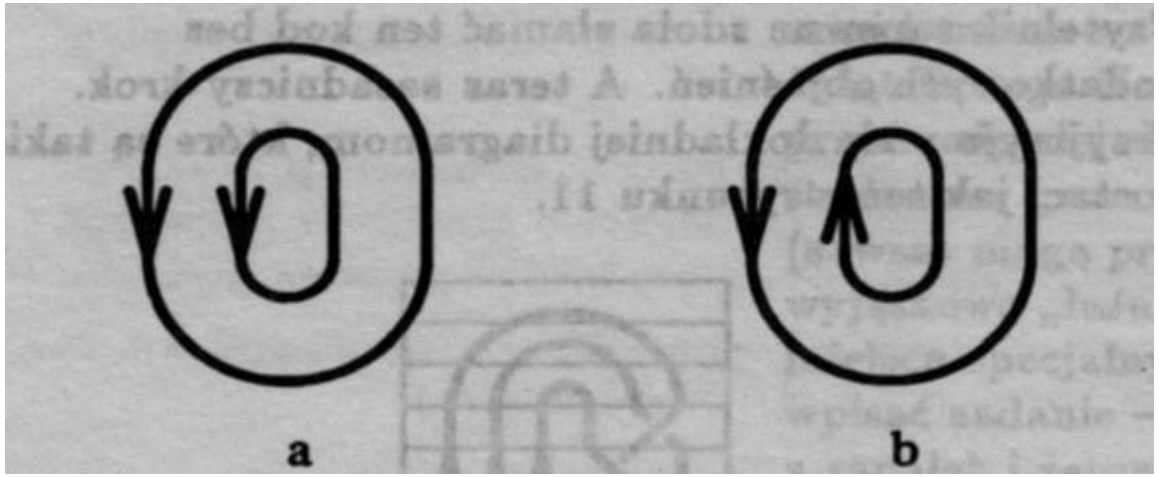


Twierdzenie Aleksandra mówi o tym, że wszystko da się przedstawić w postaci bardzo szczególnych, regularnych diagramów

Domkniętym warkoczem będziemy nazywać taki diagram, który daje się zdeformować do domkniętego warkocza według pierwotnej definicji

Pytanie:
Czy da się to stwierdzić na pierwszy rzut oka??

Odpowiedź:
Okazuje się, że **tak**. Wystarczy wygładzić wszystkie skrzyżowania diagramie zobaczyć co wyszło



Jeśli wyszła pewna liczba okręgów rozcinających sferę (nie płaszczyznę!) na dwa koła i pewną liczbę pierścieni o zgodnie zorientowanych składowych (tak jak na rysunku **a**, a nie na rysunku **b**), to znaczy, że mieliśmy do czynienia z **domkniętym warkoczem**

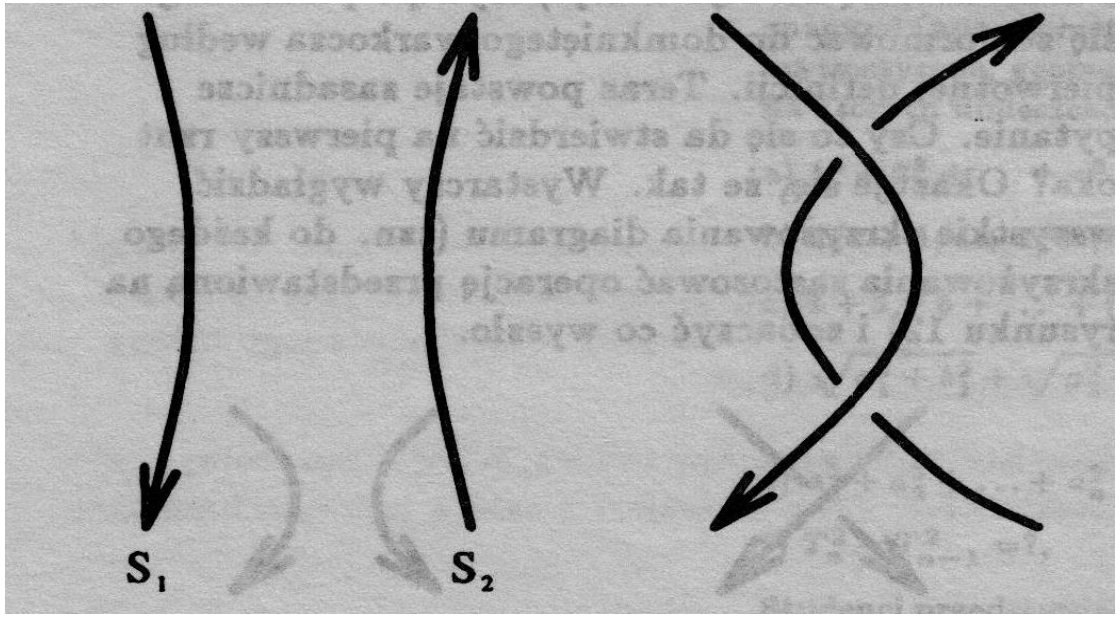
Dodatkowo:

Operacja wygładzenia wszystkich skrzyżowań zawsze daje w efekcie pewną liczbe okręgów, niezależnie od tego czy zaczynaliśmy od domkniętego warkocza, czy nie.

Te okręgi nazywane są **okręgami Seiferta**. Zachowują one orientację zgodnie z wyjściową orientacją rozpatrywanego diagramu

Aby udowodnić twierdzenie Aleksandra wystarczy wskazać jakiś sposób zmniejszania defektu bez zmiany typu węzła. Istnieje na to bardzo prosta metoda podana przez **P. Vogela** w 1989 roku.

Polega ona na tym, aby wykonać **ruch Reidemeistra typu II**, ale nie dowolny, lecz taki, który **operuje na dwóch różnych okręgach Seiferta**, niezgodnie zorientowanych



Drugi ruch Reidemeistra

Taka operacja zawsze zmniejsza defekt. Co więcej wiadomo o ile: **zawsze dokładnie o jeden.**

Pytanie:

Dlaczego tak się dzieje??

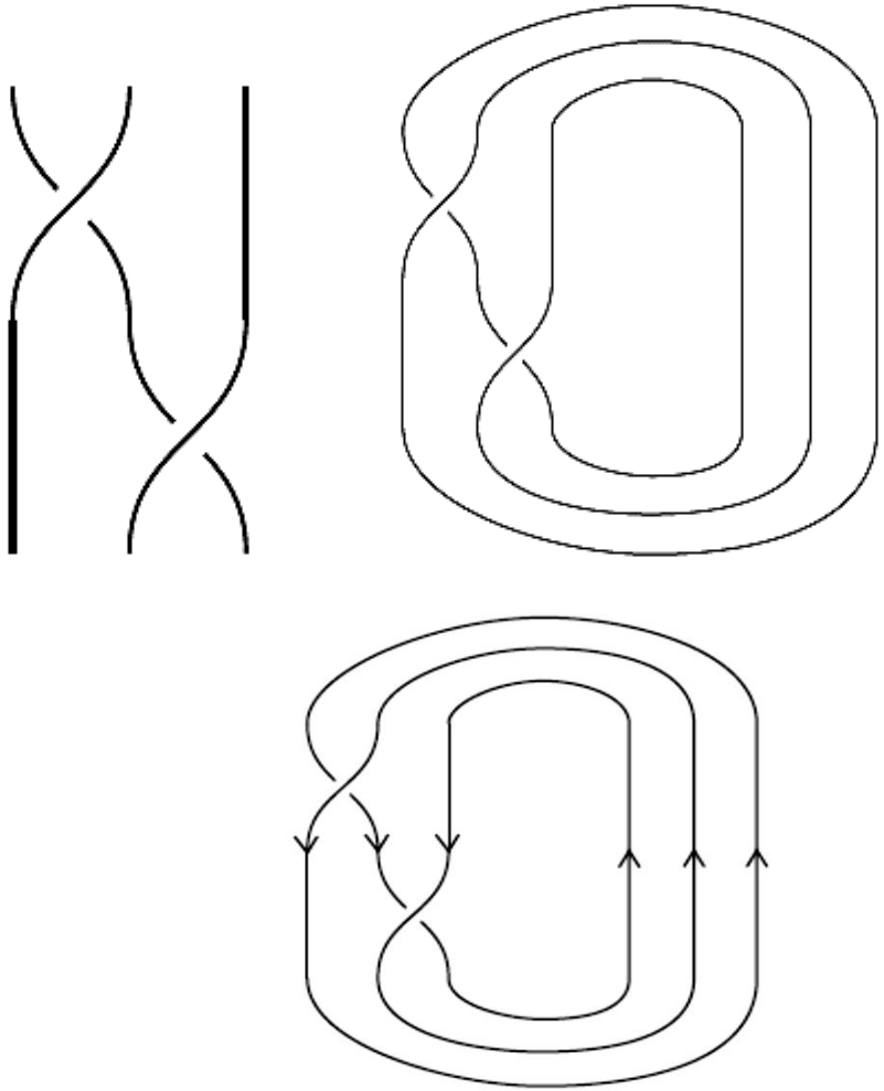
Odpowiedź:

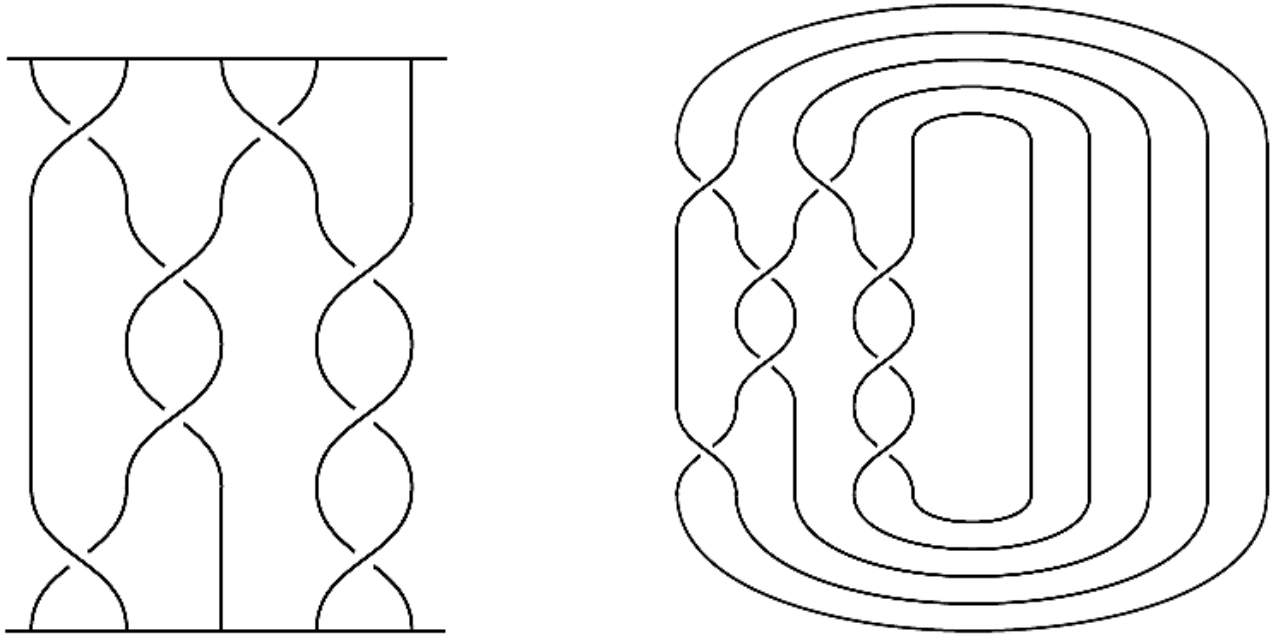
Operacja redukcji w bardzo małym stopniu zaburza struktur okręgów Seiferta diagramu. Tylko te dwa okręgi, na których wykonano ruch Reidemeistra typu II ulegają zmianie. Inne natomiast (stabilne) pozostają nietknięte, nie ulegają też zmianie ich wzajemne relacje.

KORZYŚCI WYNIKAJĄCE Z TWIERDZENIA ALEKSANDRA

- ✓ Stanowi prostsze i bardziej efektywne rozwiązanie niż dowody znane wcześniej
- ✓ umożliwia znaczny stopień kontroli nad liczbą skrzyżowań – nie ulega ona dużemu zwiększeniu i jest z góry w pełni przewidywalna (równa podwojonemu defektowi wyjściowego diagramu)

Przykłady domknięcia warkocza





DEFORMACJE WARKOCZY

Warkocze mają luźne końce, bedziemy je więc deformować ale tylko tak, aby w rozpatrywanych diagramach nie pojawiły sie generatory typu ∩ i ∪.

Dopuszczalne jest wykonywanie na warkoczach tych ruchów Reidemeistera, które nie zaburzają struktury warkoczy. Możemy wykonywać II i III ruchy Reidemeistera.

Według kodów ruchów Reidemeistera:

2R: $\delta_n {\delta_n}^{-1} = {\delta_n}^{-1} \delta_n = oo$, gdzie o generator trywialny, $n \geq 1$.

3R: $\delta_{n-1} \delta_n \delta_{n-1} = \delta_n \delta_{n-1} \delta_n$, gdzie $n \geq 2$.

GRUPA WARKOCZY

- Klasy równoważności warkoczy o n pasmach (ze względu na ruchy RII i RIII) stanowią **grupę.** Nazywamy ją **grupą warkoczy o n pasmach Bn**.

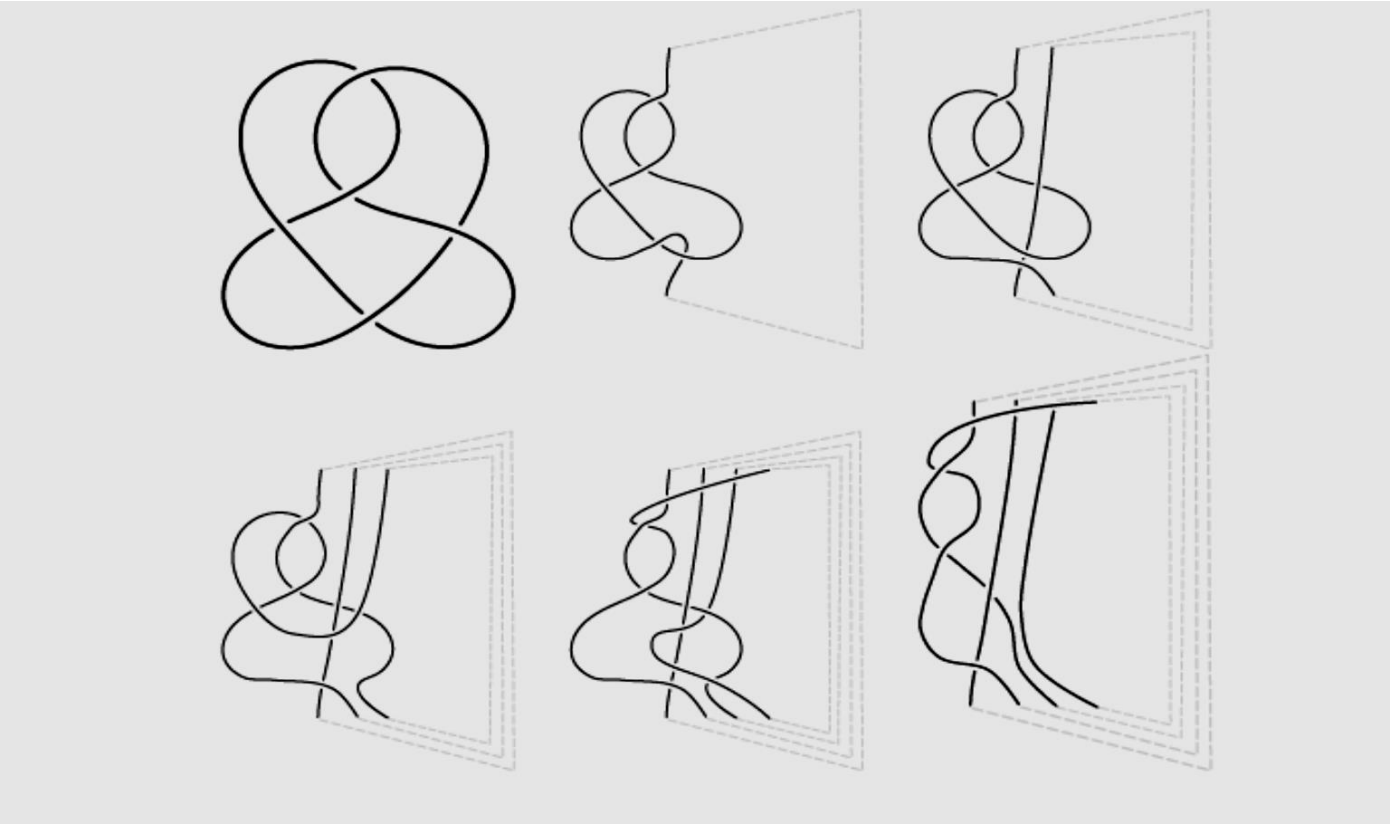
- Jeżeli dwa warkocze są w tej samej klasie, czyli reprezentują ten sam element w grupie warkoczy, to ich domknięcia są **równoważne** jako węzły.

- Jest też dość widoczne, jeżeli weźmiemy dwa warkocze należące do grupy Bn, które są w tej grupie sprzężone i te warkocze domkniemy, to również otrzymamy równoważne węzły

TWIERDZENIE MARKOWA

Jeżeli domknięcia dwóch warkoczy są równoważne, to można przerobić jeden warkocz na drugi za pomocą operacji (które zmieniają liczbę pasm i są pewnego rodzaju ruchem Reidemeistera typu I)

$$B_n \ni \gamma \longleftrightarrow \gamma {\delta_n}^{\pm 1} \in B_{n+1}$$



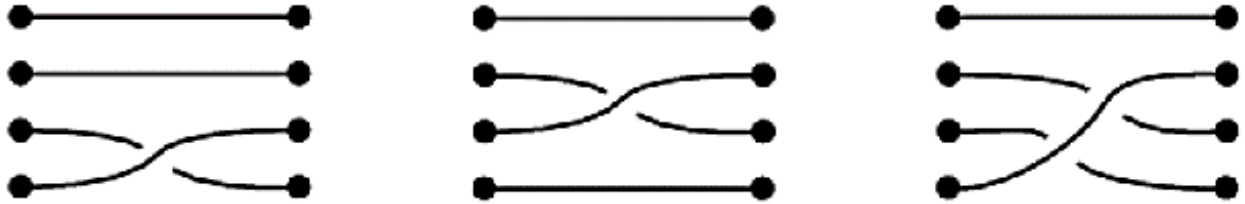
Warkoczowa postać węzła

GRUPA B_n WARKOCZY O n PASMACH (n>1)

A)

Iloczyn pierwszych dwóch warkoczy jest trzecim warkoczem

B)



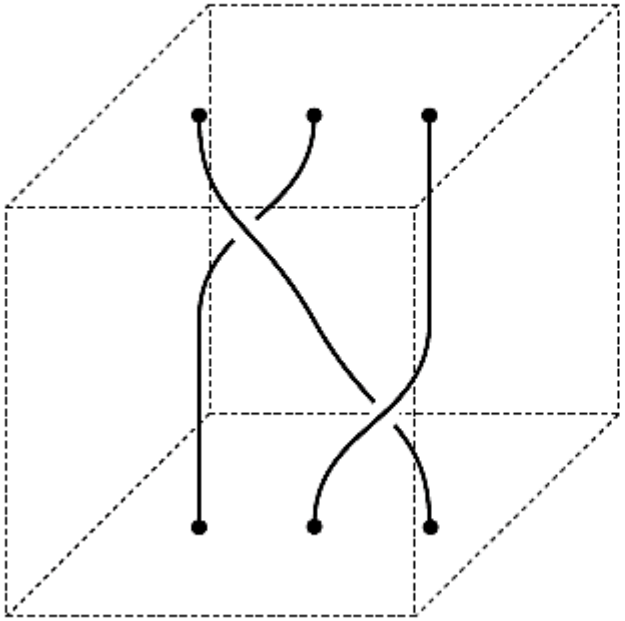
Drugi warkocz nie jest równoważny z pierwszym, ale jest równoważny z trzecim

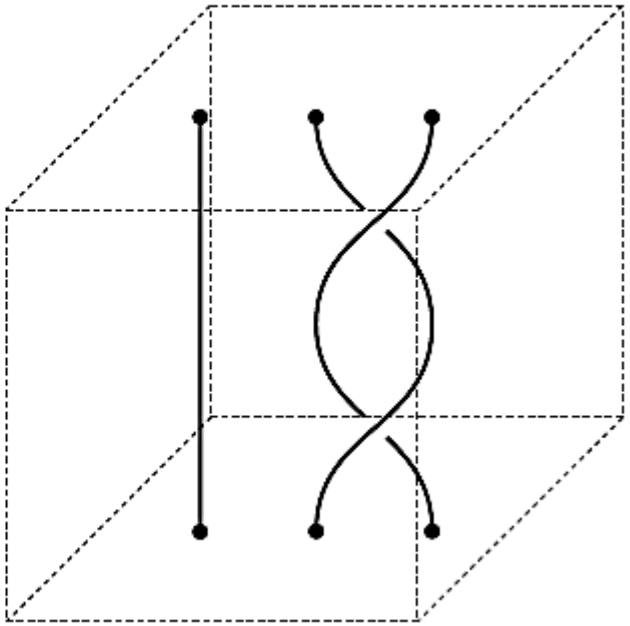
GRUPA B_n WARKOCZY O n PASMACH

c)

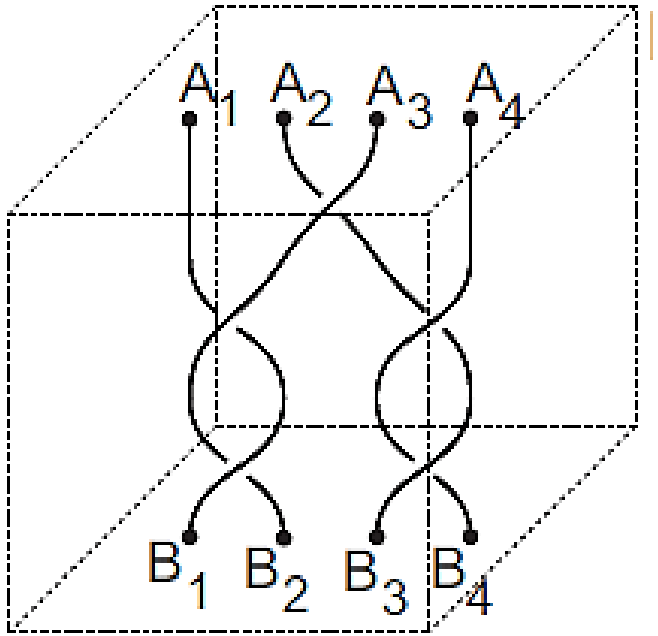
Iloczyn pierwszych dwóch warkoczy jest trzecim warkoczem

Przykłady warkoczy z n=3

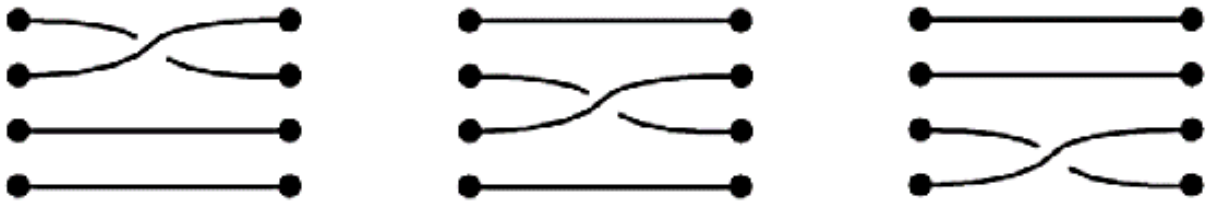




Przykłady warkoczy z n=4



RELACJE W GRUPIE B_4



Każdy warkocz w grupie **B4** może być przedstawiony jako iloczyn pewnej odwrotności warkoczy σ1, σ2, σ3 i ich odwrotności

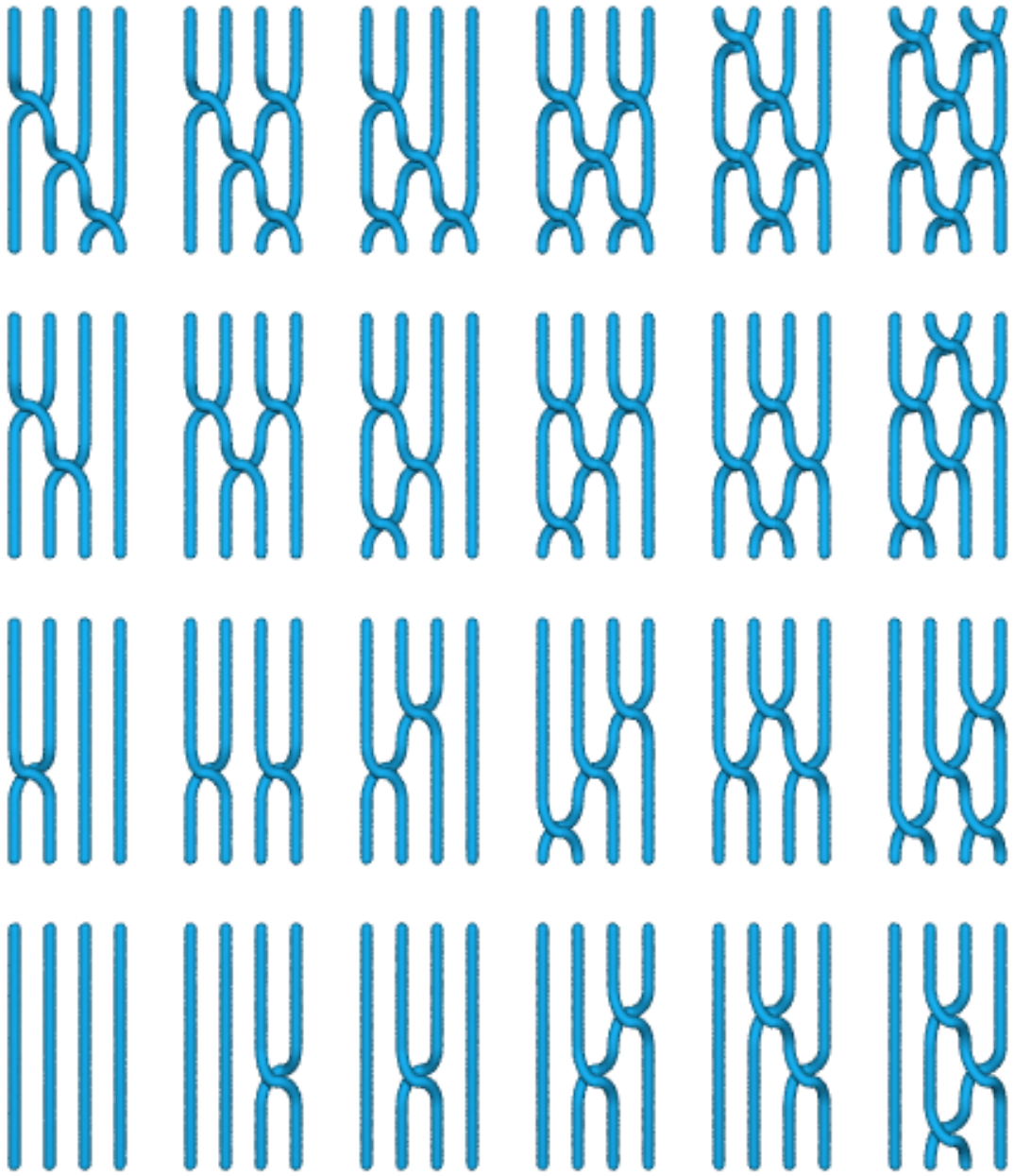
Pomiędzy tymi warkoczami σ1, σ2 oraz σ3 zachodzą następujące relacje:

1. **$\sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1$**
2. **$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$**
3. **$\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3$**

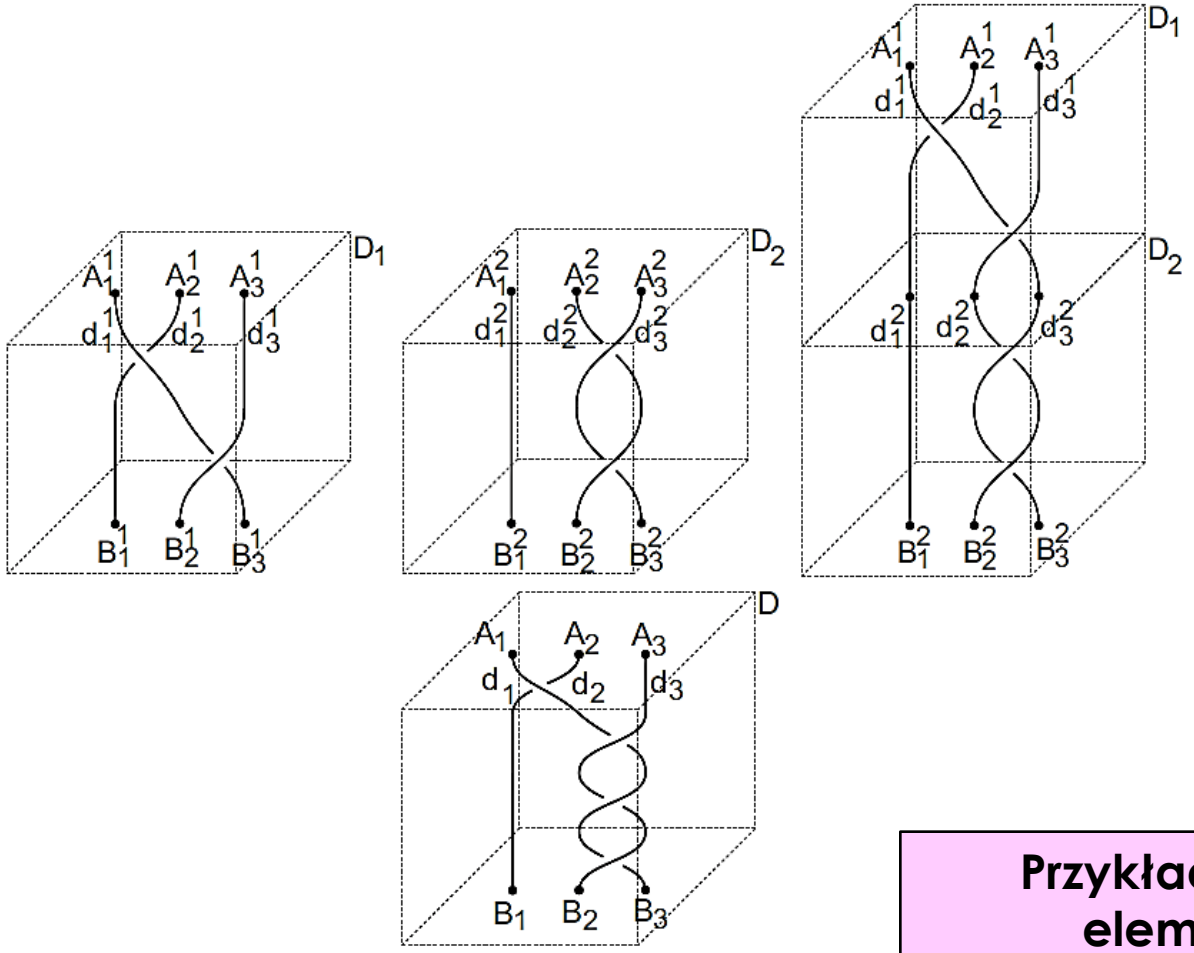
Wszystkie inne relacje pomiędzy warkoczami σ1, σ2 oraz σ3 wynikają z powyższych trzech relacji i aksjomatów grupy, co można zapisac następująco:

$B_4 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \rangle$

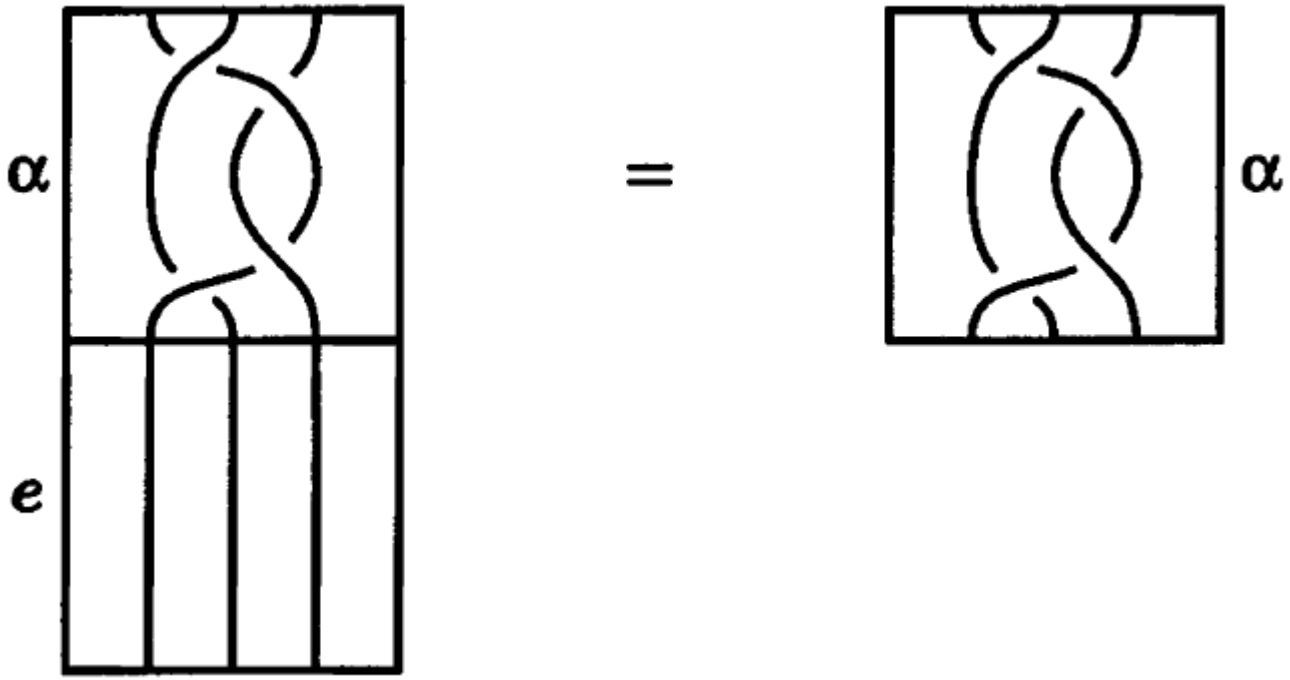
<u>Mówimy wtedy o prezentacji grupy B4 za pomocą generatorow i relacji</u>



24 permutacje węzła 4-częściowego



Przykład połączenia dwóch 3-elementowych warkoczy



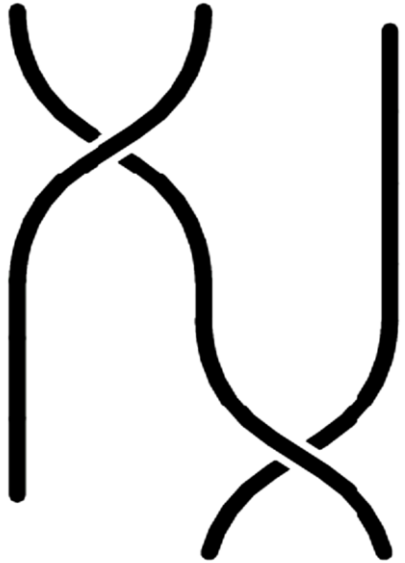
Przykład połączenia dwóch 3-elementowych warkoczy

DODAWANIE WARKOCZY

Dodawanie warkoczy polega na naturalnym złozeniu:

warkocz a

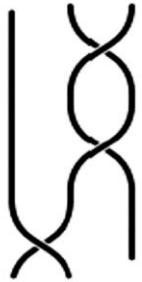
warkocz B



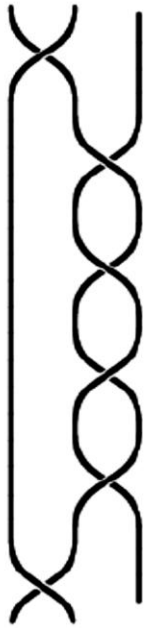
warkocz aB

Branie elementu odwrotnego do danego warkocza polega na odbiciu symetrycznym względem dolnej płaszczyzny

warkocz aBB



warkocz $bbA = (aBB)^{-1}$



warkocz $aBBbbA = e$
(jedynka grupy B_3)

BIBLIOGRAFIA

- http://www.marynka.edu.pl/images/files/pdf/innowacje/matematyka_wielomiany.pdf
- http://maciej.zakarczemny.pl/wp-content/uploads/2014/11/Teoria_wezlow_prezentacja_na_zajecia_druga_1.pdf
- http://www.msn.ap.siedlce.pl/smp/msn/12/39-43.pdf
- http://www.math.edu.pl/permutacje

- file:///C:/Users/Dominika/Desktop/matematyka_wielomiany.pdf
- http://www.impan.pl/~tkoch/talks/pi_%282012%29.pdf
- http://www.ms.unimelb.edu.au/publications/Chiodo.pdf