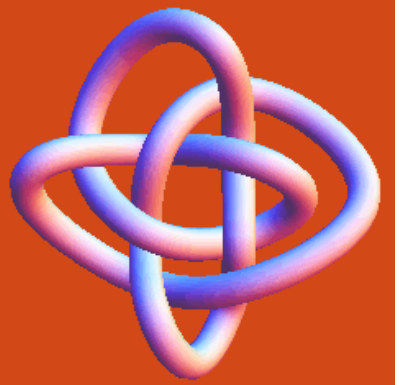
Niezmienniki wielomianowe: wielomian Aleksandra, wielomian Jonesa

Justyna Ostrowska
10 B2

- Przed rokiem 1920, było tylko kilka prac dotyczących węzłów, głównie autorstwa K. F Gaussa' oraz Maxa Dehn'a
- Teoria węzłów pojawiła się jako odrębna gałąź topologii pod wpływem J. W. Alexander'a
- Obliczanie wielomianów węzłów jest standardowym sposobem aby zdecydować, czy dwa węzły są równoważne
- James Waddell Alexander II określił swój wielomian w 1928 roku. Znacznie później, bo 1969 roku, John Conway opracował pewną wersję wielomianu Alexandera, $\nabla(z)$, zwanego dziś wielomianem Alexandera–Conwaya.

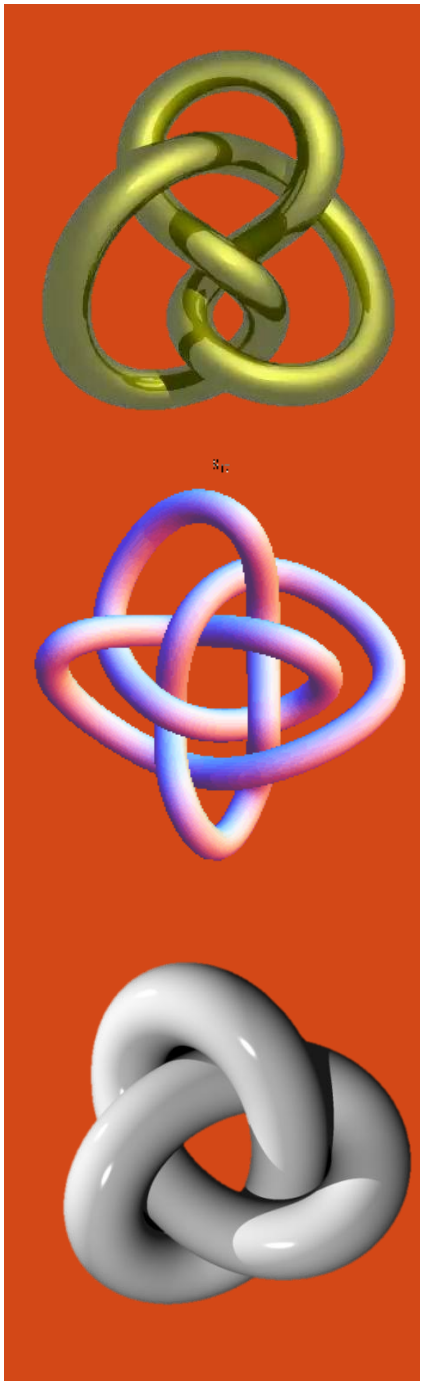


Wielomian Alexandera-Conway'a

- Wielomian Alexandera-Conway'a, to zmodyfikowana wersja wielomianu Aleksandra
- Obliczanie wielomianów Alexandra było mocno uciążliwe, ponieważ dotyczyło oceny uwarunkowań. Conway to ułatwił, pokazując, że mogą zostać zdefiniowane, przez diagram regularny węzła (z ang. skein relation)

Wielomian Alexandera-Conway'a

- Wielomian Alexandera-Conway'a $\nabla_K(z)$ dla węzła K jest wielomianem Laurenta $\nabla_K(z)$, co oznacza, że dla pewnych warunków z ma ujemny wykładnik
- Aksjomat 1: Jeśli węzeł K, jest węzłem trywialnym, wtedy $\nabla_K(z) = 1$



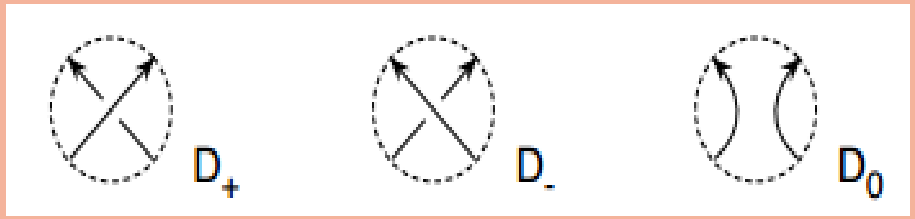
Wielomian Alexandera-Conway'a

- Aksjomat II: Dla SK-relacji (skein relation) D_+, D_- oraz D_0 otrzymujemy poniższą zależność:

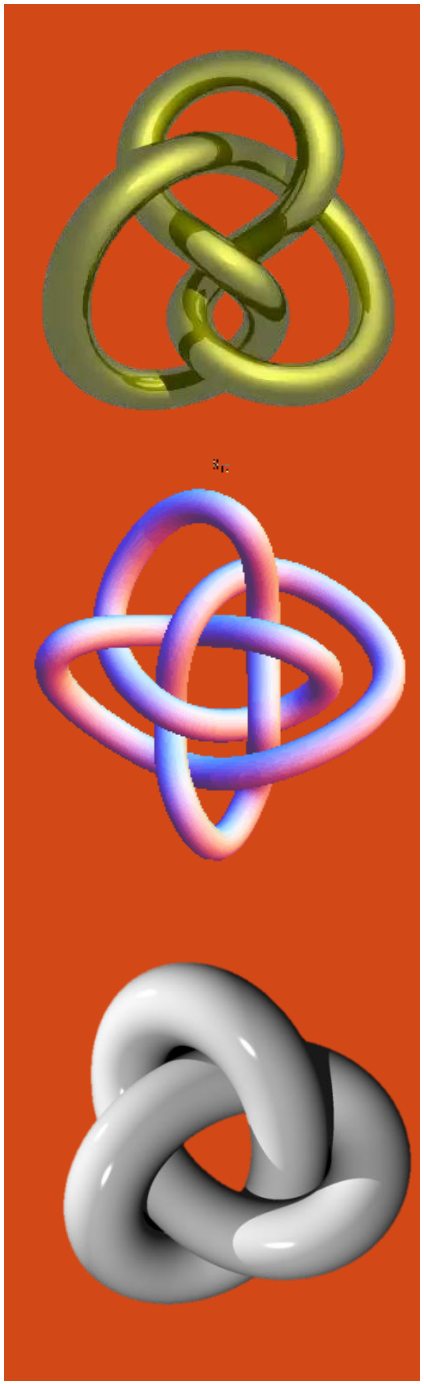
$$\nabla_{D_+} = \nabla_{D_-}(z) + z\nabla_{D_0}(z)$$

Operacja, która zamienia jeden z D_+, D_-, D_0 na inny jest nazwana skein operacją.

Diagramy Conway'a dla SK – relacji:



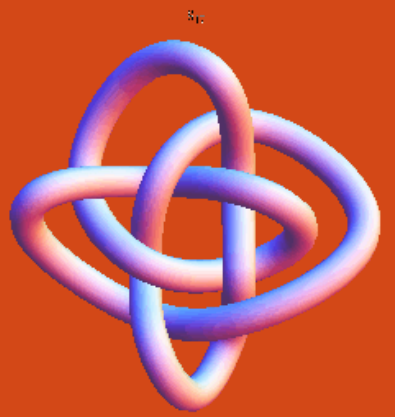
- Uwaga: W dalszej części, wielomian $\nabla_K(z)$, uznajmy jako niezmiennik podczas każdego z trzech ruchów Reidemeistera



Wielomian Alexandera-Conway'a

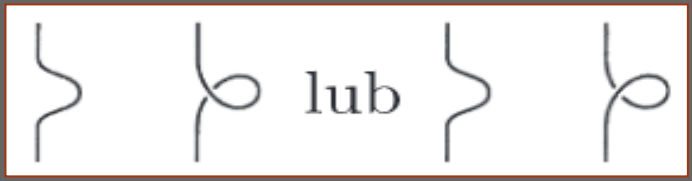
❖ Przykłady wielomianu Aleksandera Δ i Conway'a ∇ dla wspólnych węzłów są podane w poniższej tabeli:

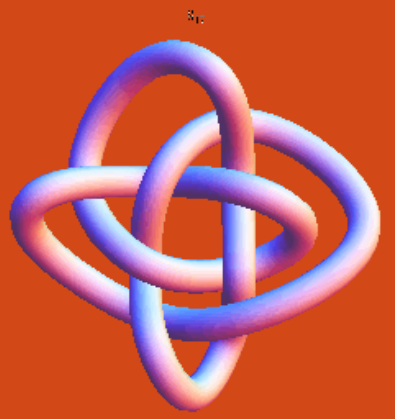
Węzeł K	$\Delta_K(x)$	$\nabla_K(x)$
Trójlistnik	$x^{-1} - 1 + x$	$x^2 + 1$
Węzeł ósemkowy	$-x^{-1} + 3 - x$	$1 - x^2$
Węzeł 5_1	$x^{-2} - x^{-1} + 1 - x + x^2$	$x^4 + 3x^2 + 1$
Węzeł 6_1	$-2x^{-1} + 5 - 2x$	$1 - 2x^2$
Węzeł 6_2	$-x^{-2} + 3x^{-1} - 3 + 3x - x^2$	$-x^4 - x^2 + 1$



Dana własność węzła (splotu) jest jego <u>niezmiennikiem</u>, jeżeli nie ulega zmianie podczas żadnego z trzech ruchów Reidemeistera

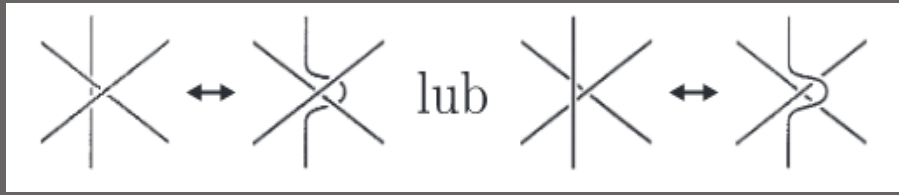
- Ruchy Reidemeistera I typu

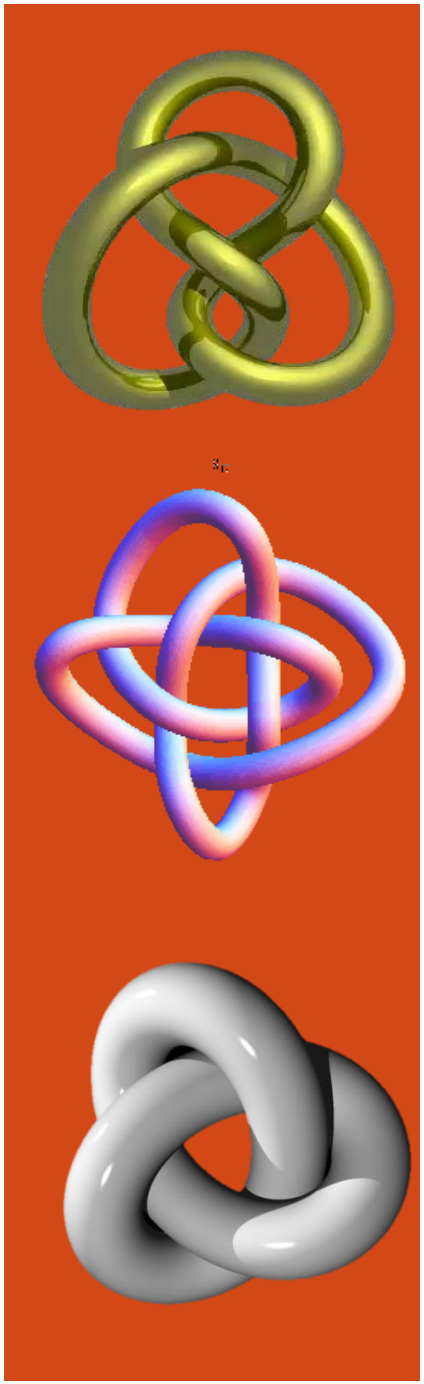




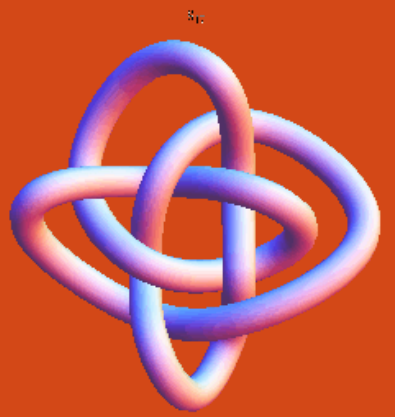
- Ruchy Reidemeistera II typu

- Ruchy Reidemeistera III typu





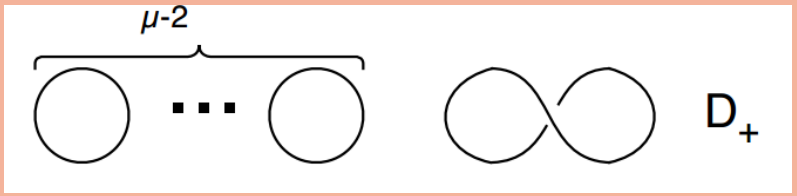
- Z tego wynika, że gdy dwa sploty są równoważne, wtedy niezmiennik jest zgodny dla obu splotów.
- Zwykle stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tj. istnieją nierównoważne sploty o zgodnych niezmiennikach

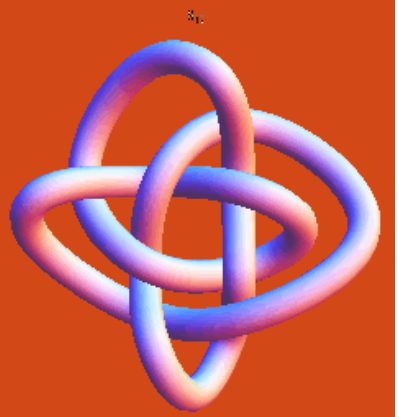


- Twierdzenie: Niech O_μ będzie splotem trywialnym o μ ogniwach, wtedy: $\nabla_{O_\mu}(z)$= 0 dla μ ≥ 2
- Dowód:

$$\nabla_{D_+}(z) = \nabla_{D_-}(z) + z\,\nabla_{D_0}(z)$$

dla poniższego splotu trywialnego:





Otrzymujemy:

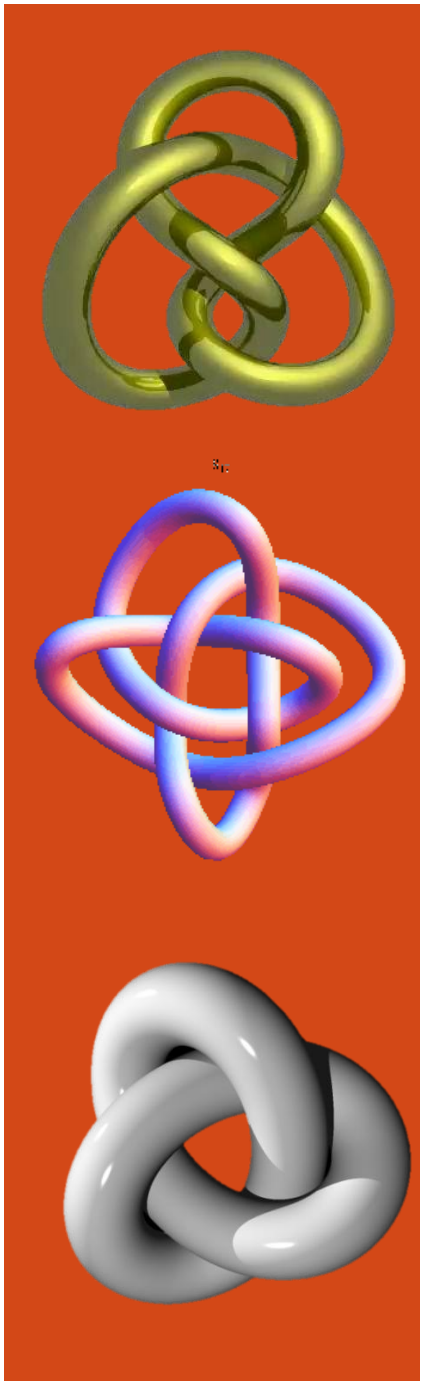
$D_+ = D_{O_{\mu-1}}$ $\quad$ $D_- = D_{O_{\mu-1}}$ $\quad$ $D_O(z) = D_{O_\mu}$

Więc: $\nabla_{D_+}(z) = \nabla_{D_-}(z)$, i:

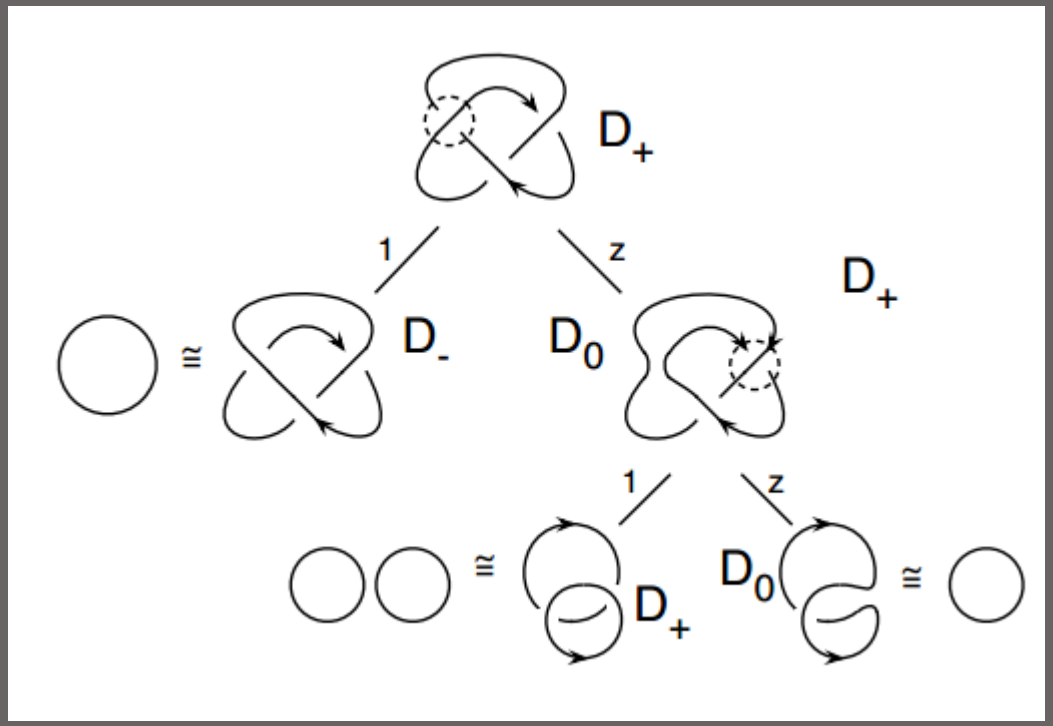
$$z\nabla_{D_o}(z) = \nabla_{D_+}(z) - \nabla_{D_-}(z) = 0$$

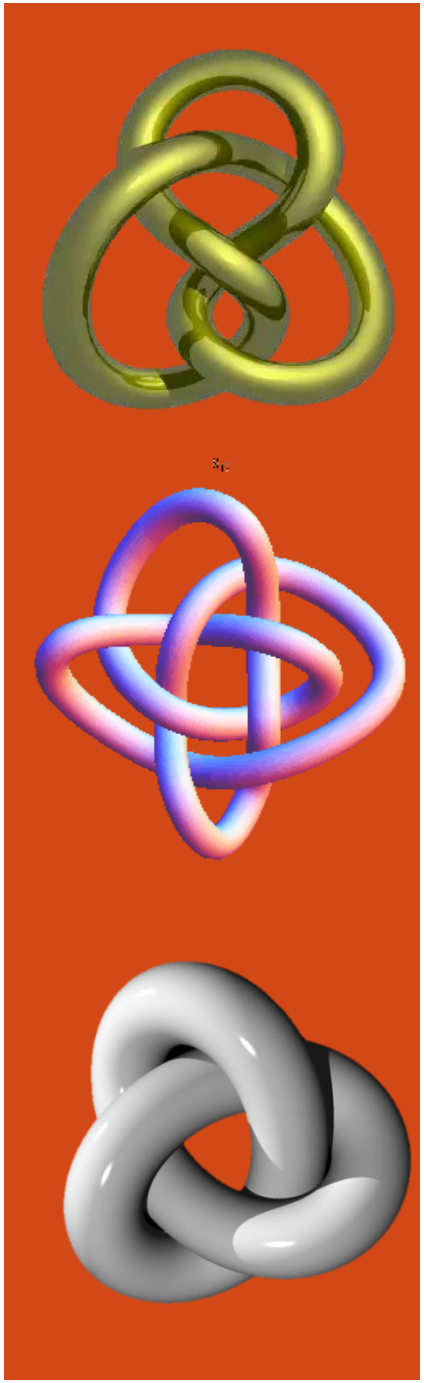
Z czego wynika, że:

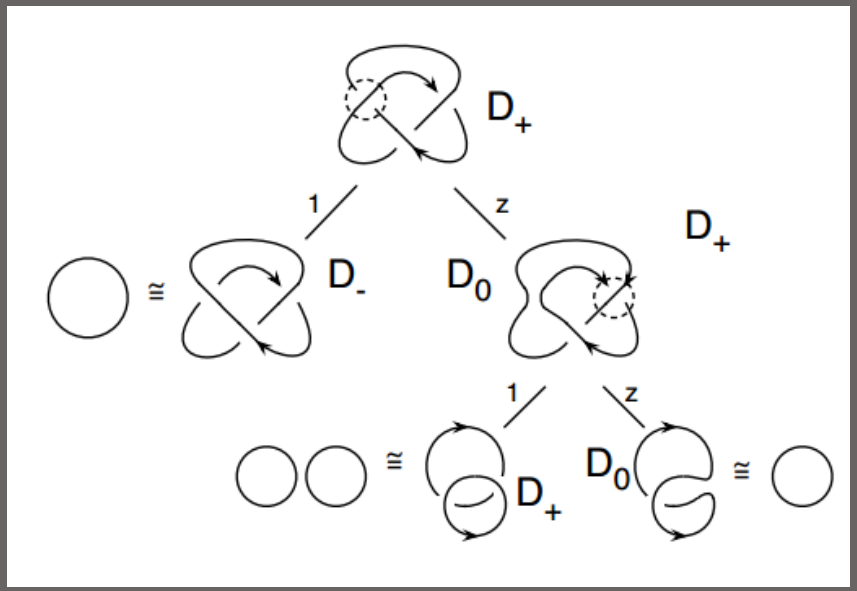
$$\nabla_{O_\mu}(z) = \nabla_{D_0}(z) = 0$$



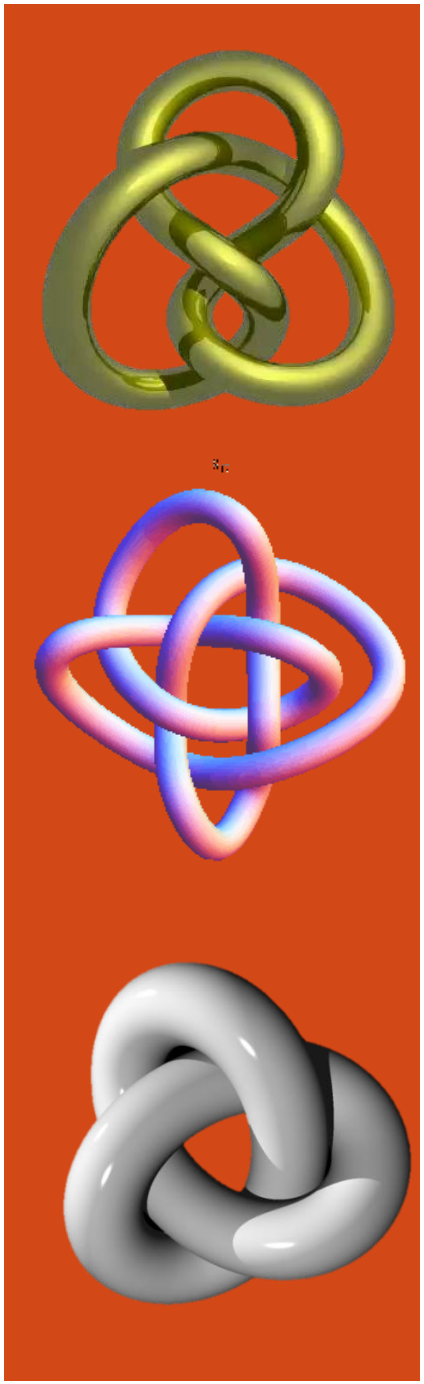
Drzewko skein diagramu dla prawego trójlistnika:







$$\nabla_{3_1} = 1 \cdot \nabla_{O_1} + z \cdot 1 \cdot \nabla_{O_2} + z^2 \cdot \nabla_{O_1}$$
$$= 1 \cdot 1 + z \cdot 1 \cdot 0 + z^2 \cdot 1$$
$$= 1 + z^2$$



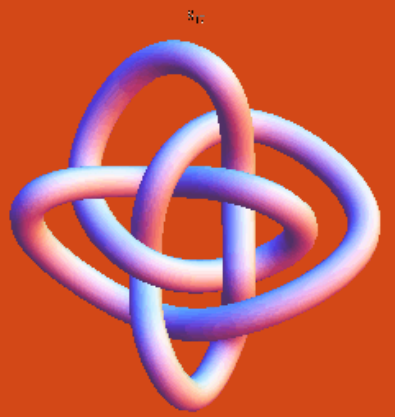
$$\nabla_{3_1} = 1 \cdot \nabla_{O_1} + z \cdot 1 \cdot \nabla_{O_2} + z^2 \cdot \nabla_{O_1}$$
$$= 1 \cdot 1 + z \cdot 1 \cdot 0 + z^2 \cdot 1$$
$$= 1 + z^2$$

Klasyczny wielomian Alexander'a $\Delta_K(t)$ otrzymuje się przez podstawienie:

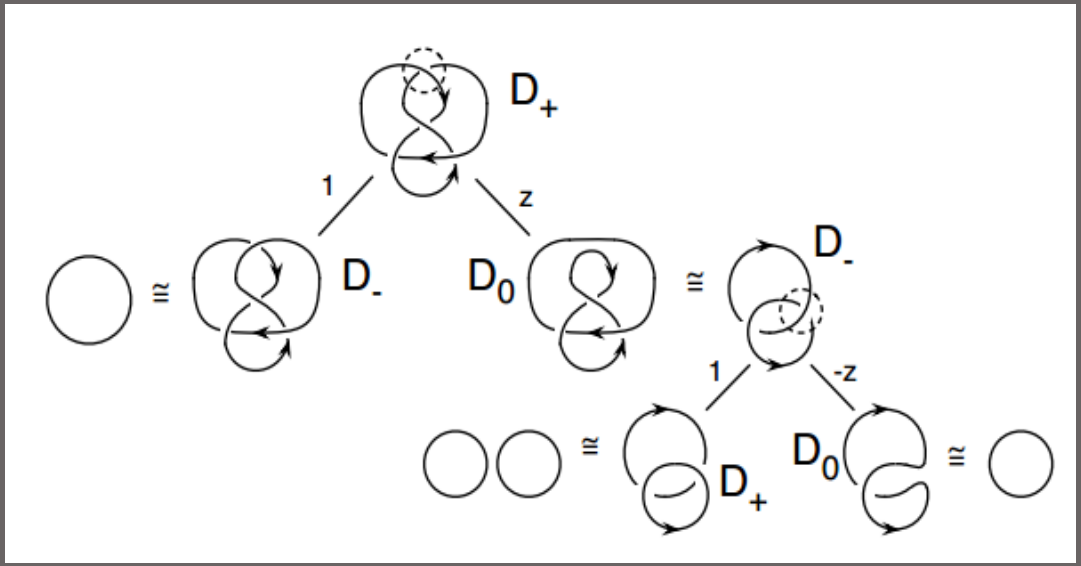
$$z = t^{1/2} - t^{-1/2}$$

do wielomianu Alexandera-Conway'a, w związku z tym:

$$\nabla_{3_1} = 1 + \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right)^2$$
$$= 1 + t - 2 + t^{-1}$$
$$= t^{-1} - 1 + t$$



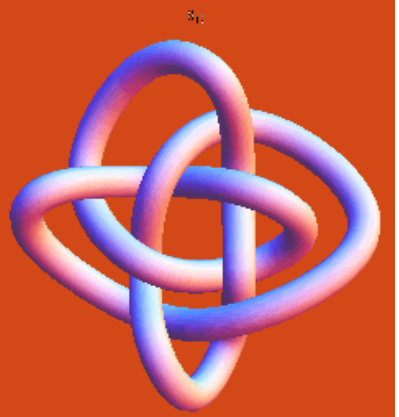
Drzewko skein diagramu dla węzła ósemkowego.



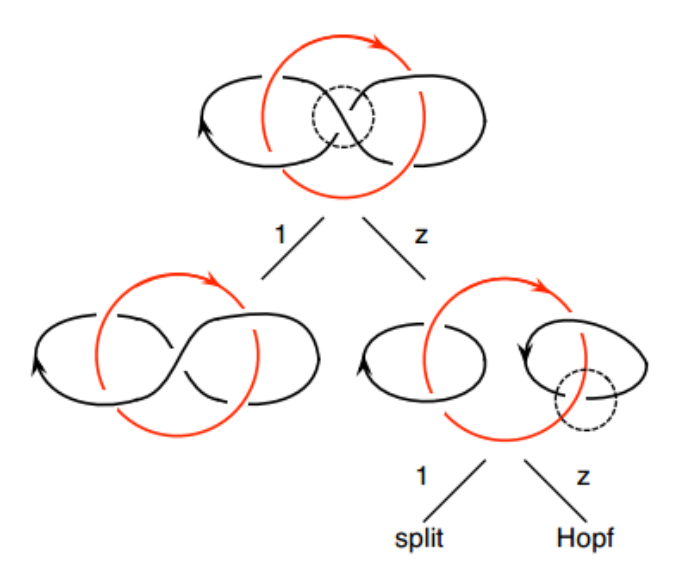
$$\nabla_{4_1} = 1 \cdot \nabla_{O_1} + z \cdot 1 \cdot \nabla_{O_2} - z^2 \cdot \nabla_{O_1}$$
$$= 1 \cdot 1 + z \cdot 1 \cdot 0 - z^2 \cdot 1$$
$$= 1 - z^2$$

Więc : $\Delta_{4_1} = 1 - \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right)^2$

$$= 1 - t + 2 - t^{-1} = -t^{-1} + 3 - t$$



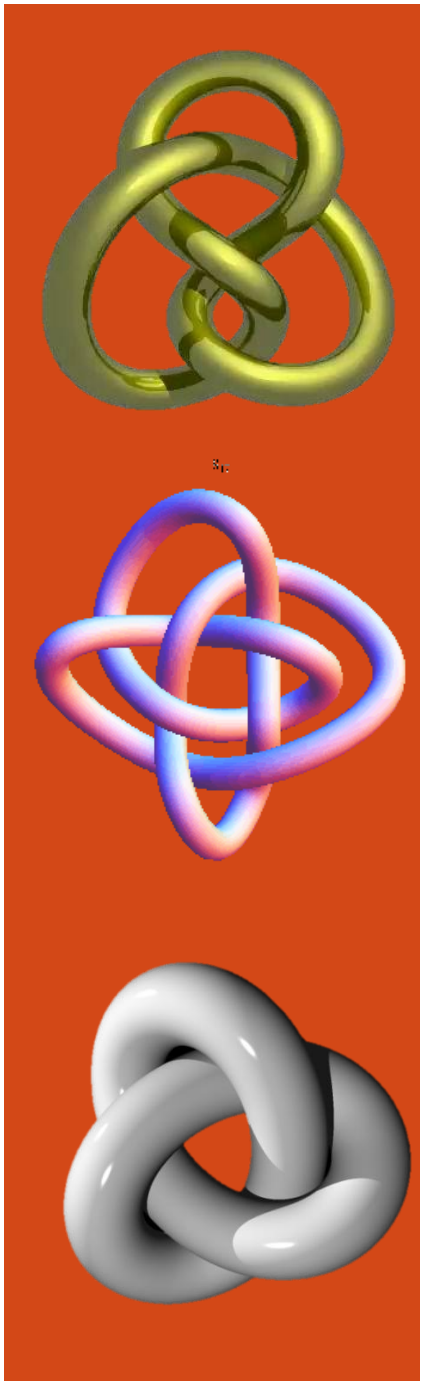
Drzewko skein diagramu dla węzła Whitehead'a



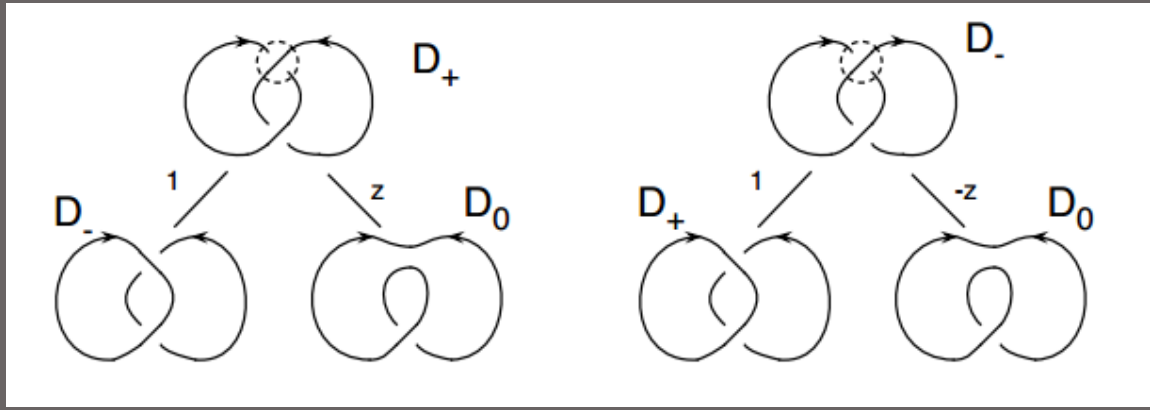
$$\nabla_{5_1^2} = 1 \cdot \nabla_{O_2} + z^2 \cdot \nabla_{H_+}$$
$$= 0 + z^2 \cdot z = z^3$$

Więc:

$$\nabla_{5_1^2} = \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right)^3$$
$$= -t^{-3/2} + 3t^{-1/2} - 3t^{\frac{1}{2}} + t^{3/2}$$



Drzewko skein diagramu dla węzła Hopfa.

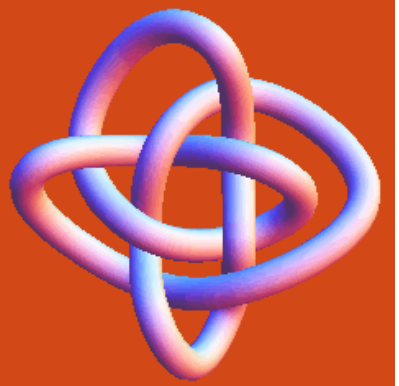


$$\nabla_{H_+} = 1 \cdot \nabla_{O_2} + z \cdot 1 \cdot \nabla_{O_1}$$
$$= 0 + z = z$$

Więc : $\Delta_{H_+} = t^{1/2} - t^{-1/2}$

$$\nabla_{H_-} = 1 \cdot \nabla_{O_2} - z \cdot 1 \cdot \nabla_{O_1}$$
$$= 0 - z = -z$$

Więc : $\Delta_{H_-} = t^{-1/2} - t^{1/2}$



Właściwości wielomianu Alexandera-Conway'a

- Dla każdego splotu K, mamy:

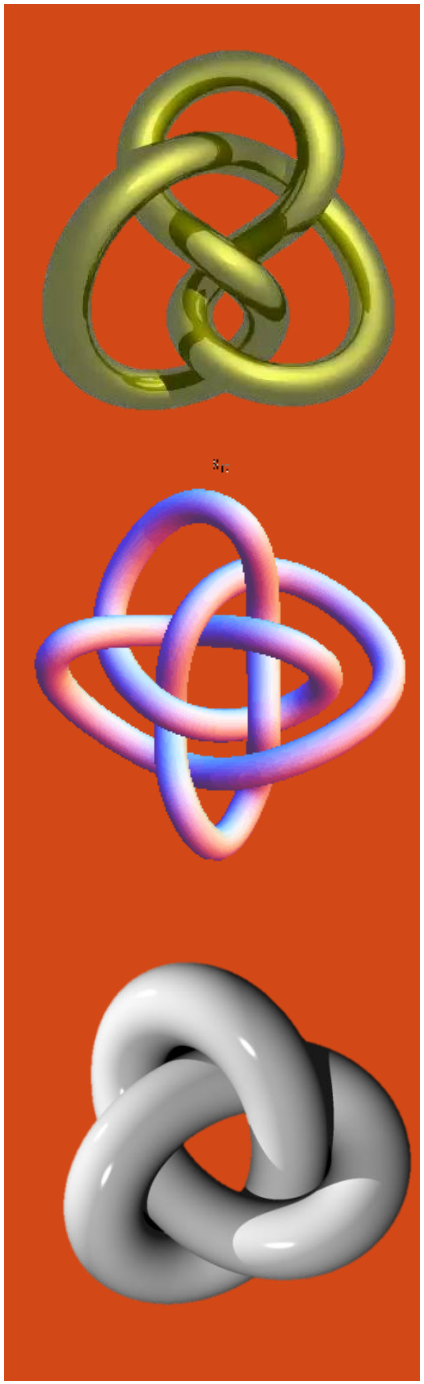
$$\nabla_L(0) = \nabla_{O_\mu}(0) = (\mu = 1)$$

- Dowód: Skein relacja

$$\nabla_{D_+}(z) = \nabla_{D_-}(z) + z\nabla_{D_0}(z)$$

Oznacza to, że:

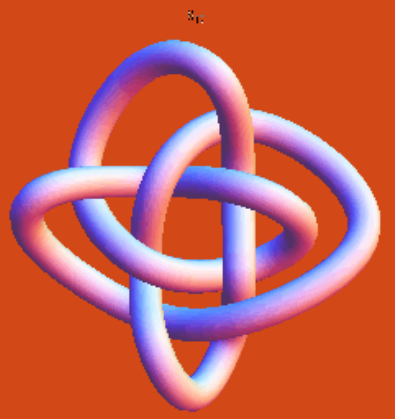
$$\nabla_{D_+}(0) = \nabla_{D_-}(0)$$



Właściwości wielomianu Alexandera-Conway'a

Zgodnie z tym, wartość ∇_L (O) pozostaje bez zmian, gdy typ skrzyżowania ulega zmianie. Zmiana wystarczająco wielu skrzyżowań zamienia dowolny węzeł w węzeł trywialny. Z tego wynika:

$$\nabla_L(0) = \nabla_{O_\mu}(0)$$



Właściwości wielomianu Alexander'a-Conway'a

- Dla danego splotu L, otrzymujemy

$$\Delta_L(1) = (\mu(L) = 1)$$

Dowód: Określiliśmy wielomian Alexander'a $\Delta_L(t)$ przez równanie:

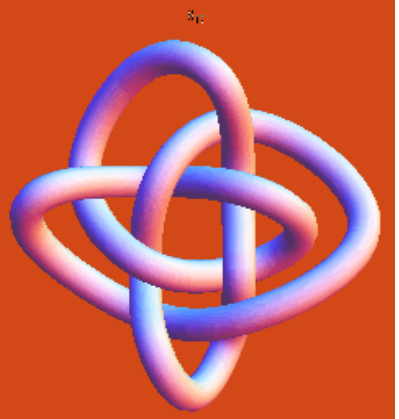
$$\Delta_L(t) = \nabla_L(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$$

Biorąc pod uwagę założenie:

$$\nabla_L(0) = \nabla_{O_\mu}(0) = (\mu = 1)$$

Otrzymujemy:

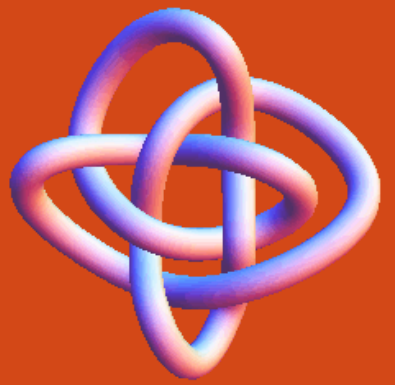
$$\Delta_L(1) = \nabla_L(0) = (\mu(L) = 1)$$



Wielomian Jonesa

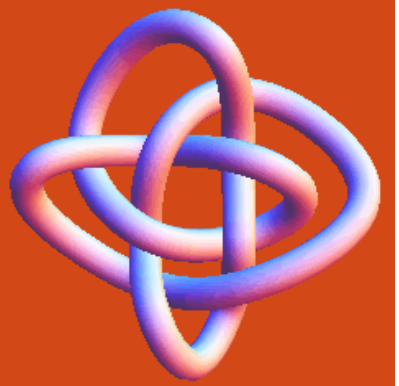
- Na początku lat 90-tych matematyk z UC w Berkeley, Vaughn Jones odkrył nową drogę do rozróżnienia węzłów od siebie.

Za tę pracę otrzymał medal Fieldsa, najwyższą nagrodę w matematyce (odpowiednik Nagrody Nobla). Przypisuje ona wielomian do każdego węzła Jeśli wielomiany są różne węzły są różne. Jest to możliwe dla różnych węzłów, aby mieć taki sam wielomian Jones'a ale zdarza się rzadko. Wielomian ten jest nadzwyczaj dobrą metodą do rozróżniania węzłów.



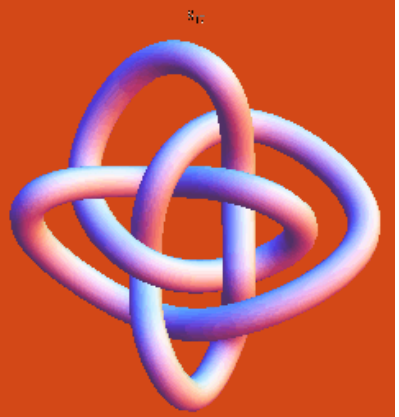
Wielomian Jonesa

- Wielomian Jones'a $V_K(t)$ dla węzła K jest wielomianem Laurenta od zmiennej $\sqrt{t}$, co oznacza, że dla pewnych warunków $\sqrt{t}$ może mieć wykładnik ujemny.
- Dla $\sqrt{t}^2$ mamy t
- Aksjomat 1: Jeśli K jest węzłem trywialnym, wtedy $V_K(t) = 1$



Wielomian Jonesa

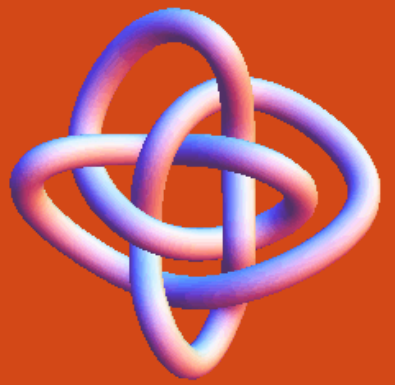
- Aksjomat 11: Dla *skein* relacji diagramów D_+, D_0, D_-



Wielomian Jonesa

- Aksjomat II: Dla *skein* relacji diagramów D_+, D_0, D_-

$$\frac{1}{t}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{D_0}(t)$$

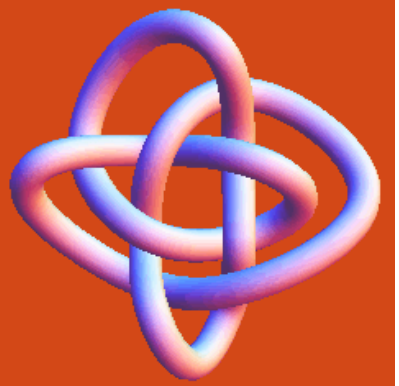


Wielomian Jonesa

- $V_{D_+}(t) = t^2 V_{D_-}(t) + tzV_{D_0}(t)$
- $V_{D_-}(t) = t^{-2} V_{D_+}(t) - t^{-1} zV_{D_0}(t)$

Gdzie z:

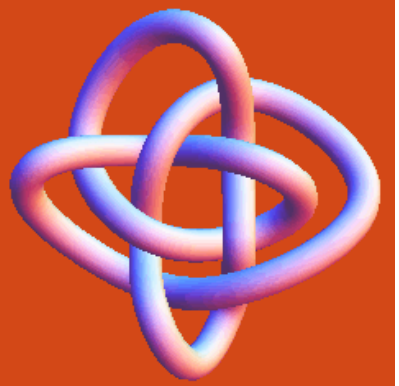
$$z = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$



Wielomian Jonesa

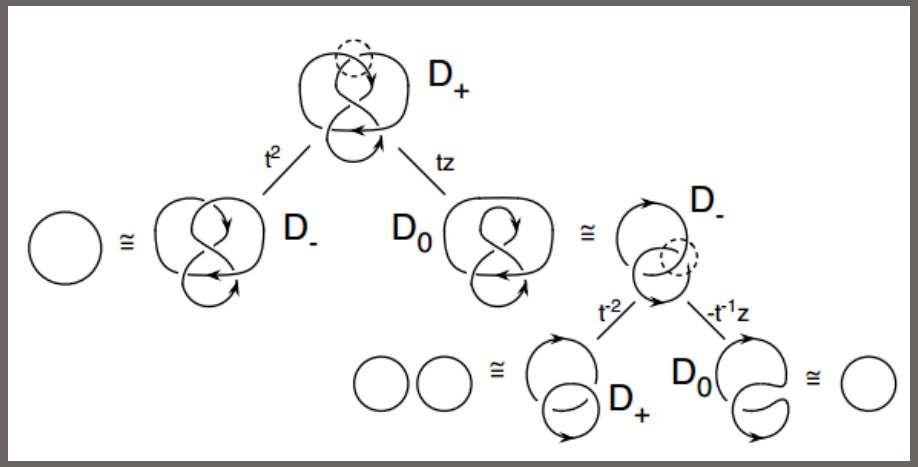
- Dla trywialnego splotu O_μ o μ ogniwach mamy:

$$V_{O_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1}\left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\mu-1}$$

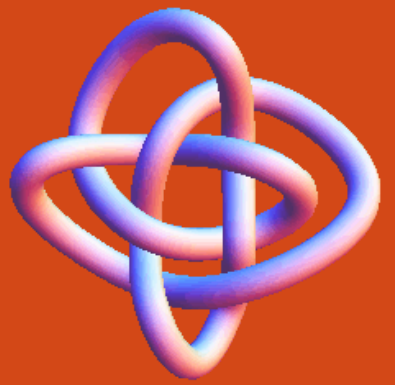


Wielomian Jonesa

- Drzewko skein diagramu dla węzła ósemkowego



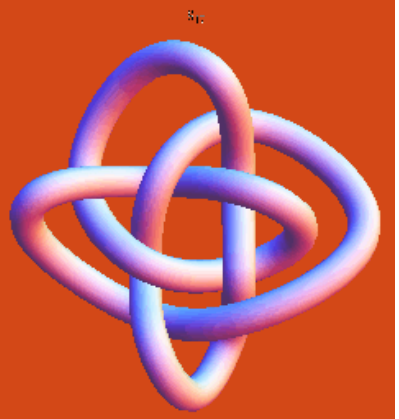
$$V(4_1)(t) = t^2 V(O_1)(t) + t^{-1} z V(O_2)(t) - z^2 V(O_1)(t)$$
$$= t^2 - t^{-1}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) - \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2$$
$$= t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$$



Vaughan F. R. Jones przypisał każdemu splotowi zorientowanemu L wielomian Laurenta $V_L(t)$ zmiennej √t:

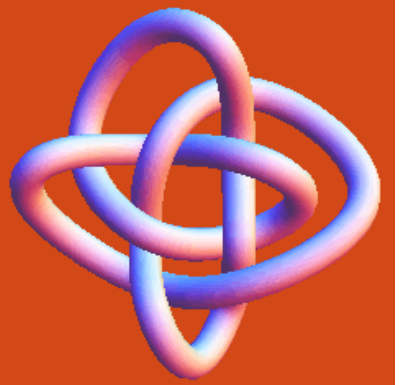
$$\ldots + c_{-2}(\sqrt{t})^{-2} + c_{-1}(\sqrt{t})^{-1} + c_0 + c_1(\sqrt{t}) + c_2(\sqrt{t})^2 + \ldots$$

o współczynnikach całkowitych $c_i = c_i$ (L), przy czym $c_i \neq 0$ dla skończonej liczby indeksów i = 0, ±1, ±2, . . . , a poza tym $c_i = 0$



Twierdzenie Jonesa

Wielomian $V_L(t)$ jest niezmiennikiem splotów: $V_L(t) = V_{L'}(t)$, tj. $c_i(L) = c_i(L')$, gdy sploty L oraz L' są ze sobą równoważne.

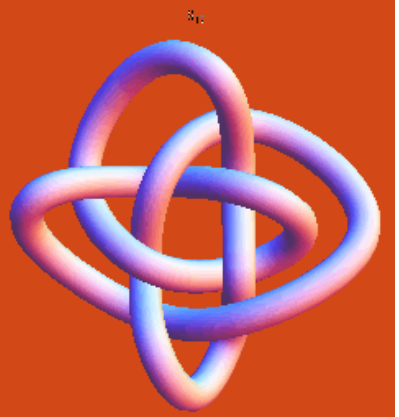


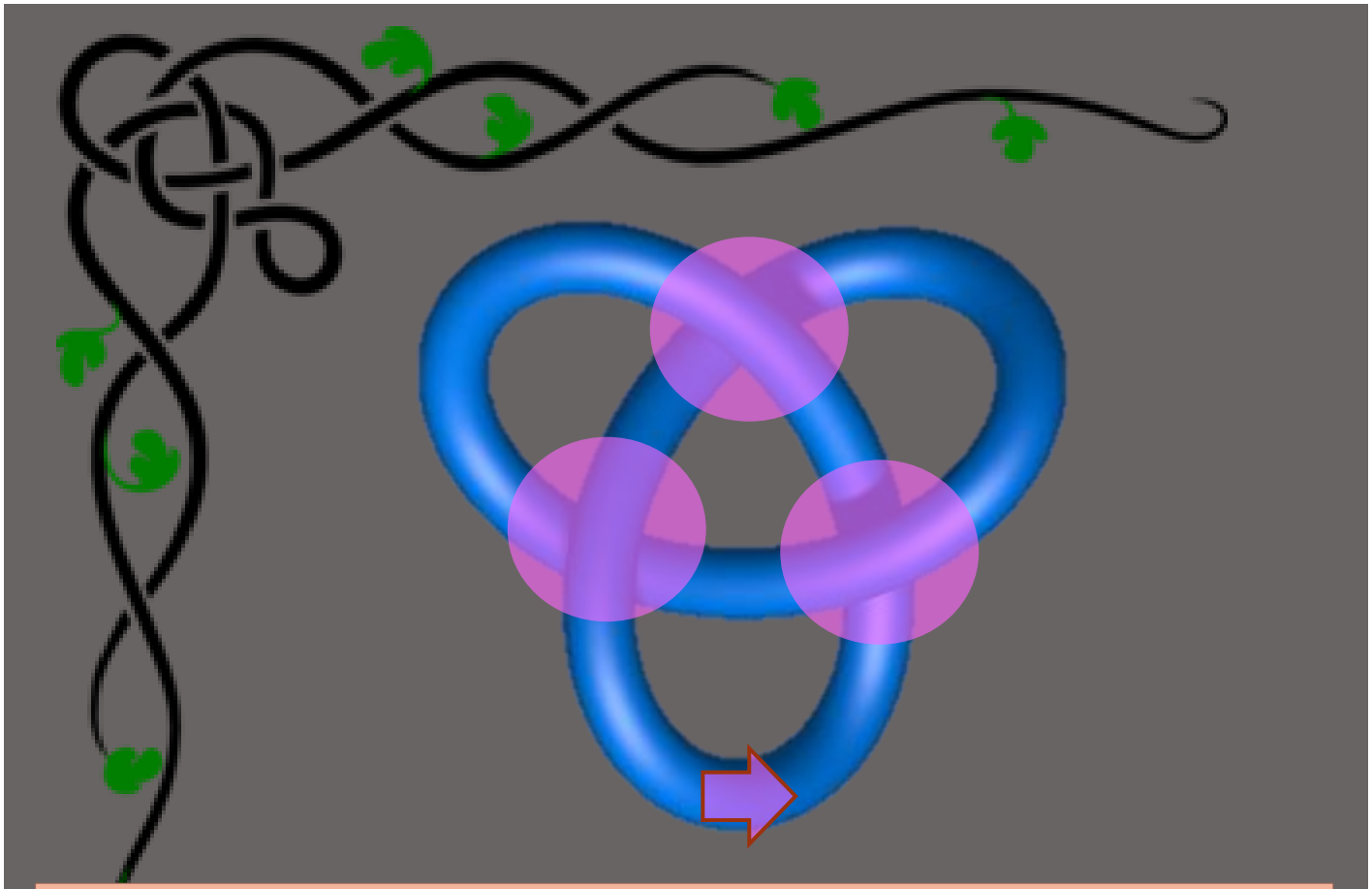
Definicja wielomianu Jonesa

Wielomian Jonesa splotu zorientowanego L:

$$\boldsymbol{V_L(t)} := \left(\sqrt{\boldsymbol{t}}\right)^{\boldsymbol{1-n+e}(\beta)} \boldsymbol{(-t-1)^{n-1}\, trace\ \rho\ (\beta)}$$

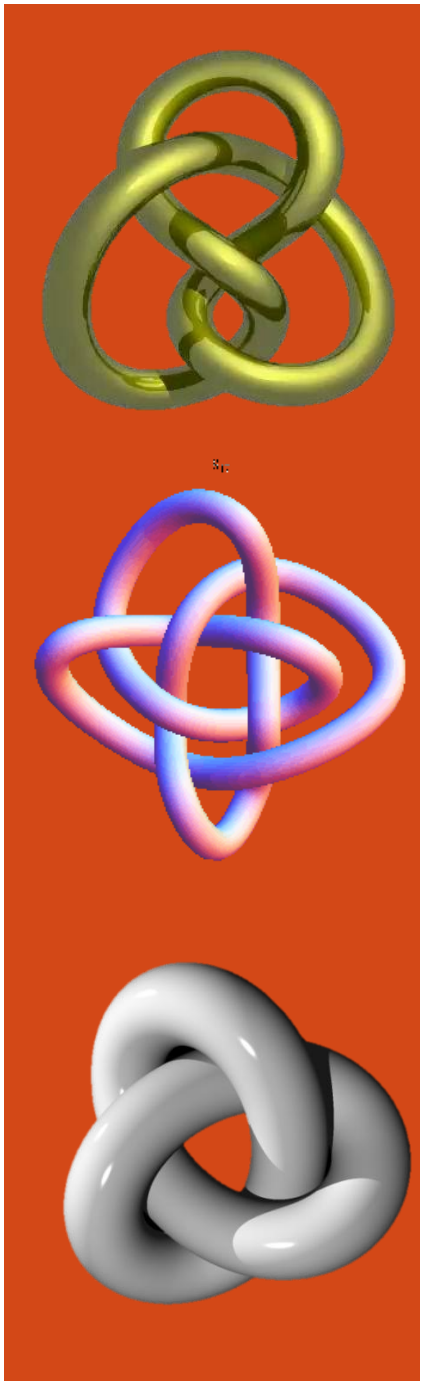
- β jest warkoczem o n pasmach, którego zamknięciem jest L
- $e(\beta)$ jest sumą wykładników w przedstawieniu warkocza β za pomocą generatorów $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ grupy n-warkoczy, $n \geq 2$
- trace $\rho(\beta)$ jest śladem macierzy Burau $\rho(\beta)$ warkocza β





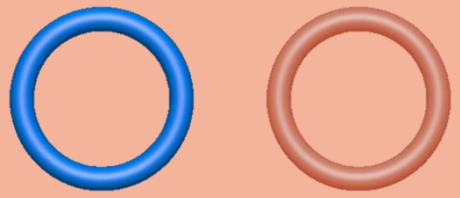
$$t^{-1}\,V \;\; - \; tV \;\; = \; \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) V$$

$$V_{\bigcirc} = 1$$



Wielomian Jonesa splotu rozsupłanego

❖ złożonego z dwóch składowych:



We wzorze:

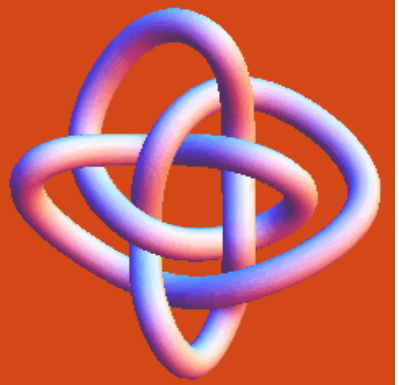
$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{L_0}(t)$$

możemy przyjąć, że:

$L_0 = 2\bigcirc$ oraz $L_+ = L_- = \bigcirc$

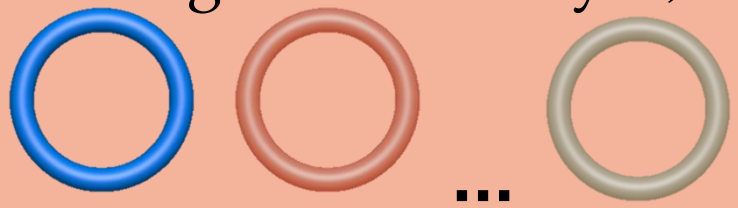
co daje:

$$V_{2\bigcirc}(t) = (t^{-1} - t)\left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right)^{-1} = -t^{-\frac{1}{2}} - t^{1/2}$$

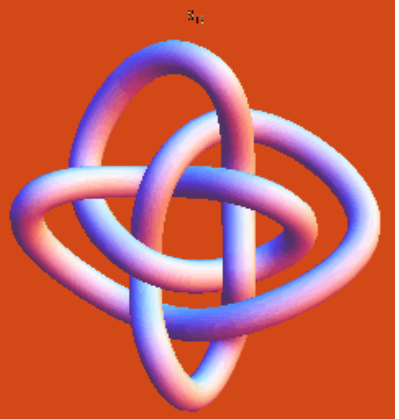


Wielomian Jonesa splotu rozsupłanego

- złożonego z n składowych, n ≥ 1:



$$V_{n\bigcirc}(t) = (-1)^{n-1}\left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{1/2}\right)^{n-1}$$



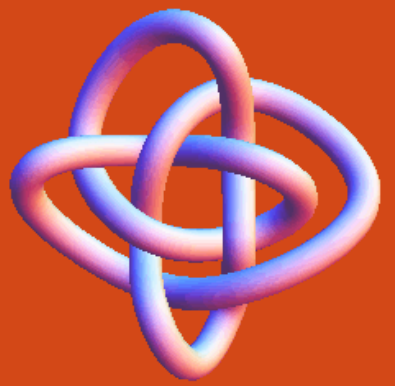
Dalsze własności wielomianu Jonesa

- Wielomian Jonesa węzła, czy splotu L mającego nieparzystą liczbę składowych, jest wielomianem Laurenta zmiennej t

$$V_l(t) = \ldots + c_{-2}t^{-2} + c_{-1}t^{-1} + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots,$$

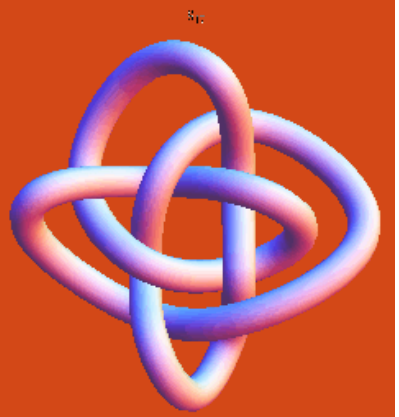
o współczynnikach całkowitych $c_i = c_i\,(L)$,

przy czym $c_i \neq 0$, tylko dla skończonej liczby indeksów $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



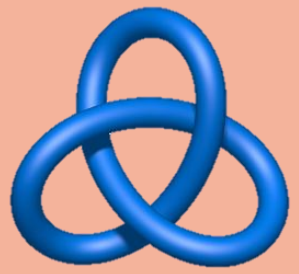
Dalsze własności wielomianu Jonesa

- $V_L(1) = (-2)^{n-1}$, gdy splot L ma n składowych, $n \geq 1$
- $V_L(t) \neq 0$, tj. co najmniej jeden współczynnik $c_i(\mathrm{L}) \neq 0$
- $V_{L_1 \# L_2}(t) = V_{L_1}(t) V_{L_2}(t)$ dla dwóch splotów L_1 oraz L_2



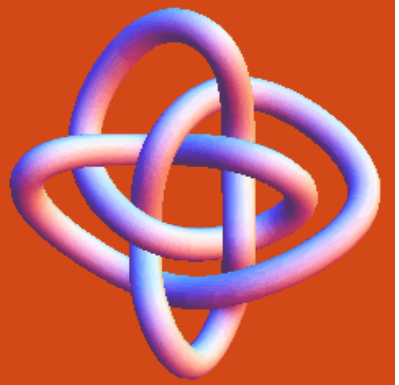
Wielomiany Jonesa trójlistników

- Prawoskrętnego: $V(t) = t + t^3 - t^4$



- Lewoskrętnego : $V(t) = t^{-1} + t^{-3} + t^4$

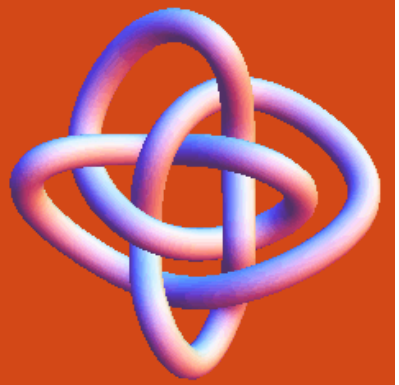
Znając jeden z tych wielomianów Jonesa, drugi można obliczyć zastępując t przez t^{-1} w znanym wielomianie



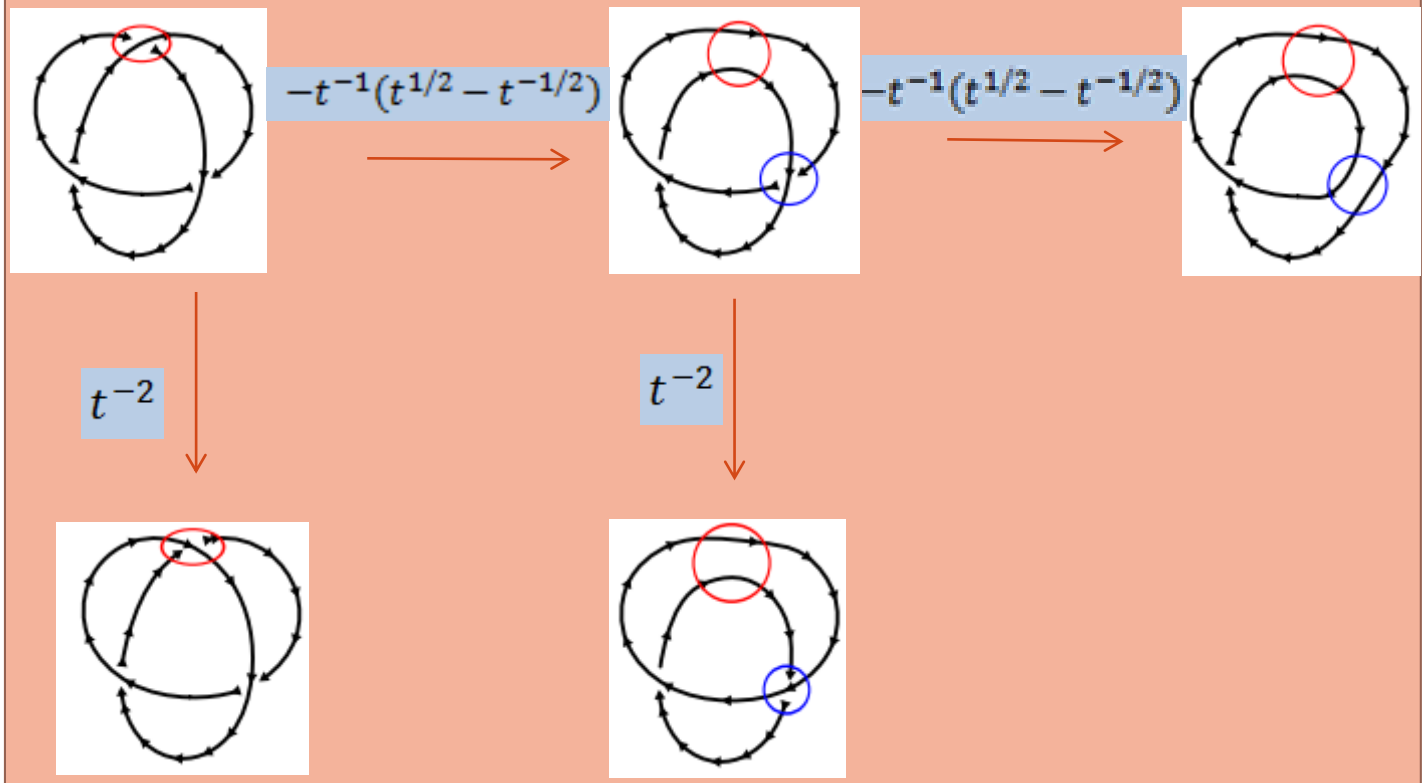
Wielomiany Jonesa trójlistników

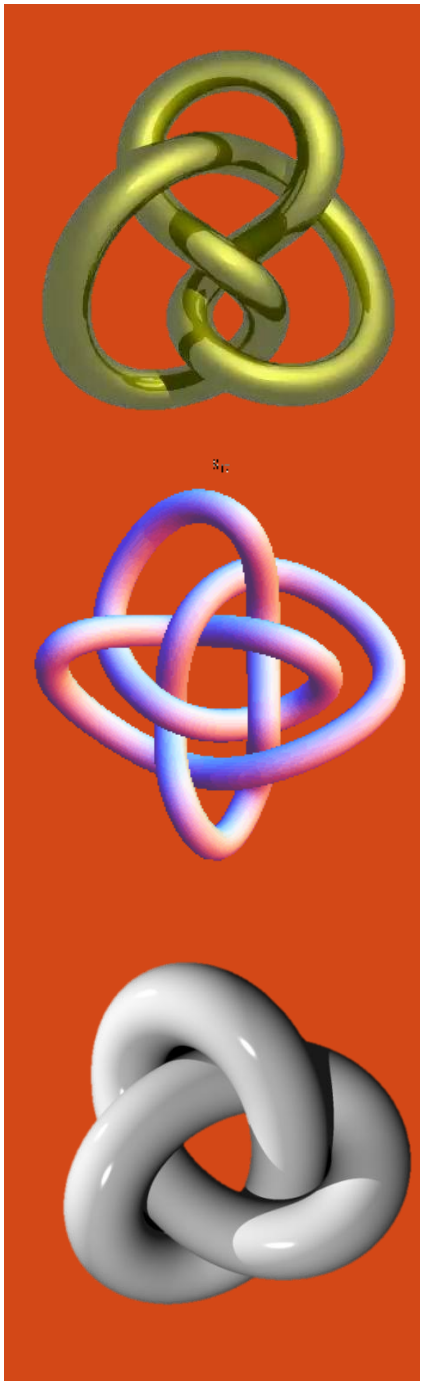
- Lewoskrętnego : $V(t) = t^{-1} + t^{-3} + t^{4}$

Znając jeden z tych wielomianów Jonesa, drugi można obliczyć zastępując t przez t^{-1} w znanym wielomianie



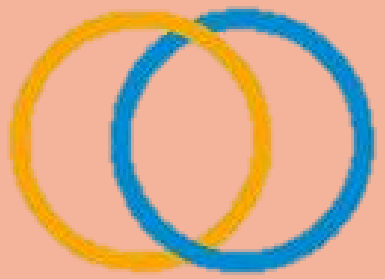
Obliczenie wielomianu Jonesa trójlistnika lewoskrętnego





Wielomiany Jonesa splotów

❖ Hopfa

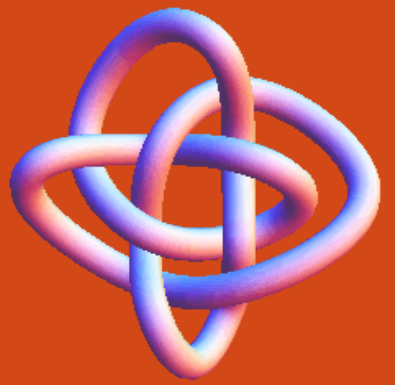


$$V_L(t) = \sqrt{t} + \left(\sqrt{t}\right)^5 = (1 + t^2)\sqrt{t}$$

Wielomiany Jonesa splotów

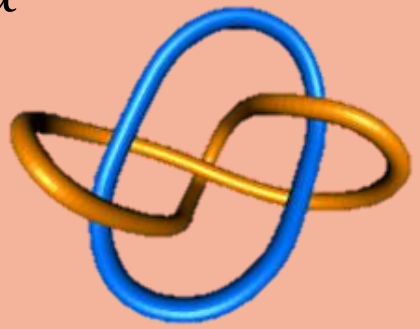
- Pierścień Bromoeuszy

$$V_L(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t + 4 - 2t^{-1} + 3t^{-2} - t^{-3}$$

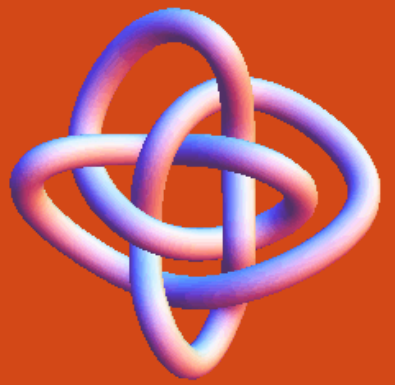


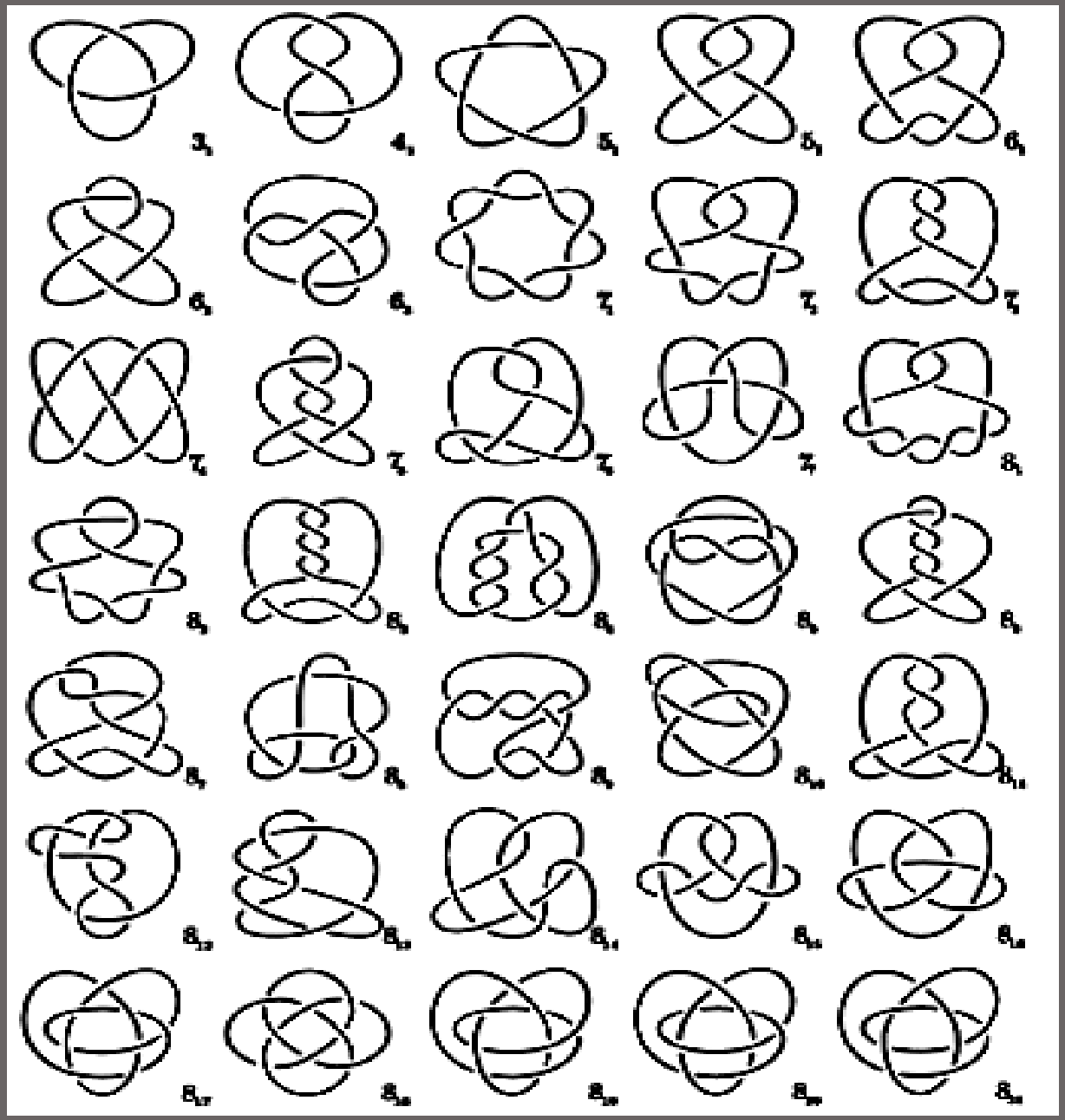
Wielomiany Jonesa splotów

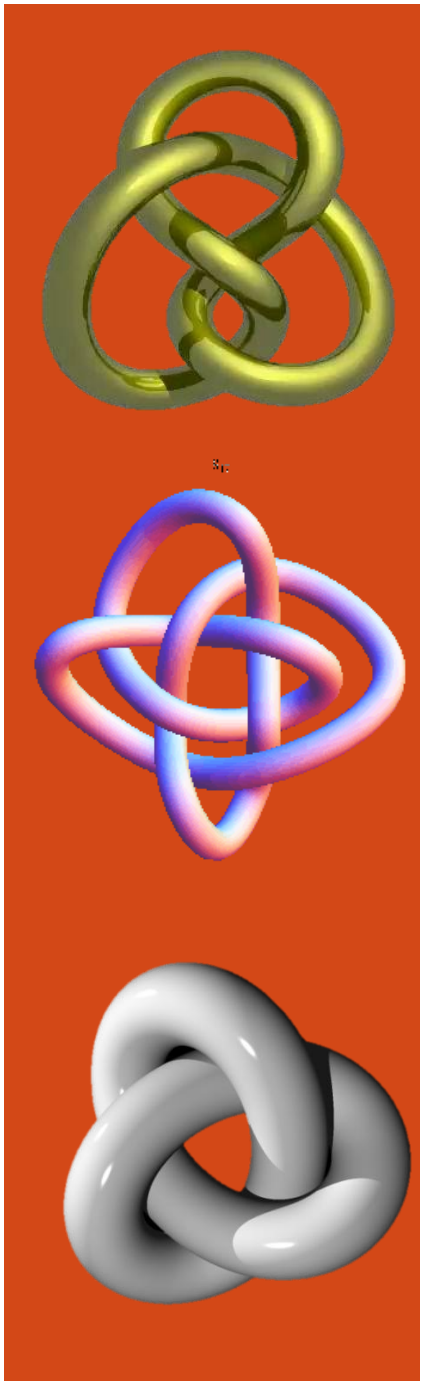
- Whiteheada



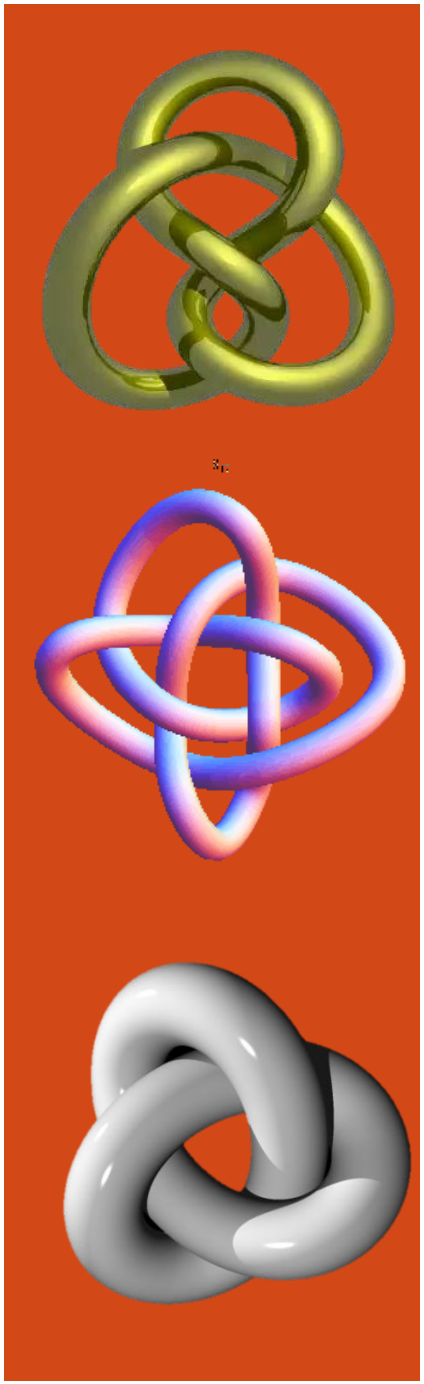
$$V_L(t) = -\left(\sqrt{t}\right)^{-3} + \left(\sqrt{t}\right)^{-1} - 2\sqrt{t} + \left(\sqrt{t}\right)^{3} - 2\left(\sqrt{t}\right)^{5} + \left(\sqrt{t}\right)^{7}$$
$$= \left(-1 + t - 2t^2 + t^3 - 2t^4 + t^5\right)\left(\sqrt{t}\right)^{-3}$$







Węzeł	Wielomian Aleksandra	Wielomian Jonesa
3_1	$(-1)[1-1+1]$	$(1)[1+0+1-1]$
4_1	$(-1)[-1+3-1]$	$(-2)[1-1+1-1+1]$
5_1	$(-2)[1-1+1-1+1]$	$(2)[1+0+1-1+1-1]$
5_2	$(-1)[2-3+2]$	$(1)[1-1+2-1+1-1]$
6_1	$(-1)[-2+5-2]$	$(-2)[1-1+2-2+1-1+1]$
6_2	$(-2)[-1+3-3+3-1]$	$(-1)[1-1+2-2+2-2+1]$
6_3	$(-2)[1-3+5-3+1]$	$(-3)[-1+2-2+3-2+2-1]$
7_1	$(-3)[1-1+1-1+1-1+1]$	$(3)[1+0+1-1+1-1+1-1]$
7_2	$(-1)[3-5+3]$	$(1)[1-1+2-2+2-1+1-1]$
7_3	$(-2)[2-3+3-3+2]$	$(2)[1-1+2-2+3-2+1-1]$
7_4	$(-1)[4-7+4]$	$(1)[1-2+3-2+3-2+1-1]$
7_5	$(-2)[2-4+5-4+2]$	$(2)[1-1+3-3+3-3+2-1]$
7_6	$(-2)[-1+5-7+5-1]$	$(-1)[1-2+3-3+4-3+2-1]$
7_7	$(-2)[1-5+9-5+1]$	$(-3)[-1+3-3+4-4+3-2+1]$
8_1	$(-1)[-3+7-3]$	$(-2)[1-1+2-2+2-2+1-1+1]$
8_2	$(-3)[-1+3-3+3-3+3-1]$	$(0)[1-1+2-2+3-3+2-2+1]$
8_3	$(-1)[-4+9-4]$	$(-4)[1-1+2-3+3-3+2-1+1]$
8_4	$(-2)[-2+5-5+5-2]$	$(-3)[1-1+2-3+3-3+3-2+1]$
8_5	$(-3)[-1+3-4+5-4+3-1]$	$(0)[1-1+3-3+3-4+3-2+1]$
8_6	$(-2)[-2+6-7+6-2]$	$(-1)[1-1+3-4+4-4+3-2+1]$
8_7	$(-3)[1-3+5-5+5-3+1]$	$(-2)[-1+2-2+4-4+4-3+2-1]$
8_8	$(-2)[2-6+9-6+2]$	$(-3)[-1+2-3+5-4+4-3+2-1]$
8_9	$(-3)[-1+3-5+7-5+3-1]$	$(-4)[1-2+3-4+5-4+3-2+1]$
8_{10}	$(-3)[1-3+6-7+6-3+1]$	$(-2)[-1+2-3+5-4+5-4+2-1]$
8_{11}	$(-2)[-2+7-9+7-2]$	$(-1)[1-2+4-4+5-5+3-2+1]$
8_{12}	$(-2)[1-7+13-7+1]$	$(-4)[1-2+4-5+5-5+4-2+1]$
8_{13}	$(-2)[2-7+11-7+2]$	$(-3)[-1+3-4+5-5+5-3+2-1]$
8_{14}	$(-2)[-2+8-11+8-2]$	$(-1)[1-2+4-5+6-5+4-3+1]$
8_{15}	$(-2)[3-8+11-8+3]$	$(2)[1-2+5-5+6-6+4-3+1]$
8_{16}	$(-3)[1-4+8-9+8-4+1]$	$(-2)[-1+3-4+6-6+6-5+3-1]$
8_{17}	$(-3)[-1+4-8+11-8+4-1]$	$(-4)[1-3+5-6+7-6+5-3+1]$
8_{18}	$(-3)[-1+5-10+13-10+5-1]$	$(-4)[1-4+6-7+9-7+6-4+1]$
8_{19}	$(-3)[1-1+0+1+0-1+1]$	$(3)[1+0+1+0+0+1]$
8_{20}	$(-2)[1-2+3-2+1]$	$(-1)[-1+2-1+2-1+1-1]$
8_{21}	$(-2)[-1+4-5+4-1]$	$(1)[2-2+3-3+2-2+1]$



BIBLIOGRAFIA

- http://www.math.utah.edu/mathcircle/notes/knots2.pdf
- https://math.berkeley.edu/~vfr/jones.pdf
- http://mathworld.wolfram.com/ConwayPolynomial.html
- http://www.marynka.edu.pl/images/files/pdf/innowacje/matematyka_wielomiany.pdf
- http://www.cs.columbia.edu/~cs6204/files/Lec9b,10.pdf