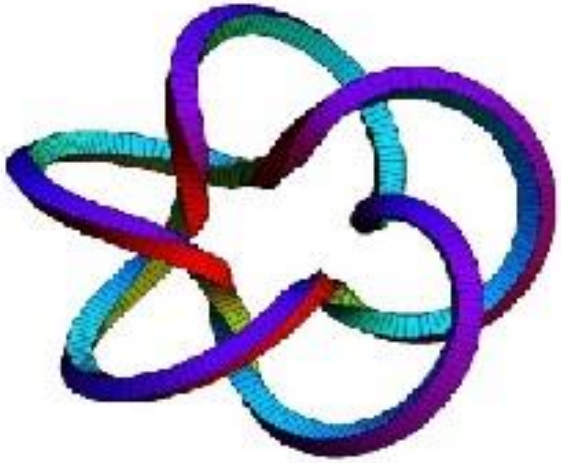
Teoria węzłów matematycznych - warkocze

Karolina Krzysztoń
10B2

Pojęcie węzła

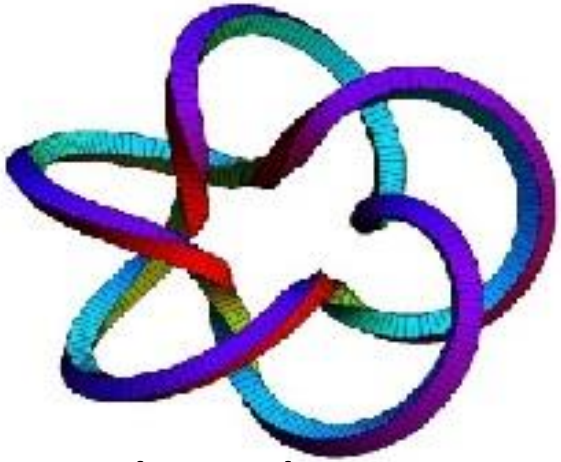


W matematyce węzły to zamknięte pętle umieszczone w przestrzeni trójwymiarowej, czyli zaplątane sznurki z połączonymi końcami.

-Jak stwierdzić, czy z jednego ułożenia sznurka można przejść do drugiego?

-Oczywiście nie zawsze można, ponieważ większość węzłów nie daje się rozplątać do okrągłej ("trywialnej") pętli.

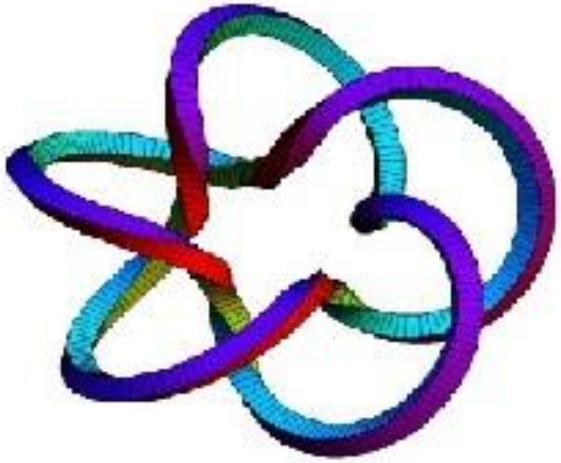
Pojęcie splotu



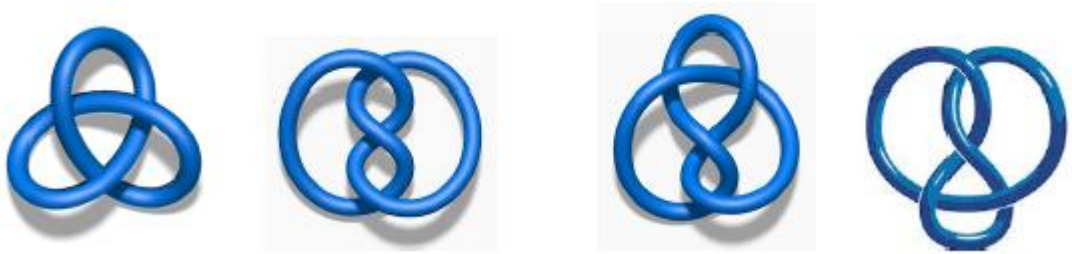
- Splot L to suma skończonej ilości węzłów wzajemnie rozłącznych, zwanych składowymi splotu, które mogą być zasupłane i splecione ze sobą. Węzeł jest splotem o jednej składowej.

- Po wybraniu orientacji w każdej składowej danego splotu mówimy już o splocie zorientowanym.

Równoważność węzłów i splotów

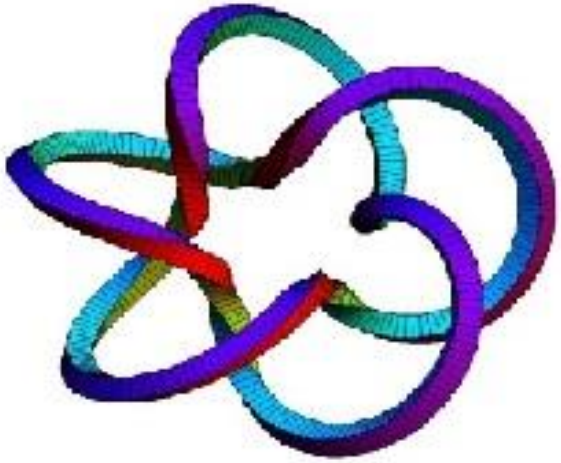


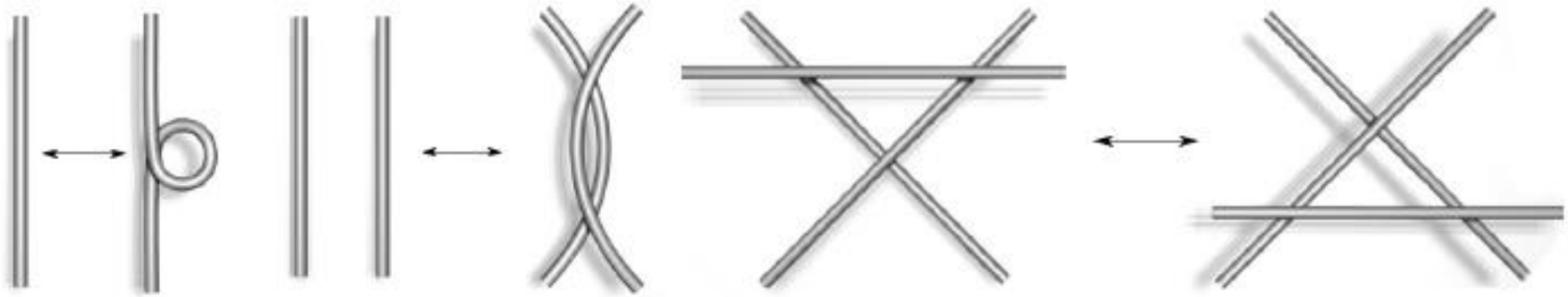
- Jak matematycznie wypowiedzieć fakt, że dwa węzły (sploty) są podobnie zasupłane (zasupłane i splecione ze sobą)?



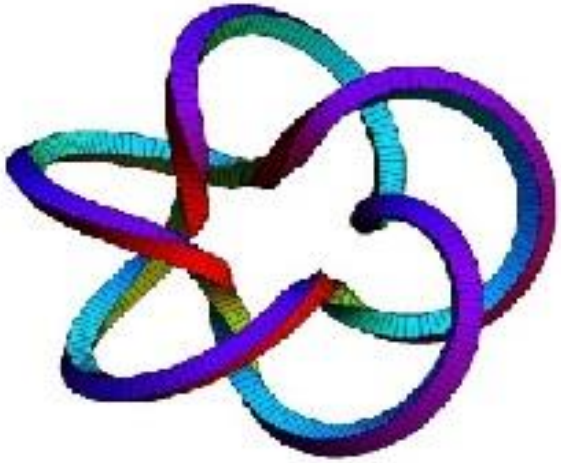
- Dwa węzły (sploty) są równoważne, jeżeli jeden na drugi można przekształcić za pomocą skończonej liczby następujących trzech ruchów opisanych przez K. Reidemeistera w 1926 roku.

Ruchy opisane przez K. Reidemeistera w 1926 roku

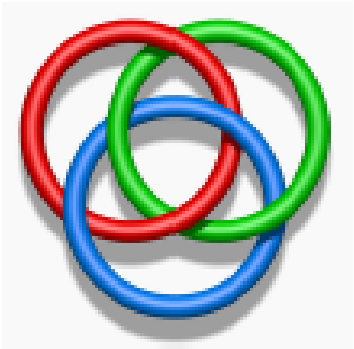




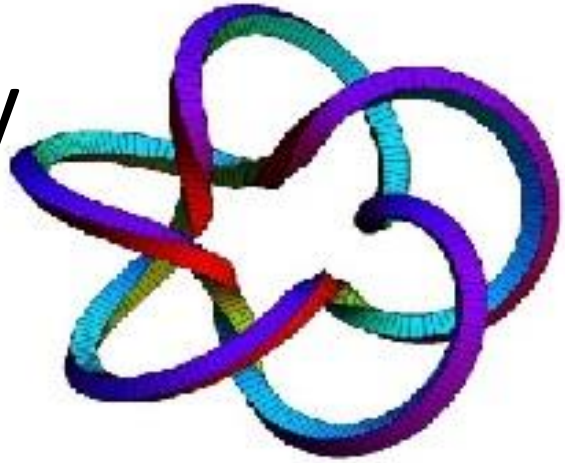
Węzeł rozsupłany

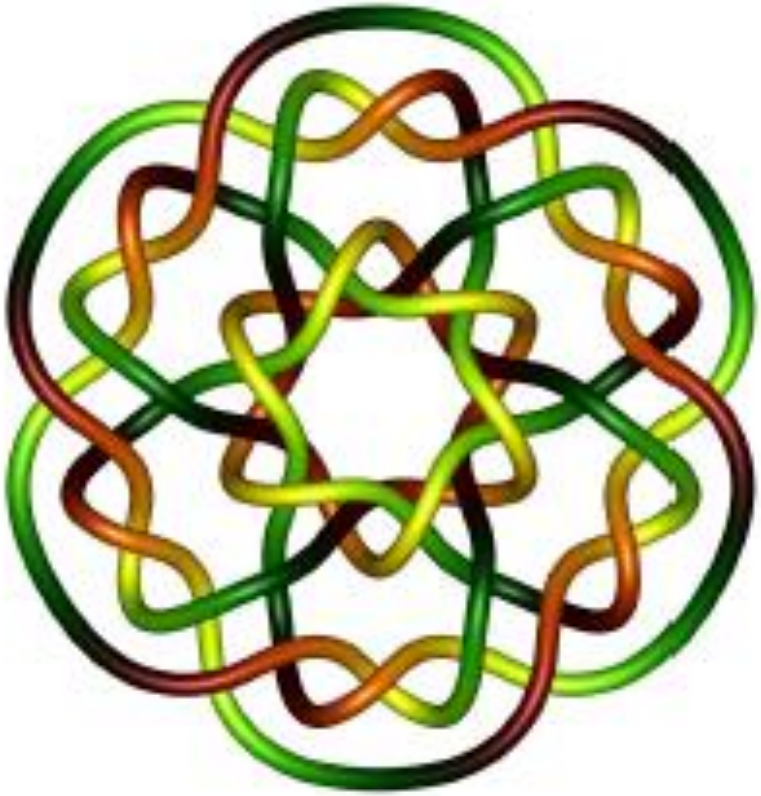


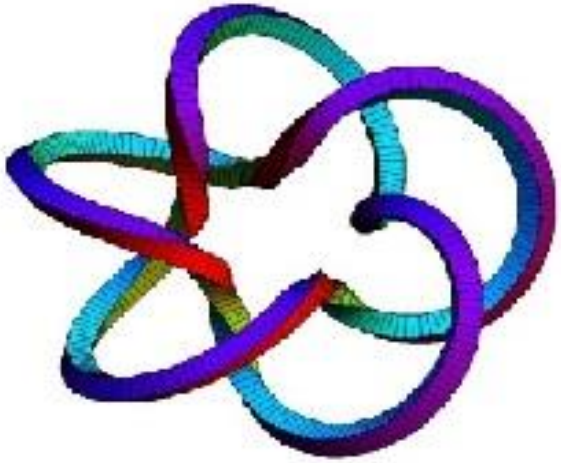
- Mówimy, że węzeł (splot) jest rozsupłany, jeżeli jest równoważny z okręgiem (sumą okręgów parami rozłącznych) położonych na płaszczyźnie. W przeciwnym razie mówimy, że jest on zasupłany.



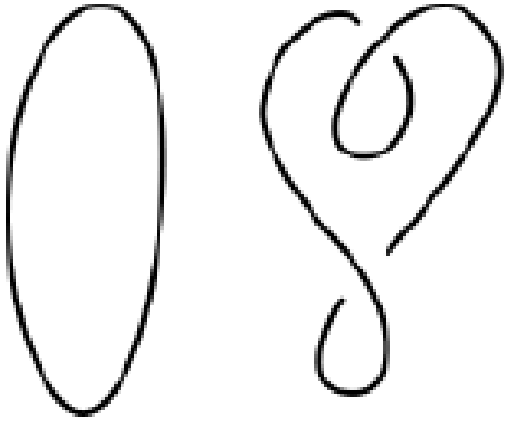
Czy ten splot jest rozsupłany czy zasupłany?

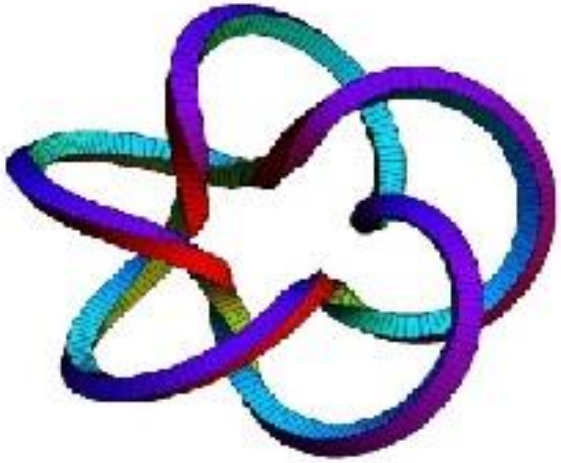




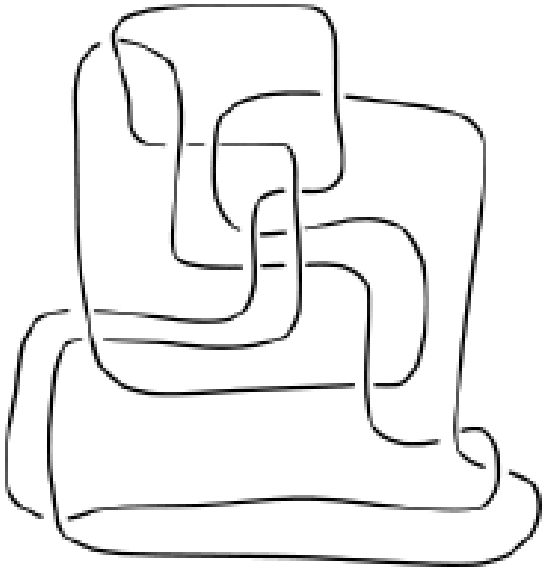


- Każdy węzeł o dwóch skrzyżowaniach jest rozsupłany co łatwo można stwierdzić za pomocą ruchów Reidemeistera.



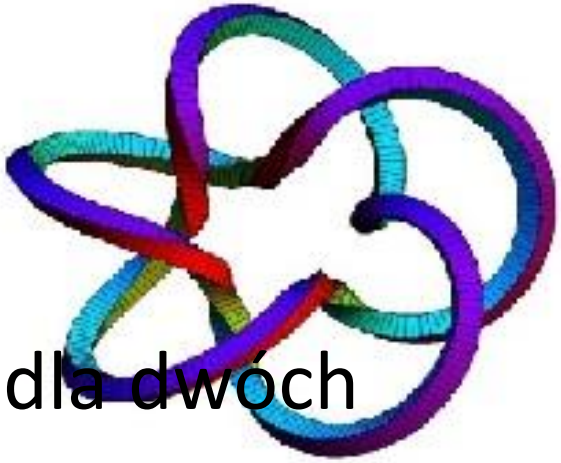


- Ten węzeł o piętnastu skrzyżowaniach też jest rozsupłany

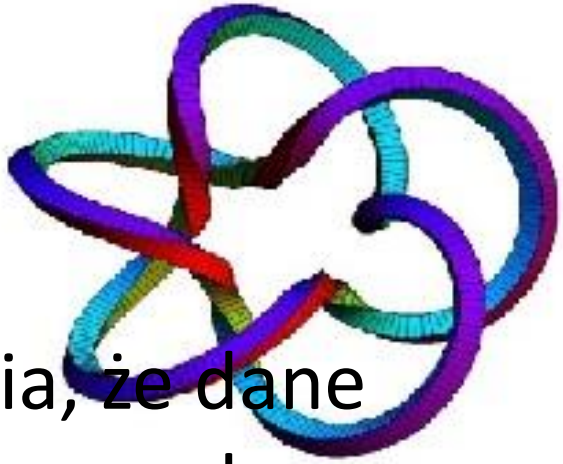


Niezmienniki węzłów

- Dana własność węzła (splotu) jest jego niezmiennikiem, jeżeli nie ulega zmianie podczas żadnego z trzech ruchów Reidemeistera.
- Jeżeli więc dwa sploty są równoważne, to niezmiennik jest zgodny dla obu splotów. Zwykle stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tj. istnieją nierównoważne sploty o zgodnych niezmiennikach.

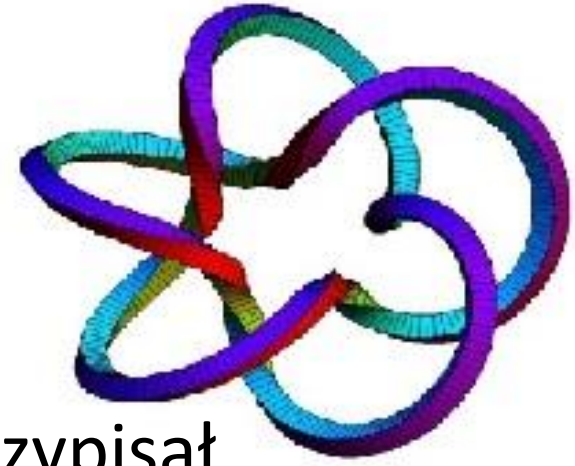


- Jeśli jednak niezmiennik różni się dla dwóch splotów, to sploty te nie są ze sobą równoważne. Taka jest właśnie rola niezmienników: wskazać, że dane sploty nie są ze sobą równoważne.



- Niezmienniki te służą do wskazania, że dane węzły, czy sploty, nie są podobnie zasupłane. Znajdują tym samym zastosowanie przy rozwiązywaniu problemów natury klasyfikacyjnej.

Vaughan Frederick Randal Jones

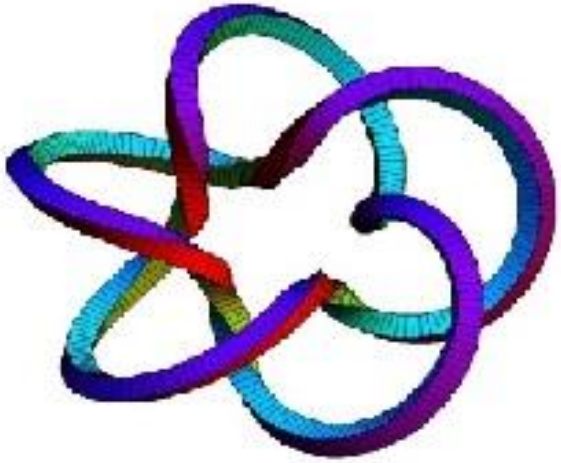


- W 1984 roku Vaughan F. R. Jones przypisał każdemu splotowi zorientowanemu L wielomian Laurenta $V_L(t)$ zmiennej √t:

- $\cdots + c_{-2}(\sqrt{t})^{-2} + c_{-1}(\sqrt{t})^{-1} + c_0 + c_1(\sqrt{t}) + c_2(\sqrt{t})^2 + \cdots$

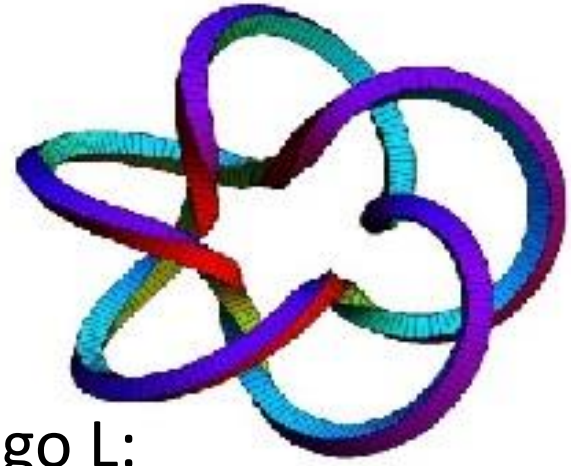
- o współczynnikach całkowitych $c_i = c_i(L)$, przy czym ci 6= 0 dla skończonej liczby indeksów i = 0, ±1, ±2, . . . , a poza tym ci = 0.

Twierdzenie Jonesa



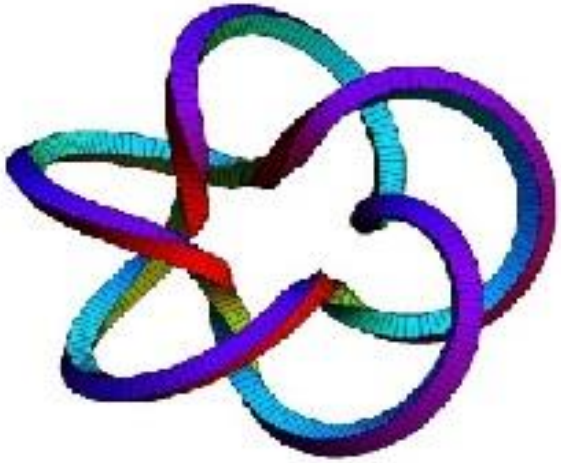
- Wielomian $V_L(t)$ jest niezmiennikiem splotów: $V_L(t) = V_{L0}(t)$, tj. $c_i(L) = c_i(L\ 0\ )$, gdy sploty L oraz L_0 są ze sobą równoważne.

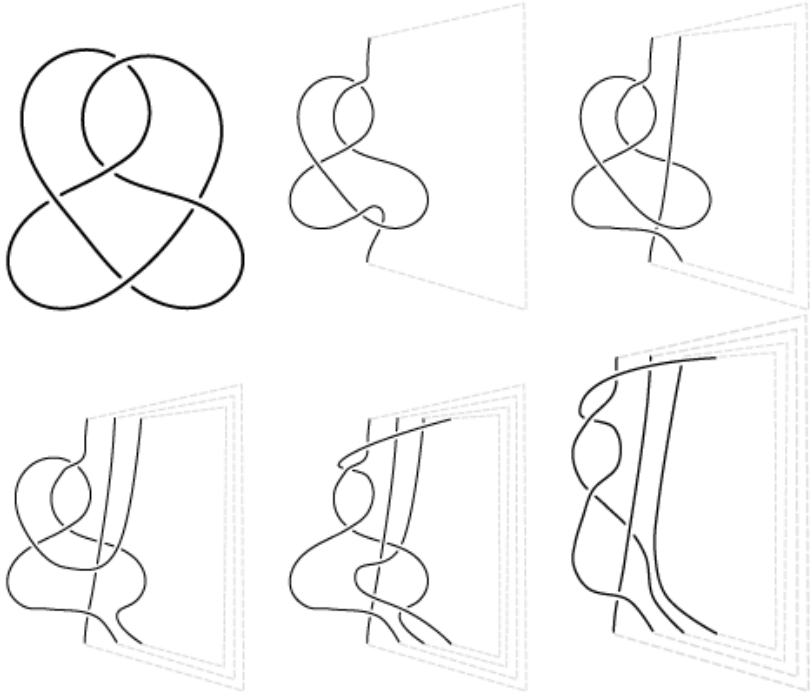
Definicja wielomianu Jonesa



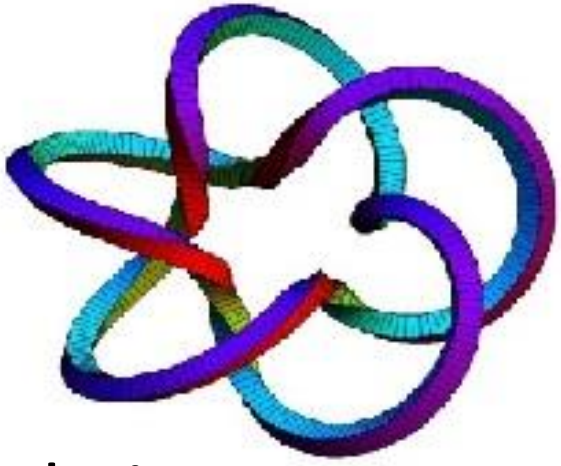
- Wielomian Jonesa splotu zorientowanego L:
- $V_L(t) := (\sqrt{t})^{1-n+e(\beta)} (-t-1)^{n-1} \operatorname{trace} \rho(\beta)$
- β jest warkoczem o n pasmach, którego zamknięciem jest L.
- e(β) jest sumą wykładników w przedstawieniu warkocza β za pomocą generatorów $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ grupy n-warkoczy, n 2. trace ρ(β) jest śladem macierzy Burau ρ(β) warkocza β.

Jak określić warkocz β, którego zamknięciem jest dany splot L?

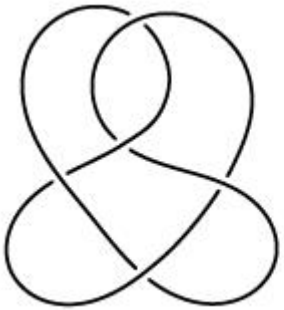




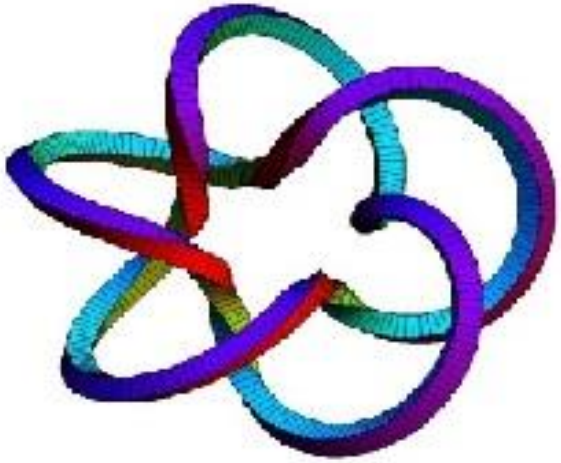
Twierdzenia Alexandera i Markowa



- Każdy węzeł (splot) ma postać zamkniętego warkocza.

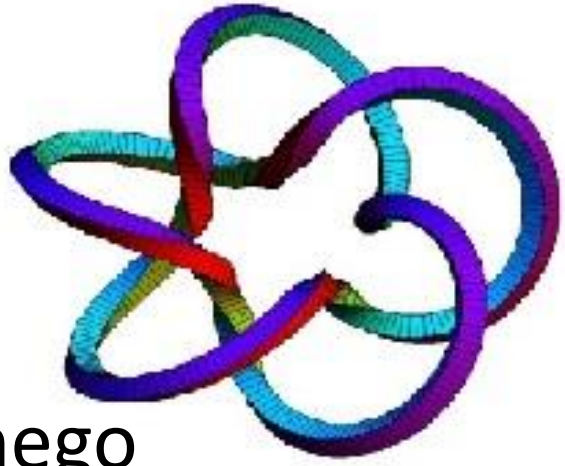


Twierdzenie Markowa

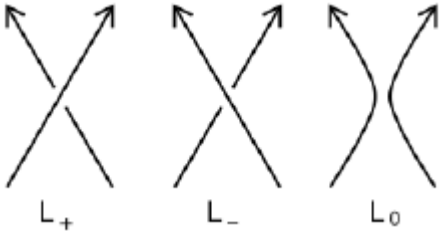


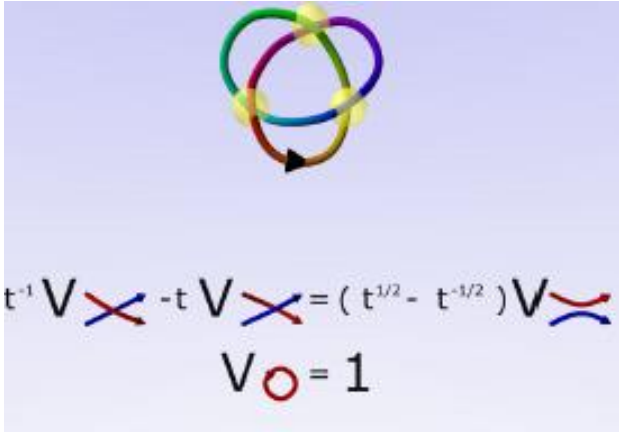
- Dwa warkocze, być może o różnej ilości pasm, po zamknięciu są równoważne jako węzły (sploty) wtedy i tylko wtedy, gdy warkocze te powstają jeden z drugiego przez skończoną ilość dwóch typów ruchów, zwanych dziś ruchami Markowa.

SK-relacje dla wielomianów Jonesa

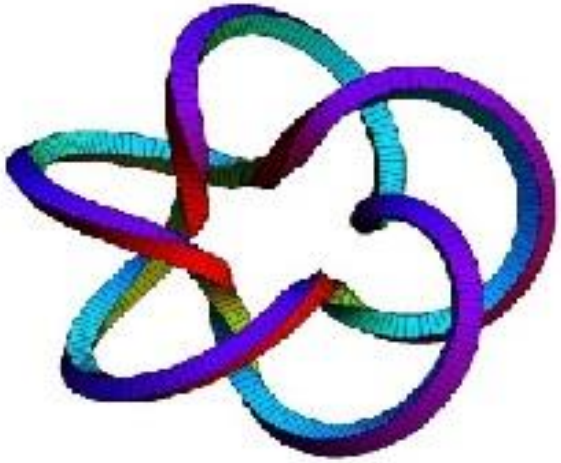


- Wielomian Jonesa węzła rozsupłanego
- Vo(t) = 1.
- $t^{-1} V_{L+}(t) - tV_{L-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L0}(t)$ dla dowolnych trzech splotów zorientowanych L_+, L_-, L_0 różniących się od siebie tylko w jednym fragmencie splotu:

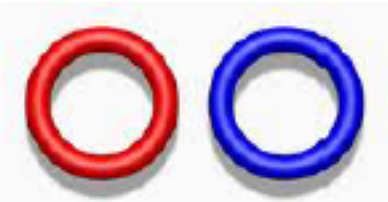




Wielomian Jonesa splotu rozsupłanego



- złożonego z dwóch składowych:



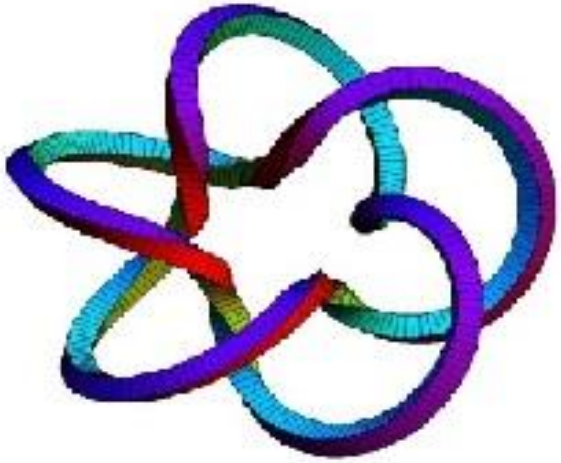
- We wzorze:

$$t^{-1}V_{L+}(t) - tV_{L-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L0}(t)$$

- możemy przyjąć, że $L_0 = 2o$ oraz $L_+ = L_- = o$, co daje

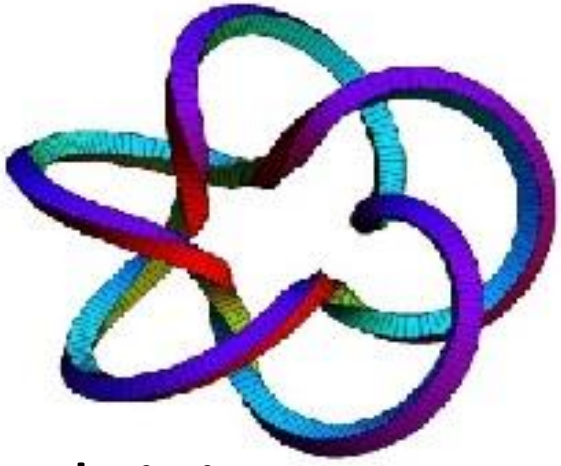
$$V_{2o}(t) = (t^{-1} - t)(t^{1/2} - t^{-1/2})^{-1} = -t^{-1/2} - t^{1/2}$$

..złożonego z n składowych



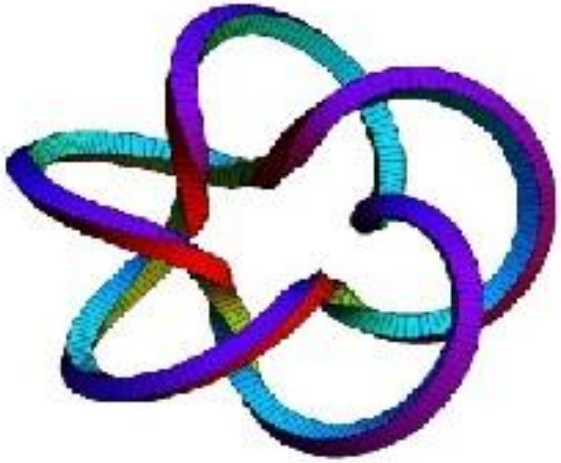
- $n \geq 1$: $V_{no}(t) = (-1)^{n-1}(t^{-1/2} + t^{1/2})^{n-1}$

Pojęcie grupy

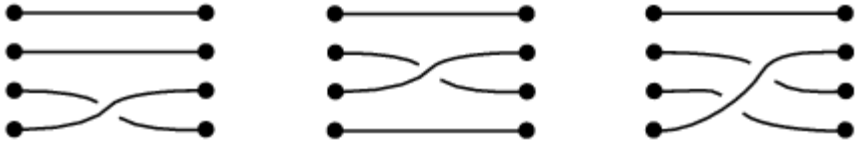


- Grupą nazywamy strukturę $(G,\cdot)$, spełniającą warunki:
- działanie $\cdot$ jest łączne, tzn. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ dla wszelkich $x, y, z \in G$;
- istnieje element neutralny, tj. taki element $e \in G$, że $x \cdot e = e \cdot x = x$ dla każdego $x \in G$;
- każdy element $x \in G$ ma element odwrotny, tj. taki element $x^{-1} \in G$, że $x \cdot x^{-1} = e = x^{-1} \cdot x$.

Grupa B_n warkoczy o n pasmach, $n \geq 1$

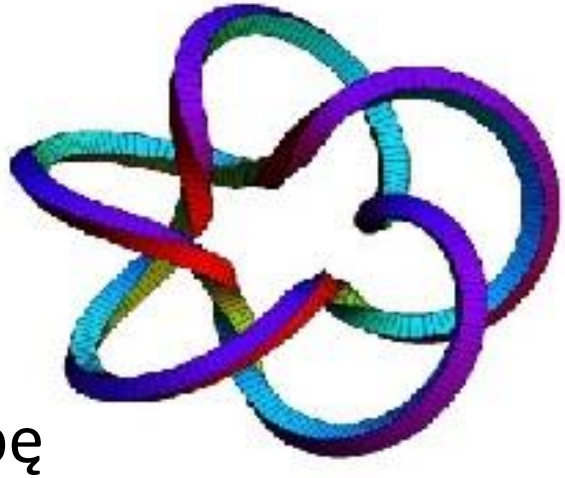


Drugi warkocz nie jest równoważny z pierwszym, ale jest równoważny z trzecim.

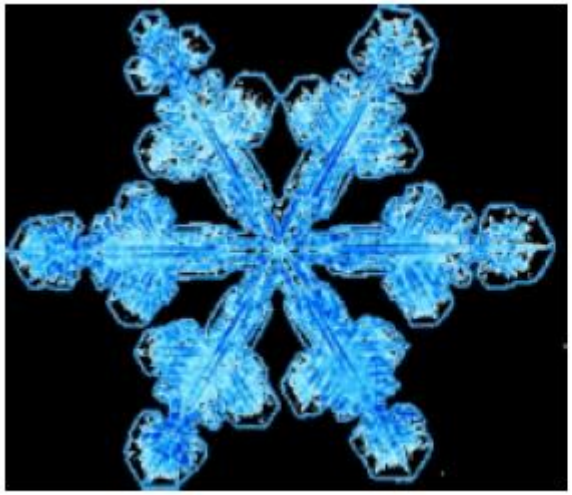


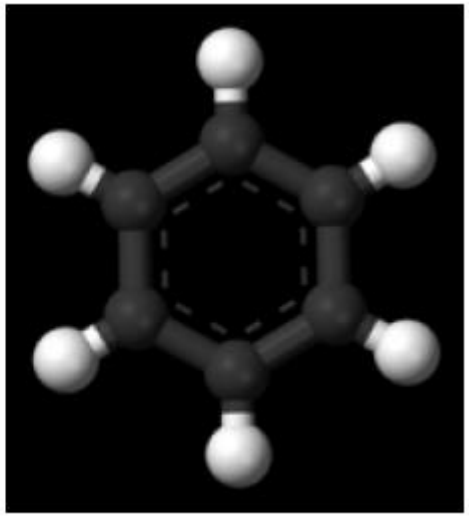
Iloczyn pierwszych dwóch warkoczy jest trzecim warkoczem

Grupa diedralna D_n

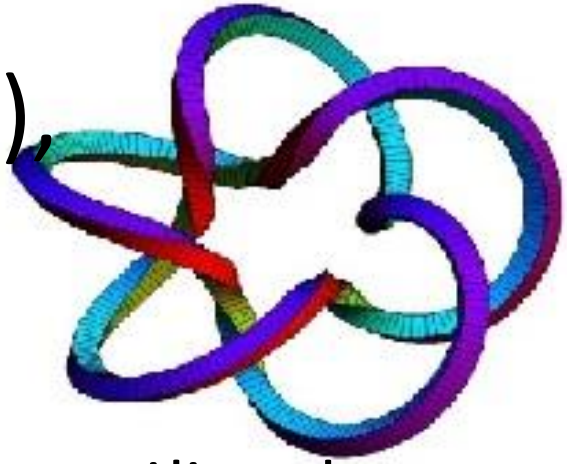


- Dla $n \geq 3$ symbolem D_n oznacza się grupę wszystkich symetrii własnych n-kąta foremnego.
- Ma ona dokładnie 2n elementów.
- Np. dla n = 6 to nic innego jak wspomniana grupa obrotów dysku sześciokątnego.





Grupy liczbowe (R, +), (R+, ·), (Q, +), (Q+, ·), (Z, +)

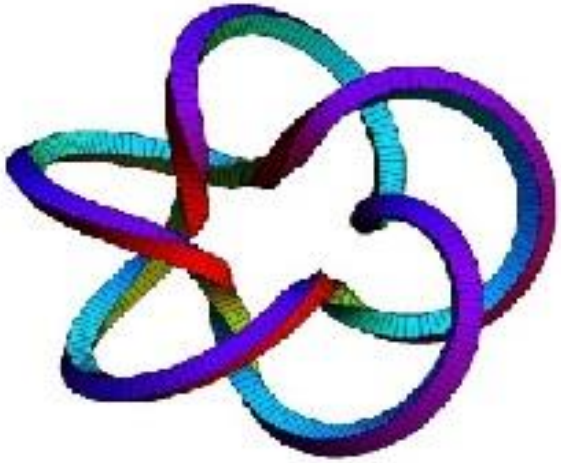


- Grupy reszt modulo n Z_n oznacza grupę możliwych reszt z dzielenia przez n, tj. zbiór {0, 1, . . . , n − 1} z działaniem dodawania modulo n.
- Na przykład:

Tabelka działania w grupie (Z_3, +)

	0	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Grupy permutacji S_n

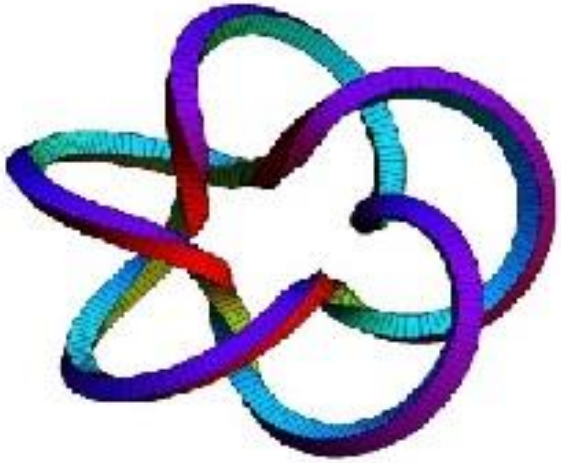


- Dla każdego $n \in N$ symbol S_n oznacza grupę permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, z działaniem składania permutacji.
- Grupa S_n ma $n!$ elementów.

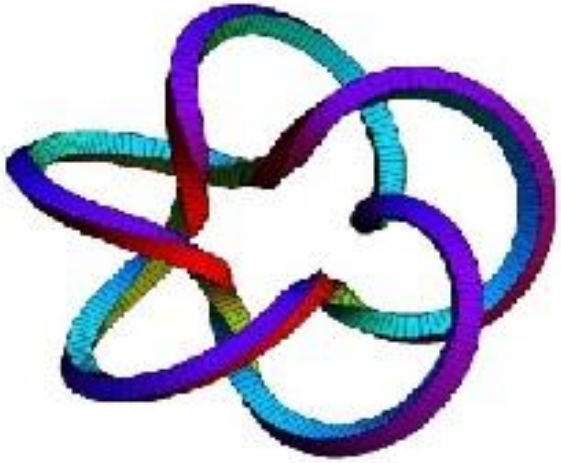
Przykład:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \sigma\tau$$

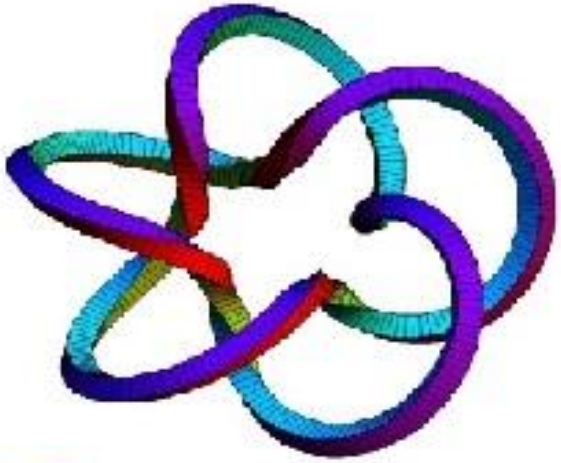


Grupy warkoczy B_n

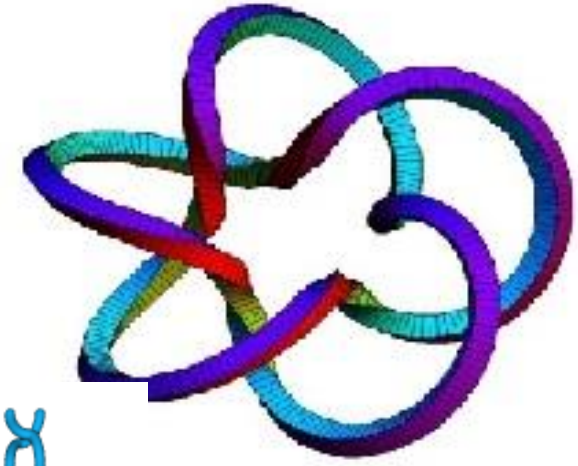


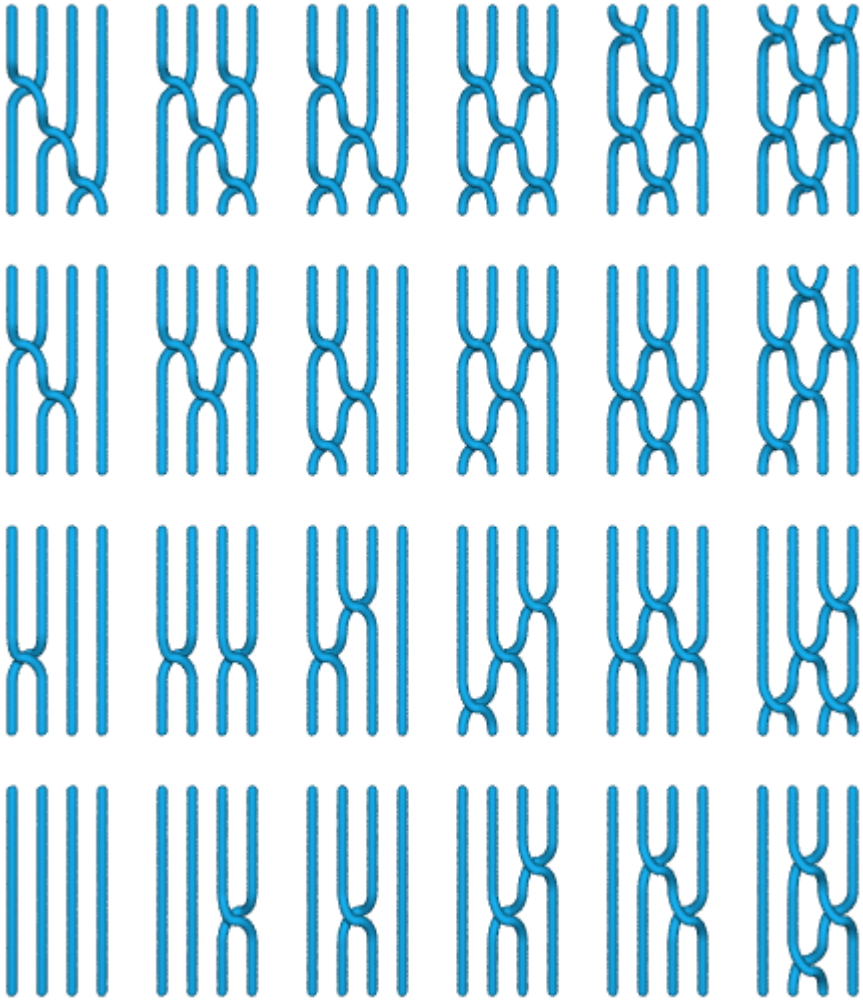
- Niech $n \in N$.
- Symbol B_n oznacza zbiór wszystkich warkoczy, złożonych z n strun rozpiętych pomiędzy n punktami położonymi na dwóch równoległych płaszczyznach. Warkocze utożsamiamy „homeomorficznie”.

Przykłady warkoczy z B_3 i B_4

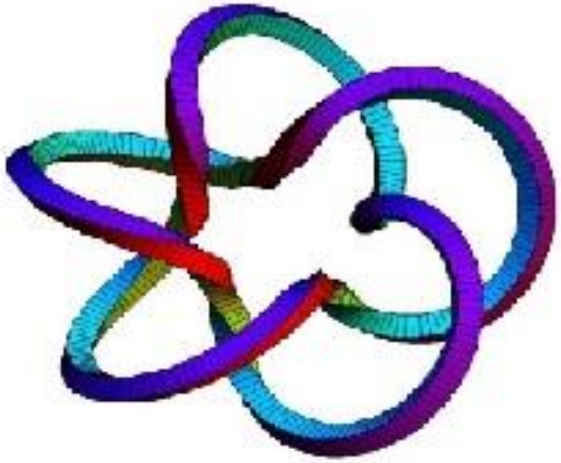


Wszystkie 24 permutacje 4 elementowej grupy warkoczowej





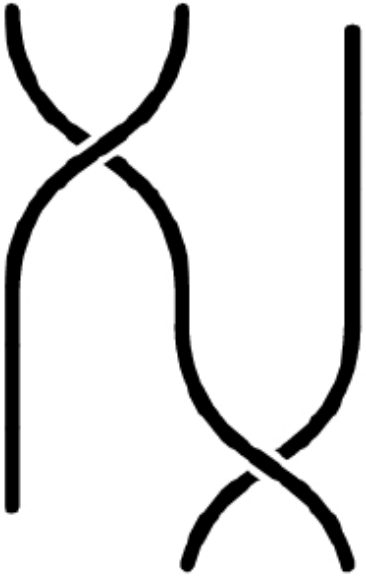
Dodawanie warkoczy



- polega na naturalnym złożeniu:

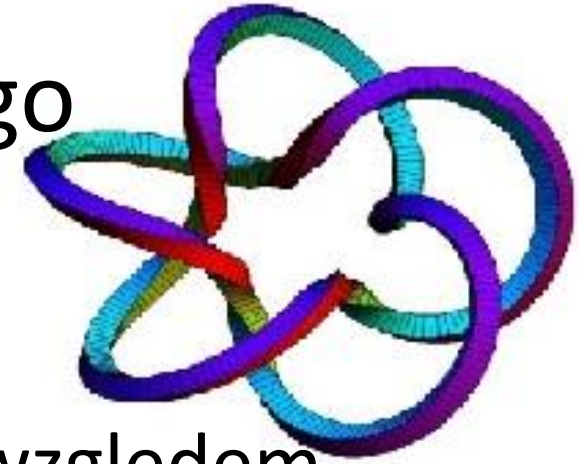
warkocz *a*

warkocz *B*



warkocz *aB*

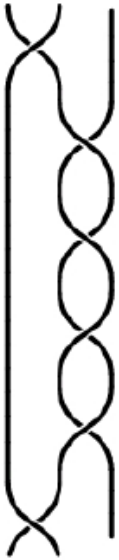
Branie elementu odwrotnego do danego warkocza



- polega na odbiciu symetrycznym względem dolnej płaszczyzny:

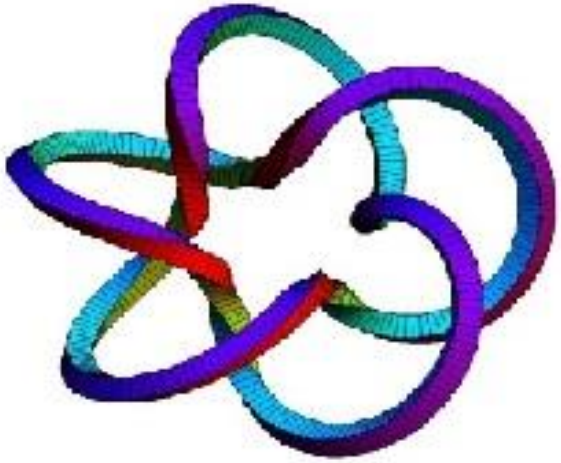
warkocz aBB

warkocz $bbA = (aBB)^{-1}$

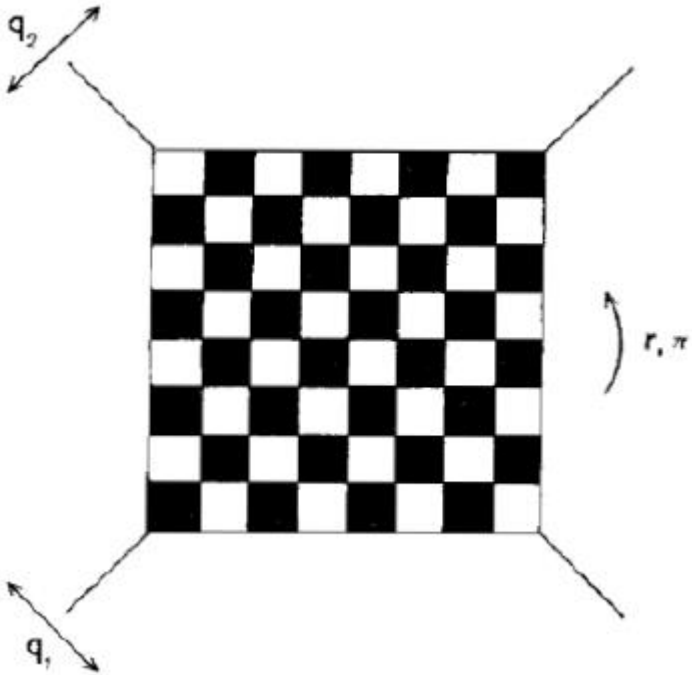


warkocz $aBBbbA = e$
(jedynka grupy B_3)

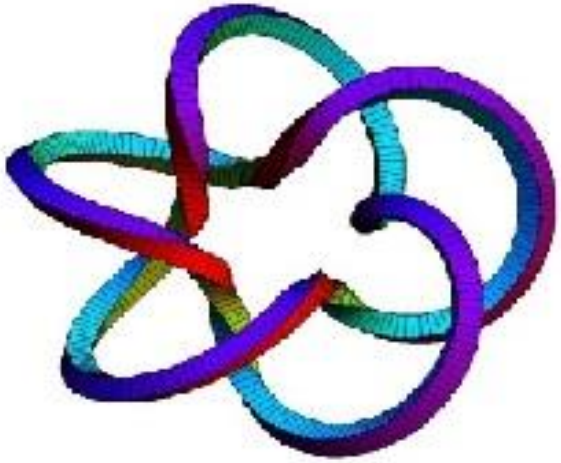
Izomorfizm grup



- Izometrie szachownicy: identyczność e,
- obrót r o kąt 180◦ wokół środka,
- symetrie q_1 i q_2 względem zaznaczonych diagonali



- Grupa izometrii szachownicy a grupa liczb {1, 3, 5, 7} z działaniem mnożenia modulo 8



	e	r	q_1	q_2
e	e	r	q_1	q_2
r	r	e	q_2	q_1
q_1	q_1	q_2	e	r
q_2	q_1	q_2	r	e

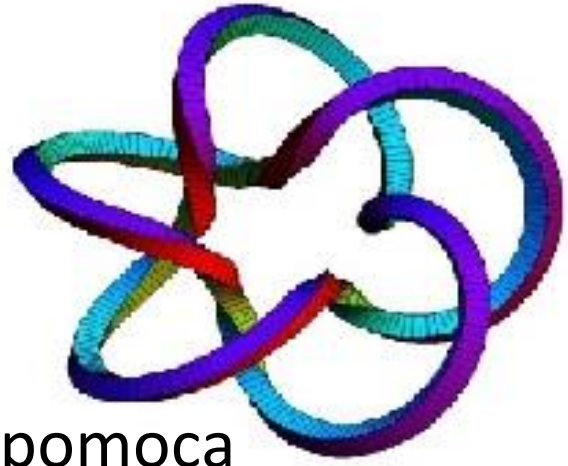
	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Te dwie struktury są identyczne w sensie teorii grup.

Definicja Grupy $(G, \cdot)$ i $(H, *)$ nazywamy izomorficznymi, jeżeli istnieje takie wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie

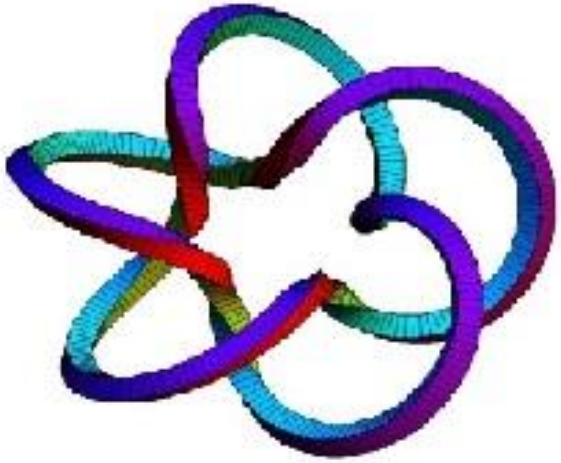
$$f : G \to H, \text{ że } f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

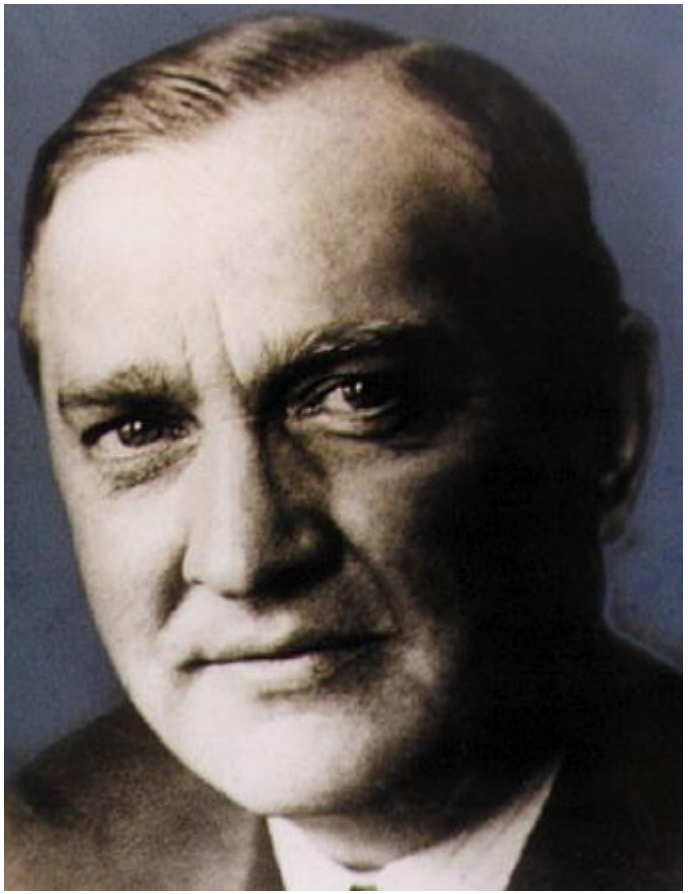
Obiekty proste w teorii grup



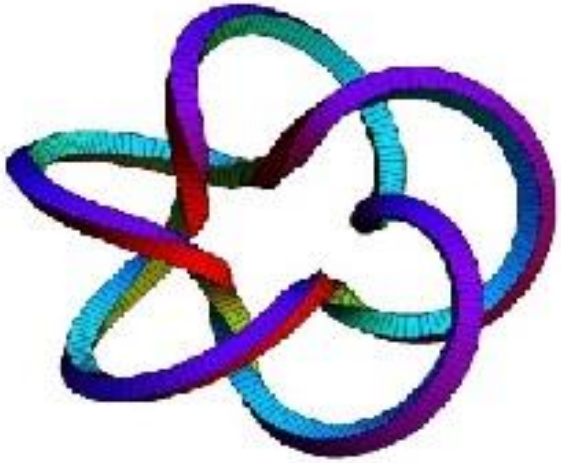
- Każdy warkocz można wygenerować za pomocą najprostszych warkoczy typu a i A. Dokładniej mówiąc: grupa warkoczy B_n daje się wygenerować za pomocą n−1 warkoczy prostych oraz warkoczy do nich „odwrotnych”;
- grupy (R, +) nie da się wygenerować za pomocą skończenie wielu elementów;
- grupa (Z, +), oraz wszystkie grupy (Z_n, +), są generowane przez 1 element (przez jedynkę). Taką grupą jest na przykład grupa symetrii piramidy, która jest izomorficzna z (Z_{12}, +).

- Matematyk to ktoś, kto dostrzega analogie między twierdzeniami, dobry matematyk – analogie między dowodami, wybitny matematyk – analogie między teoriami, zaś genialny matematyk – analogie między analogiami.





Stefan Banach (1892–1945)



Źródła:

- http://www.marynka.edu.pl/images/files/pdf/
- innowacje/matematyka_wielomiany.pdf
- http://www.msn.ap.siedlce.pl/smp/msn/12/39-43.pdf
- http://www.math.edu.pl/permutacje
- http://www.impan.pl/~tkoch/talks/pi_%282012%29.pdf
- http://www.ms.unimelb.edu.au/publications/Chiodo.pdf