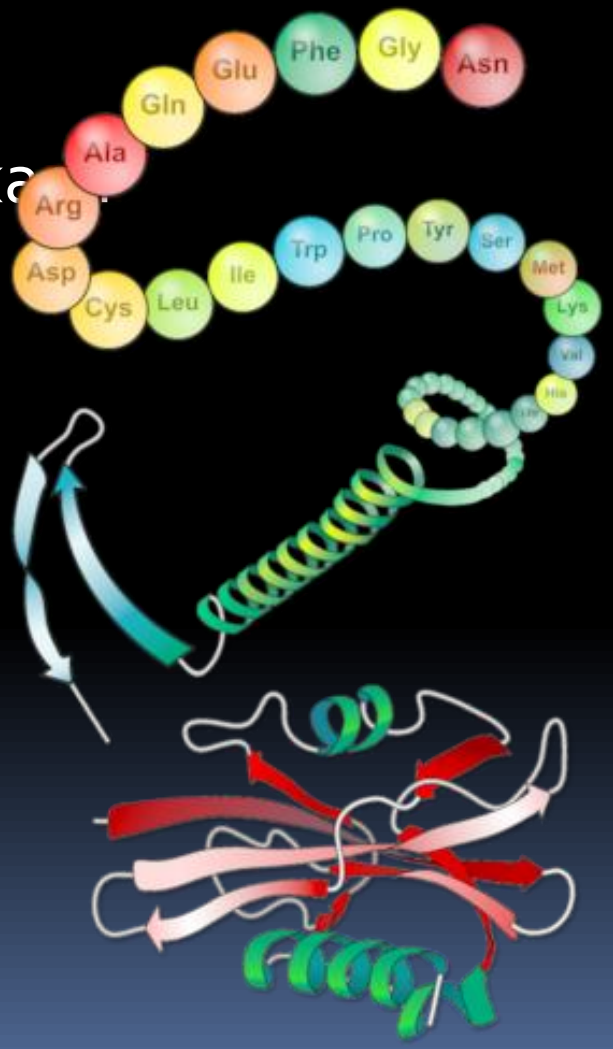
TEORIA WĘZŁÓW

Natalia Grzechnik
10B2

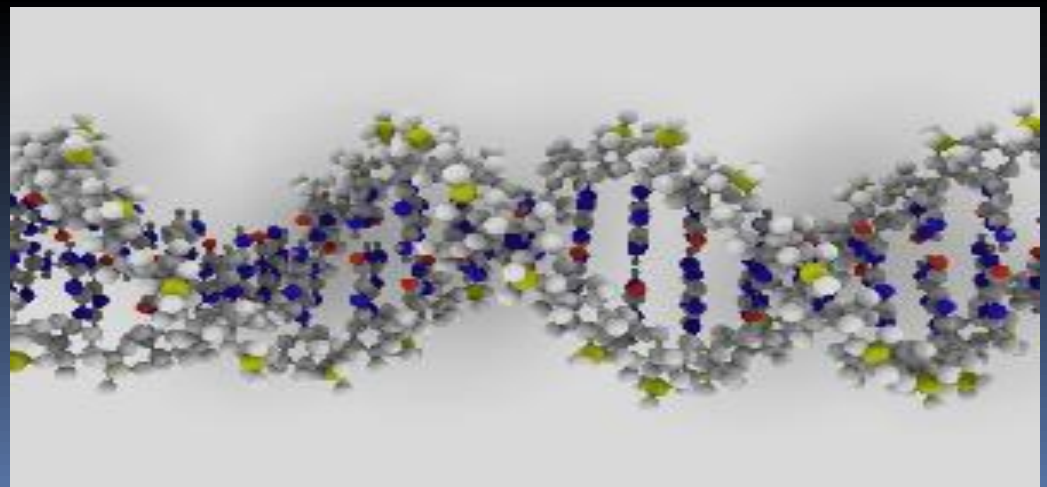
Słowem wstępu – zastosowanie teorii węzłów

- Biologiczna rola węzłów w białkach
- Wyznaczanie topologii białek
- Kryptografia
- Biofizyka
- Opis struktur DNA, RNA, białek

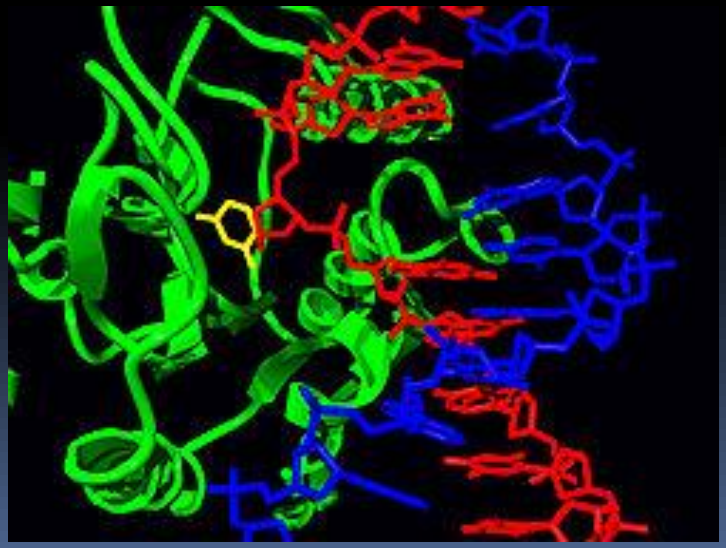


DNA a Teoria Węzłów

- DNA wyobrażamy sobie podobnie, jak rysunek poniżej. W rzeczywistości podwójna helisa DNA zbudowana jest z dwóch długich krzywych które przeplatają się miliony razy. Nici DNA są szerokie jedynie na kilka molekuł, jednak długie na kilka centymetrów, które są ciasno skręcone w zwój i upakowane w każdej komórce naszego ciała



- Genetycy odkryli, że DNA formuje węzły i sploty które mogą zostać opisane matematycznie – dzięki poznaniu ich natury możemy przybliżyć się do zrozumienia udziału tych „węzłów i splotów” w życiu i reprodukcji komórek.



Trzy Teorie węzłów

- PL teoria węzłów – swojska lub kombinatoryczna – pracujemy w kategorii kawałkami liniowej
- Gładka teoria węzłów – pracujemy w kategorii gładkiej
- Dzika teoria węzłów – nie narzucamy żadnych ograniczeń

Topologia

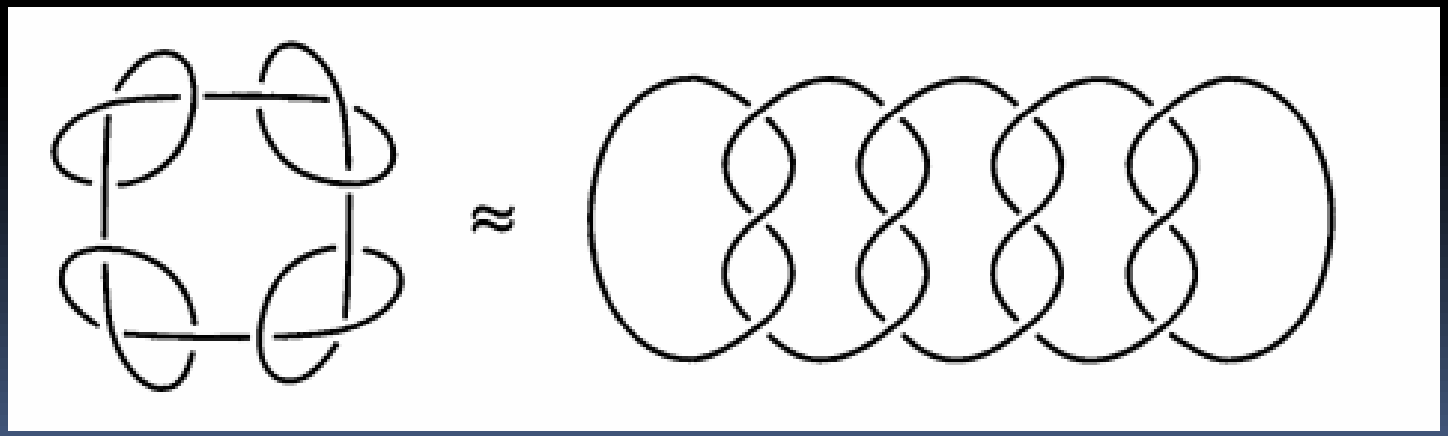
- Dział matematyki, który zajmuje się badaniem kształtów.
- Topologia bada te własności przestrzeni, które zachowują się przy ich deformacjach – przy rozciąganiu, skręcaniu czy wyginaniu
- Własność topologiczna figury – figura bądź bryła nie ulegnie zmianie nawet po ciągłym jej deformowaniu

Przestrzeń euklidesowa

- Przestrzeń euklidesowa jest to przestrzeń o geometrii euklidesowej.
- Prosta euklidesowa – jednowymiarowa przestrzeń, inaczej przestrzeń liczb rzeczywistych. Jest ona zbiorem liczb rzeczywistych – R
- Płaszczyzna euklidesowa – dwuwymiarowa przestrzeń rzeczywista, jest to zbiór uporządkowanych par liczb rzeczywistych – R x R
- Przestrzeń euklidesowa – trójwymiarowa przestrzeń rzeczywista, jest to zbiór uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych – RxRxR
- Przestrzeń euklidesowa – czterowymiarowa przestrzeń rzeczywista, jest to zbiór uporządkowanych czwórek liczb rzeczywistych – RxRxRxR

Topologia węzłów

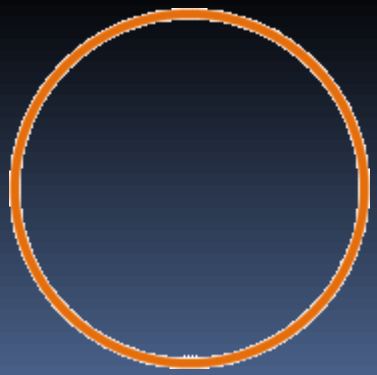
- Dzięki topologii, możemy ustalić czy dwa węzły są sobie równoważne dzięki przekształceniom ciągłym, czyli po prostu przekręcaniu sznurka

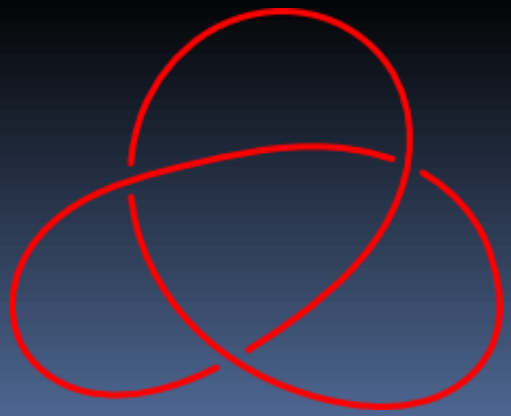


Definicja węzła

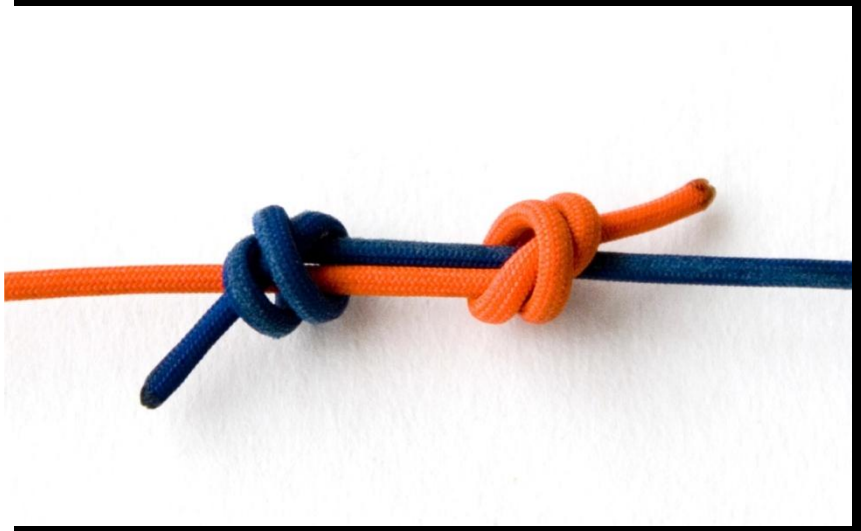
- Matematycy określają **węzeł** jako sznurek, który może być zapleciony lub też nie, którego końce są zawiązane lub sklejone.

- W uproszczeniu – zapleciony, powyginany okrąg



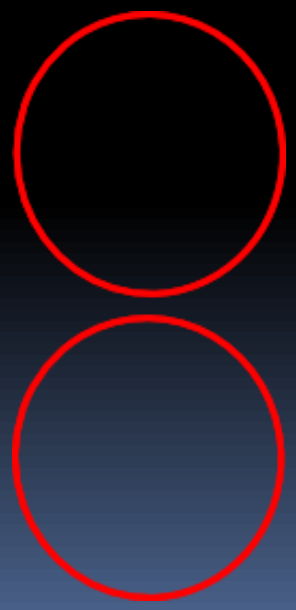


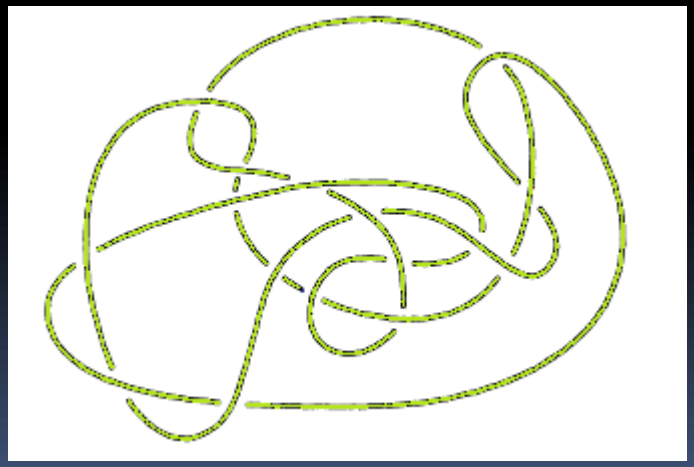
Co węzłem nazywamy, ale węzłem matematycznym nie jest



Węzeł trywialny

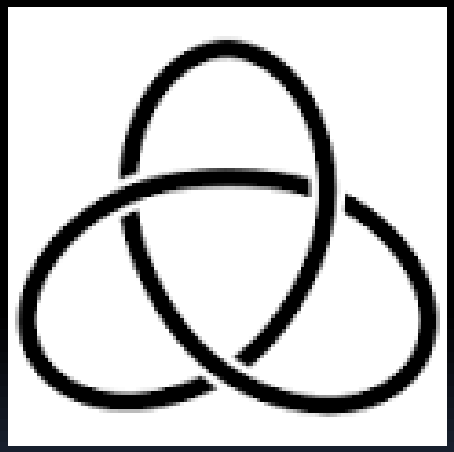
- **Węzłem trywialnym** nazywamy węzeł równoważny okręgowi położonemu na płaszczyźnie

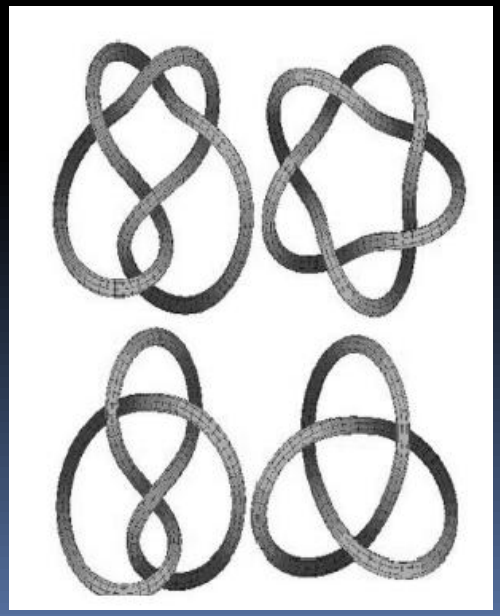


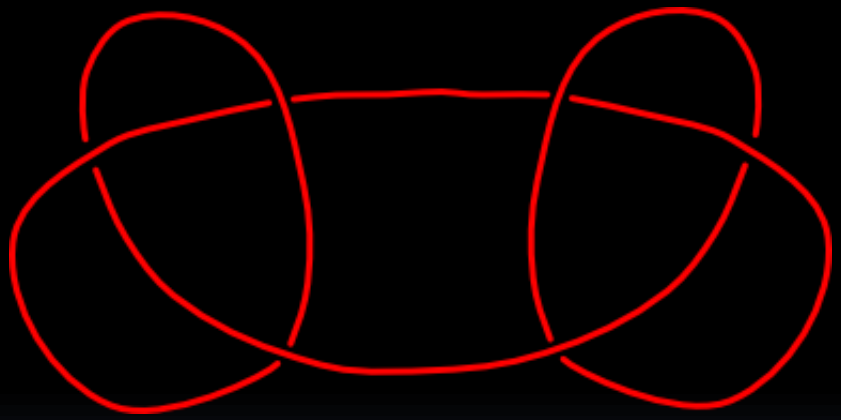


Węzły nietrywialne

- Są to w uproszczeniu węzły niedające się rozplątać bez cięcia







Węzeł dziki

- Są to węzły których nie jesteśmy w stanie przedstawić w postaci skończonej, zamkniętej łamanej łańcucha.

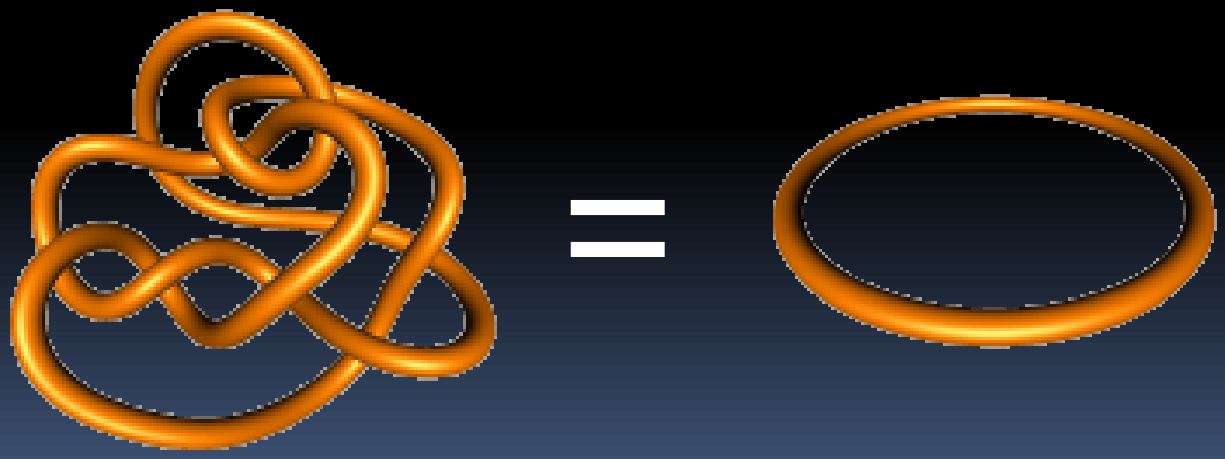
Przykłady węzłów

Lewy trójlistnik

Prawy trójlistnik

Przykłady węzłów

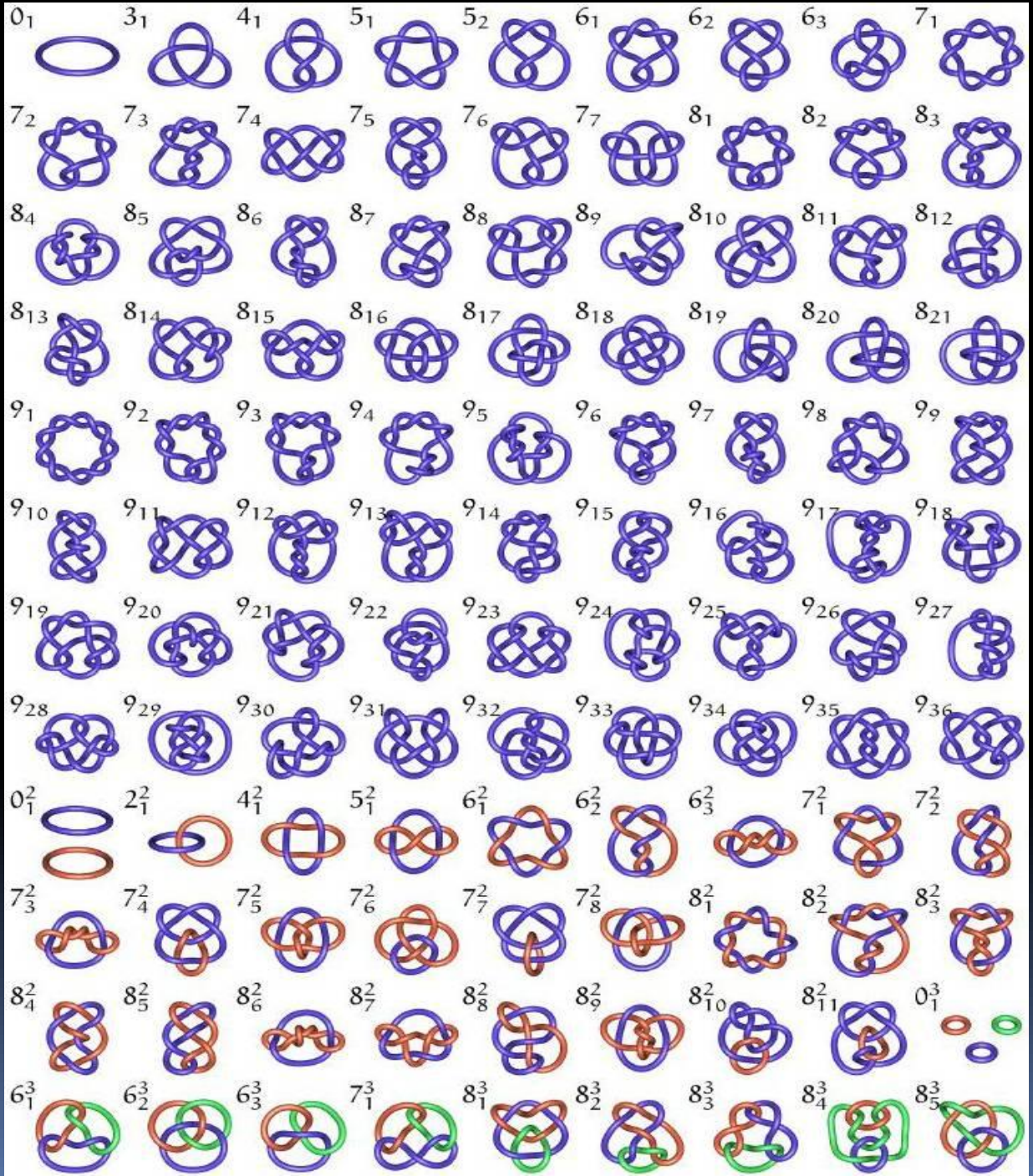
- Węzeł powinien być przedstawiony w możliwie najprostrzy sposób. Nie zawsze jest to proste, czasem tak zawiły węzeł (jak na poniższym rysunku) może okazać się węzłem trywialnym

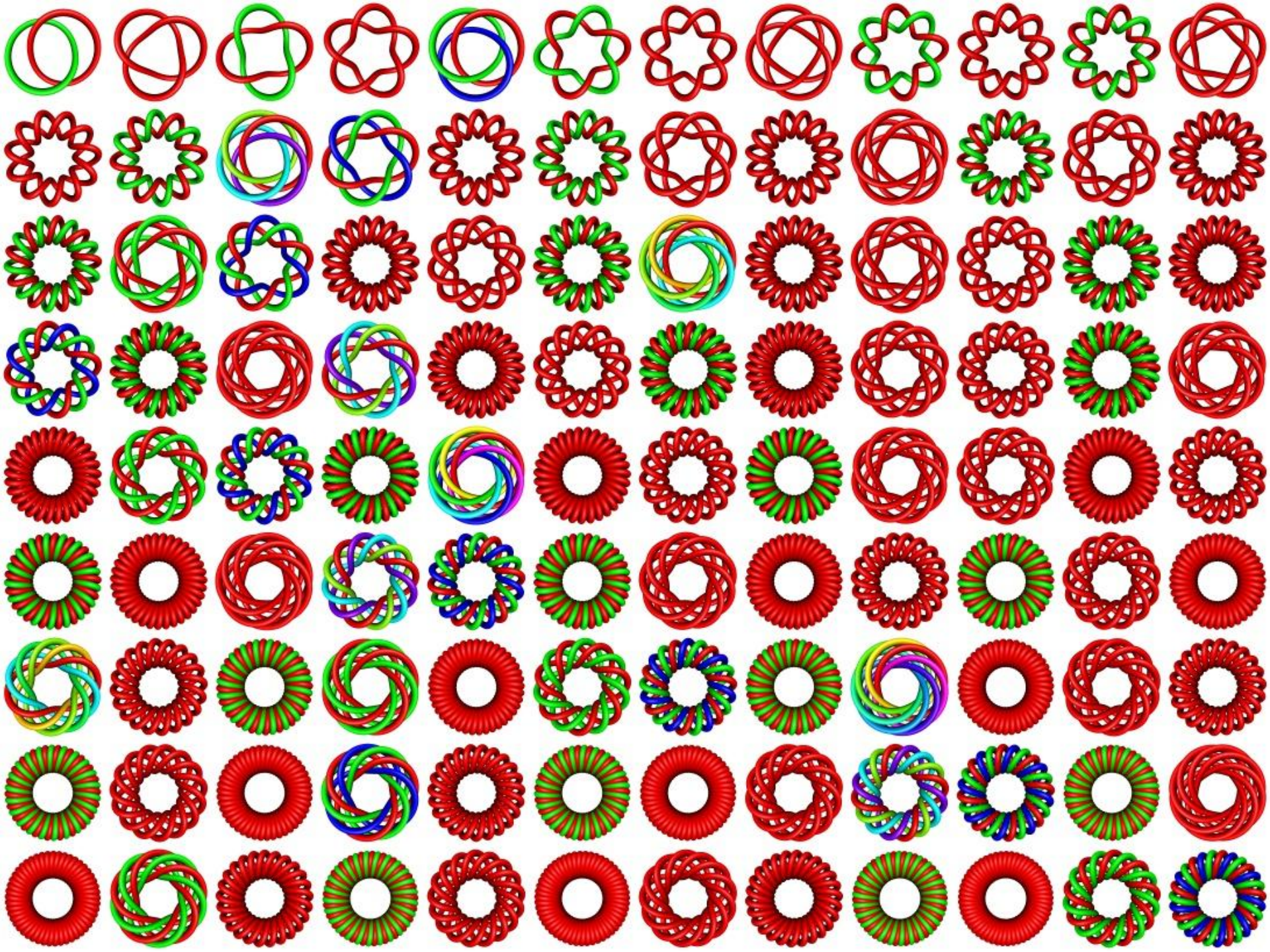


Tablice węzłów

- Dążymy do najmniejszej ilości „przecięć”. Przykładowo:
- węzeł trywialny ma liczbę przecięć równą 0
- Trójlistnik ma liczbę przecięć równą 3

Nieważne jak zdeformujemy i splątamy trójlistnik – zawsze po uproszczeniu, jego najmniejszą liczbą przecięć będzie liczba 3.


0_1 3_1 4_1 5_1 5_2 6_1 6_2 6_3 7_1
7_2 7_3 7_4 7_5 7_6 7_7 8_1 8_2 8_3
8_4 8_5 8_6 8_7 8_8 8_9 8_{10} 8_{11} 8_{12}
8_{13} 8_{14} 8_{15} 8_{16} 8_{17} 8_{18} 8_{19} 8_{20} 8_{21}
9_1 9_2 9_3 9_4 9_5 9_6 9_7 9_8 9_9
9_{10} 9_{11} 9_{12} 9_{13} 9_{14} 9_{15} 9_{16} 9_{17} 9_{18}
9_{19} 9_{20} 9_{21} 9_{22} 9_{23} 9_{24} 9_{25} 9_{26} 9_{27}
9_{28} 9_{29} 9_{30} 9_{31} 9_{32} 9_{33} 9_{34} 9_{35} 9_{36}
0_1^2 2_1^2 4_1^2 5_1^2 6_1^2 6_2^2 6_3^2 7_1^2 7_2^2
7_3^2 7_4^2 7_5^2 7_6^2 7_7^2 7_8^2 8_1^2 8_2^2 8_3^2
8_4^2 8_5^2 8_6^2 8_7^2 8_8^2 8_9^2 8_{10}^2 8_{11}^2 0_1^3
6_1^3 6_2^3 6_3^3 7_1^3 8_1^3 8_2^3 8_3^3 8_4^3 8_5^3



Kilka zagadek

Który to węzeł?

- Trywialny

- Deputy

- Trójlistnik

Kilka zagadek

Który to węzeł?

- Trywialny

- Deputy

- Trójlistnik

Kilka zagadek

Który to węzeł?

- Trywialny

- Deputy

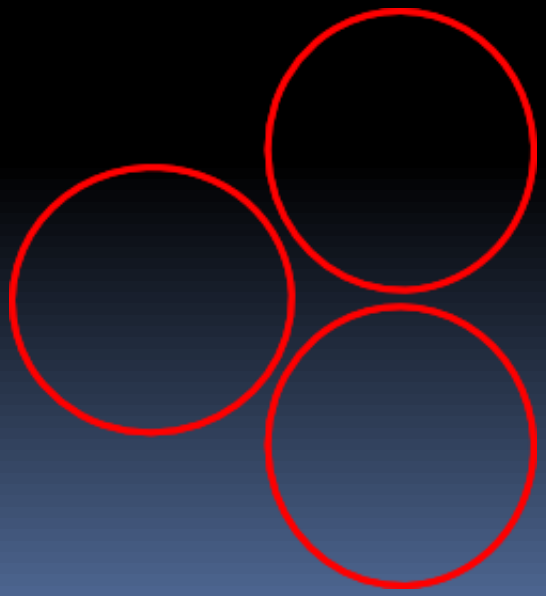
- Trójlistnik

Definicja splotu

- **Splot** – układ dwóch rozłączonych okręgów w przestrzeni trójwymiarowej. Na podstawie tego, czy dwa okręgi są zaplątane tak, że da się je rozdzielić bądź też nie wyróżniać będziemy sploty trywialne i nietrywialne

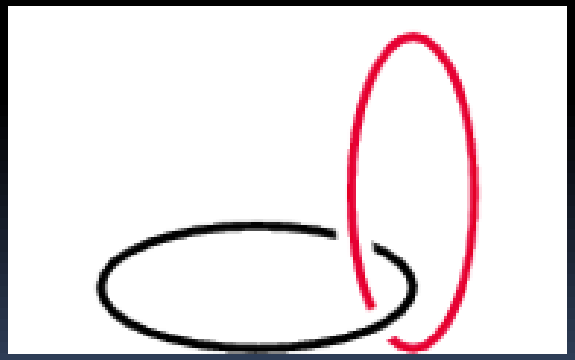
Splot trywialny

- Splot trywialny jest najprostrzym splotem. W splocie trywialnym okrąg nie będzie miał punktów wspólnych z drugim okręgiem



Splot nietrywialny

- Najprostrza definicja – splot nietrywialny są to sploty, które nie są trywialne.

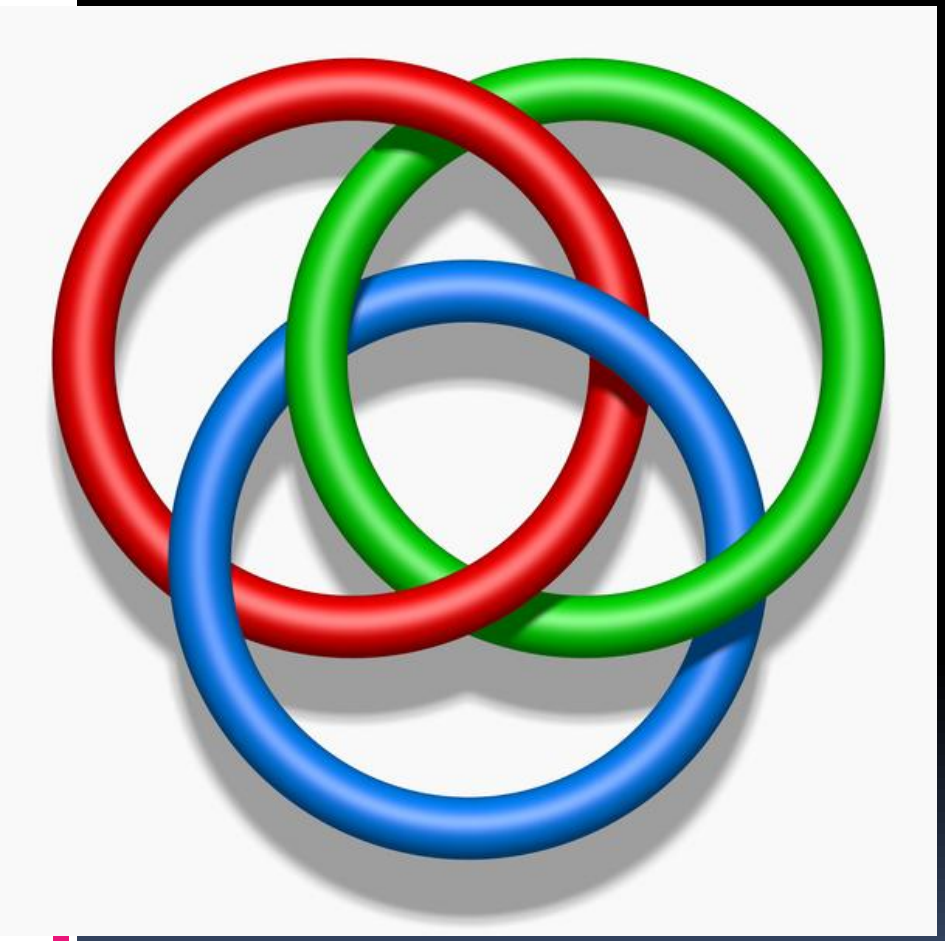


Splot Hopfa

Splot Boromeuszów

- Rodzina Boromeuszy żyła we Włoszech w czasach renesansu – ród ten przetrwał do dnia dzisiejszego.
- W splocie Boromeuszów trzy ogniwa (części splotu) są połączone, natomiast dwa dowolne nie.
- Usunięcie jednego pierścienia powoduje rozpad pozostałych.
- Węzeł boromejski jest używany w religii i sztuce jako symbol jedności

Splot Boromeuszów

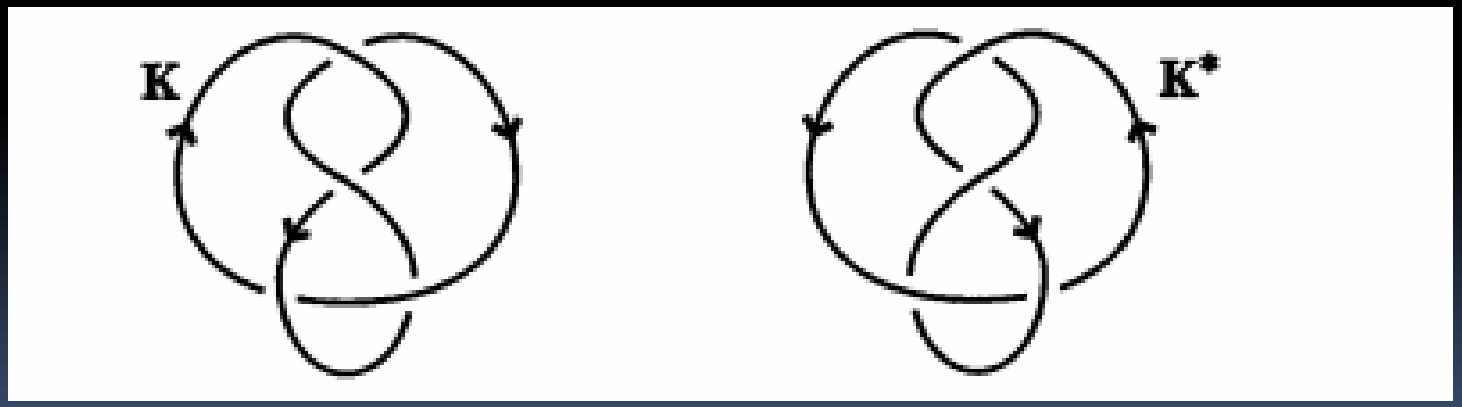


Poliboromeusze

- Nazywane czasem splotami Brunna.
- W dalszym ciągu, sploty te będą miały własność taką, że usunięcie jednego pierścienia ze splotu spowoduje rozpad całej struktury splotu.

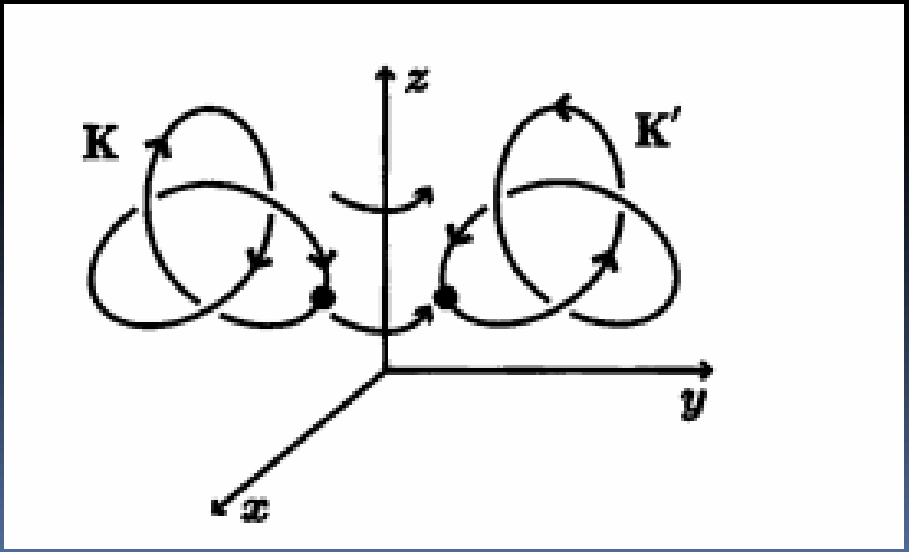
Orientacja węzłów

- Jako iż węzeł nie posiada początku ani końca, sami możemy ustalić orientacje węzła – poprzez postawienie na węźle strzałki w odpowiednią stronę.

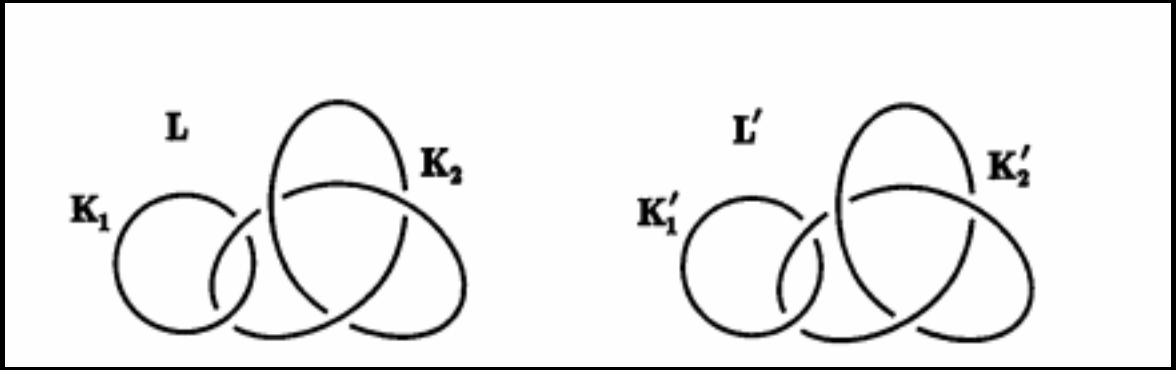


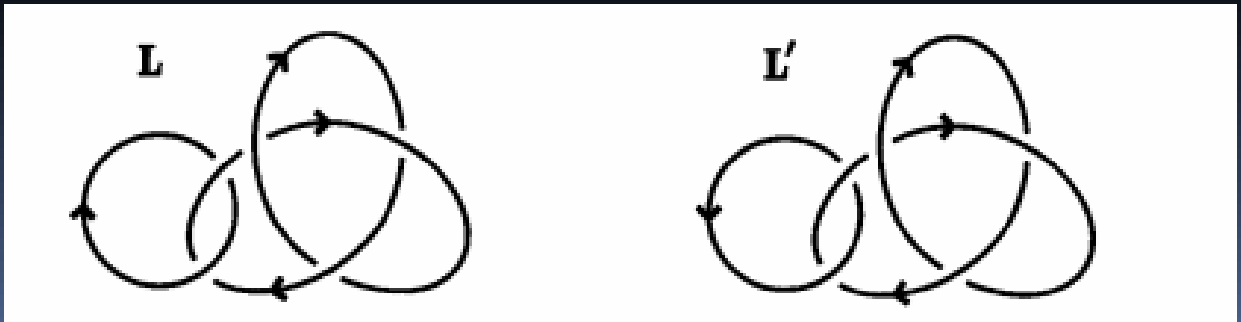
Orientacja węzłów

- Poprzez ustalenie orientacji możemy sprawić, że dwa węzły, które były równoważne nie posiadając orientacji staną się sobie nie równoważne
- Poniższe węzły są równoważne z orientacją poprzez obrót o kąt 180 stopni.



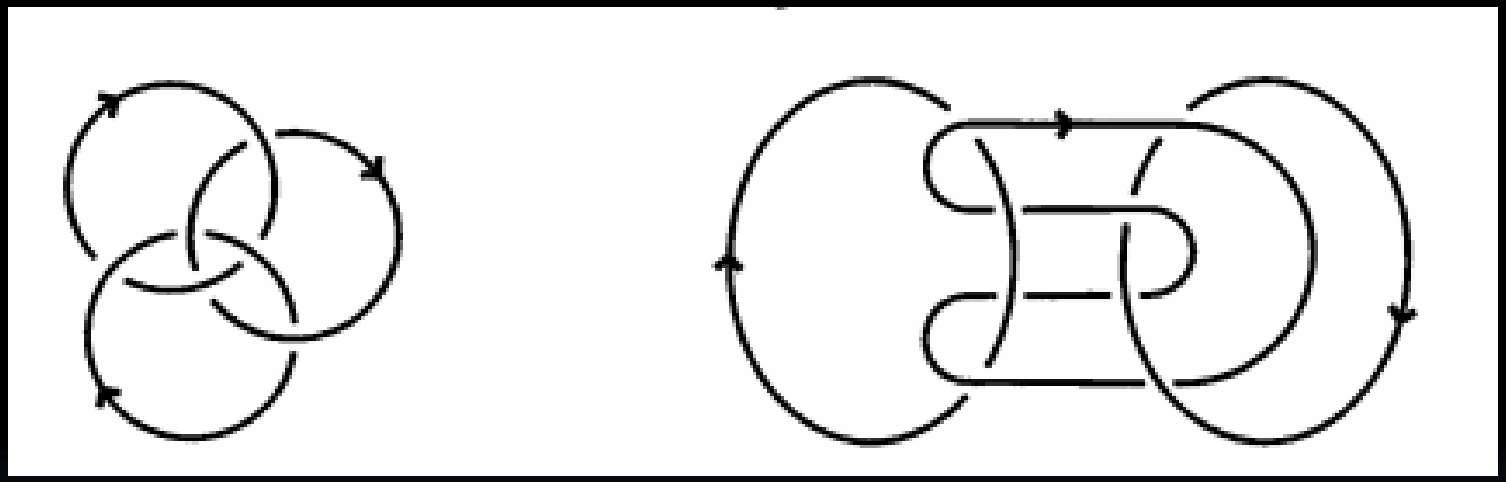
Orientacja splotu





Węzły równoważne

- Splot Boromeusza



Węzły równoważne

- Splot Whitheada

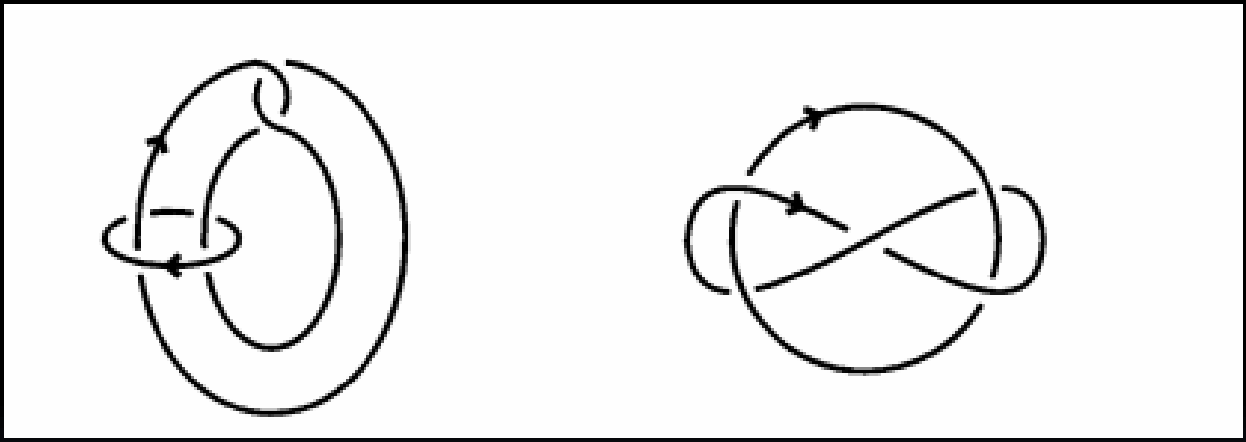
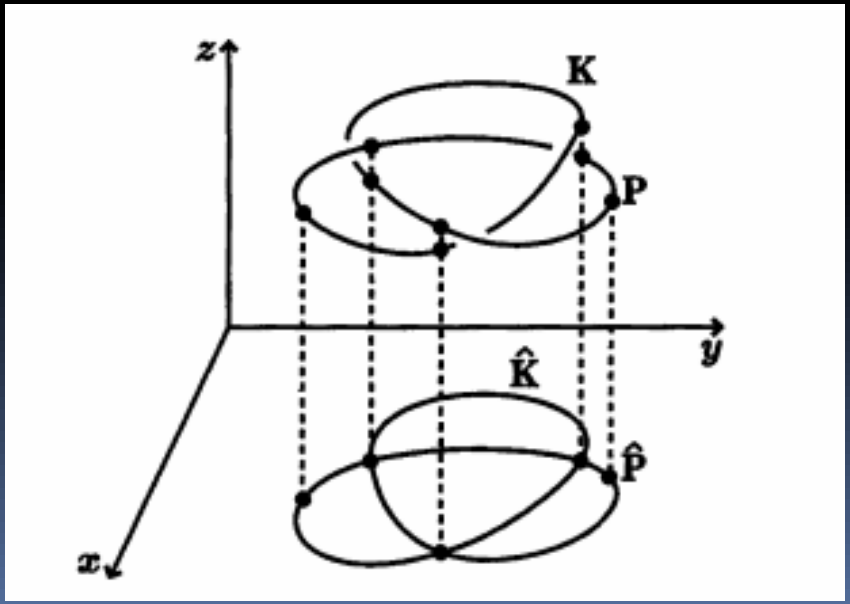


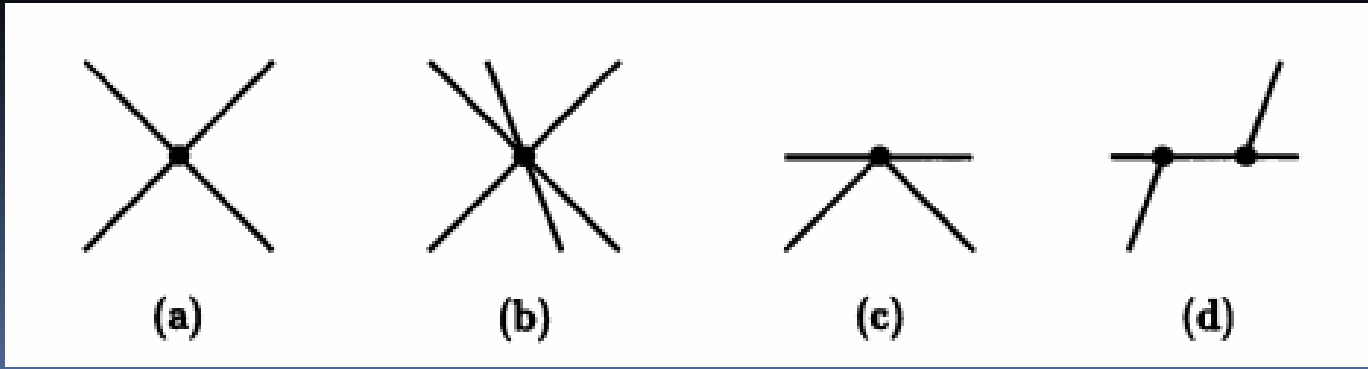
Diagram regularny

- Jeśli K jest węzłem bądź splotem to K' jest rzutem K – co jest pokazane na poniższym rysunku.
- Diagramem nazywamy obraz rzutu regularnego węzła
- Diagram traktujemy dwuwymiarowo

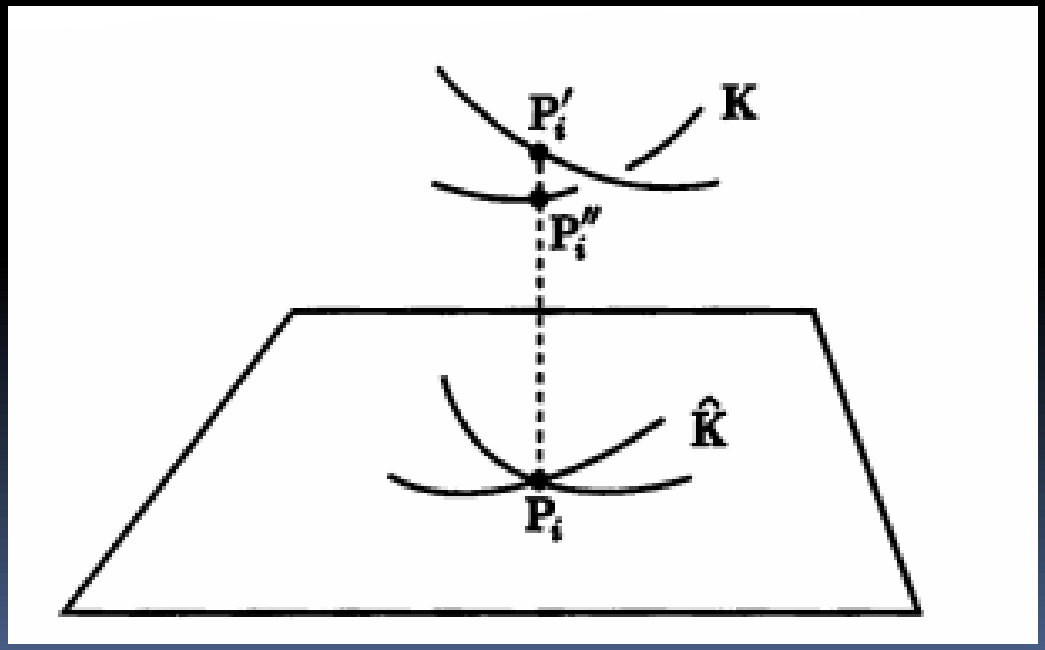


Regularny rzut węzła

- K′ ma skończoną liczbę skrzyżowań/przecięć
- Wszystkie skrzyżowania są podwójne (niedopuszczalna jest sytuacja na rysunku b)
- Wierzchołek K nigdy nie jest przeciwobrazem K′. Na rysunku c oraz d łamana wchodzi w kontakt z wierzchołkami K′ więc oba przypadki nie są dozwolone



- Rzut regularny K’ węzła K ma n skrzyżowań. Każdy punkt skrzyżowania Pi jest obrazem dokładnie dwóch punktów Pi’ i Pi”



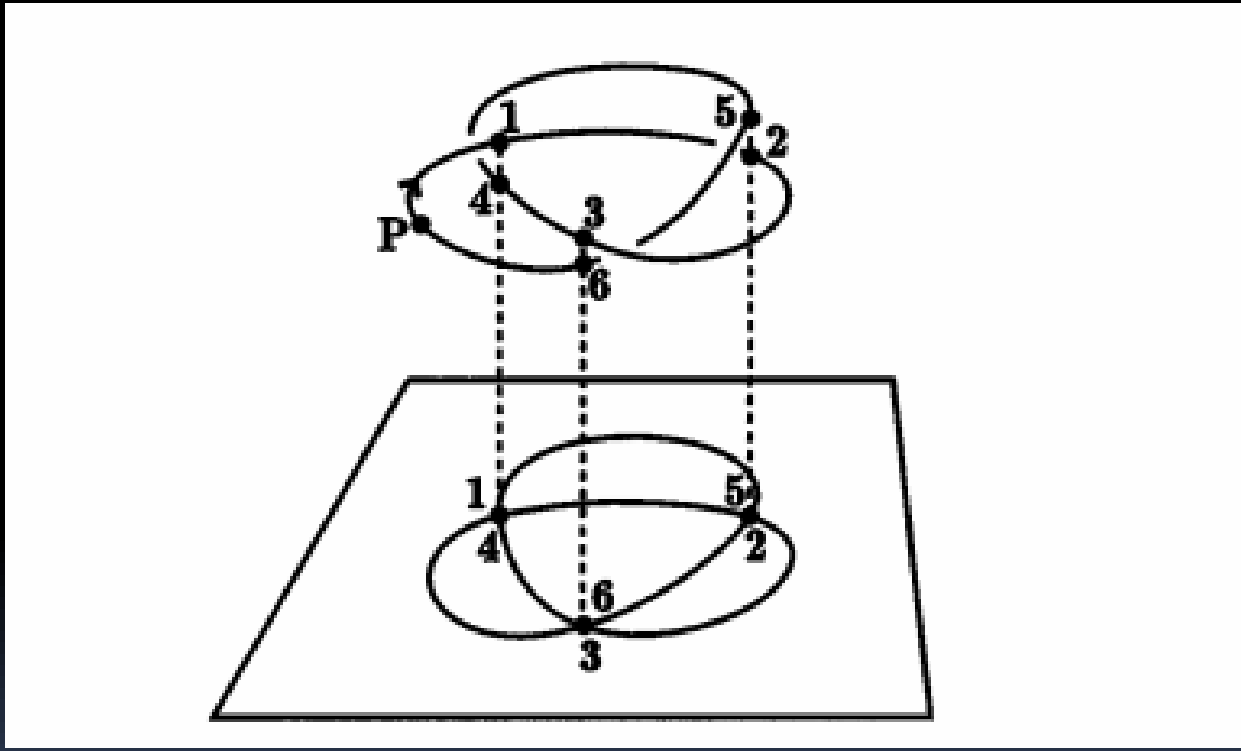
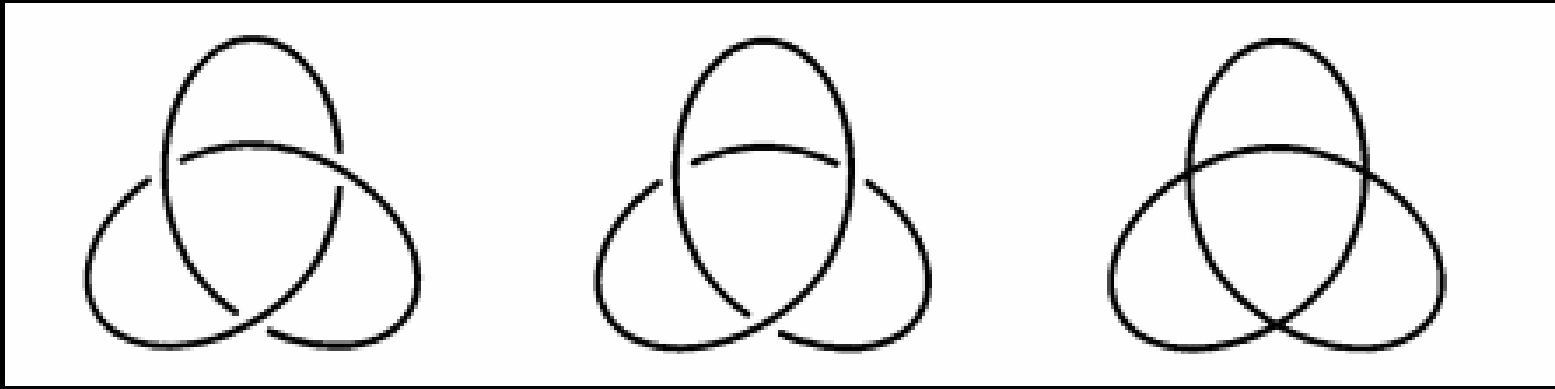
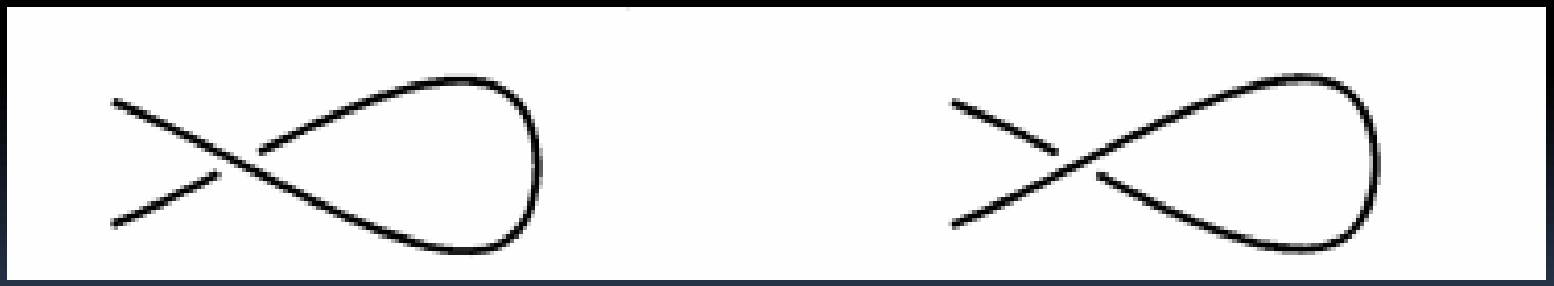

1
5
2
4
3
P
6
1
5
4
2
6
3

Diagram regularny trójlistnika



Zredukowany rzut regularny

- Zredukowany rzut regularny otrzymujemy w przypadku, gdy diagram posiada skrzyżowania, które jesteśmy w stanie usunąć poprzez pojedyncze skręcenie.



Zredukowany rzut regularny

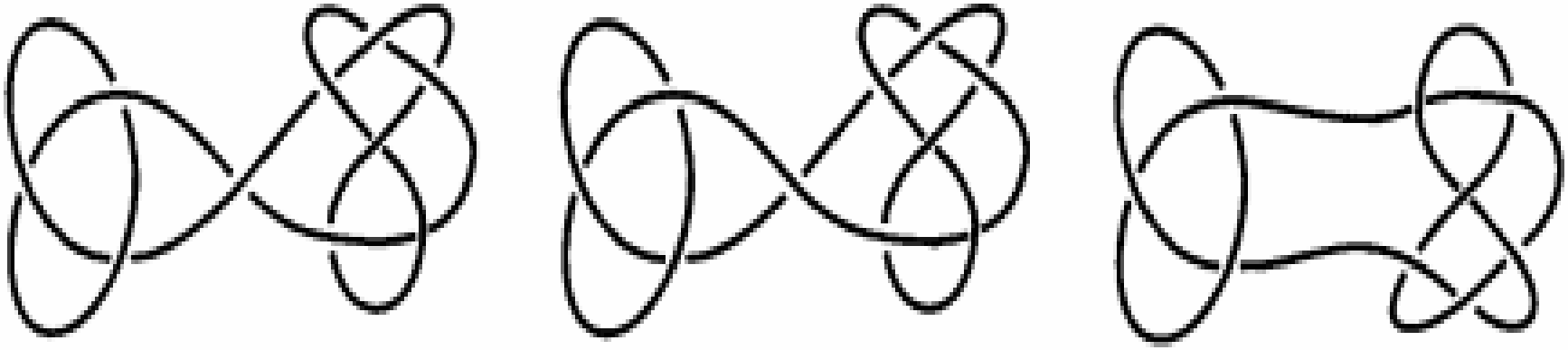


Diagram splotu

- Dwuwymiarowe diagramy – rzut splotu na płaszczyznę
- Splot składa się z dwóch lub więcej okręgów połączonych ze sobą – zatem rzut takiego splotu będzie posiadał skończenie wiele skrzyżowań podwójnych
- Na diagramie powinniśmy zaznaczyć charakter skrzyżowania – która część skrzyżowania biegnie u góry, a która na dole

Piśmiennictwo

- http://www.cent.uw.edu.pl/pl//badania/lab/lmub
- http://www.ncbj.gov.pl/node/158
- http://www.mimuw.edu.pl/~shummel/lic_wezly.pdf
- http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/2011/05/25/Czy_widzial_ktos_plaszczyzne_rzutowa/
- http://blogiceo.nq.pl/matematycznyblog/2013/01/13/pierscienie-boromeuszy/
- http://www.oglethorpe.edu/faculty/~j_nardo/knots/intro.htm
- http://www.oglethorpe.edu/faculty/~j_nardo/knots/fun.htm
- http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/murasug3.pdf