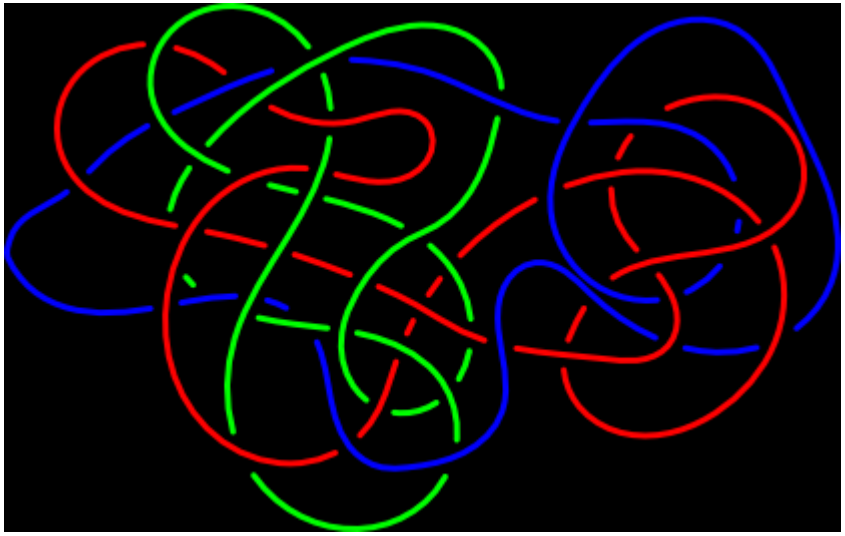
ZASTOSOWANIE TEORII WĘZŁÓW

MAGDALENA PAWŁOWSKA
GR. 10B2

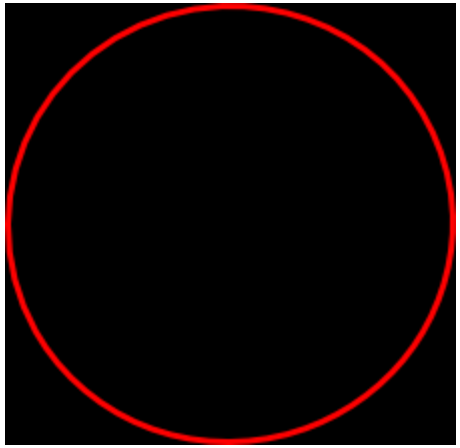
TEORIA WĘZŁÓW

Teoria węzłów to dziedzina matematyki, która wchodzi w skład topologii. Topologia to część matematyki, która zajmuje się badaniem kształtów. Obiektami zainteresowania teorii węzłów są krzywe zamknięte, zanurzone w trójwymiarowej przestrzeni, które nazywamy węzłami. Fizyczne modele węzłów możemy otrzymać splatając kawałek sznurka i zawiązując jego końce.

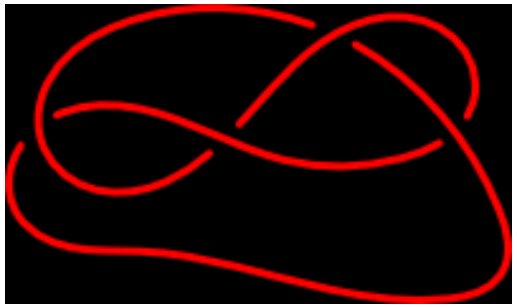


NAJPROSTSZYM WĘZŁEM JEST TZW. WĘZEŁ TRYWIALNY. KOLEJNYMI PRZYKŁADAMI WĘZŁÓW SĄ: LEWY I PRAWY TRÓJLISTNIK ORAZ WĘZEŁ ÓSEMKOWY.

WĘZEŁ TRYWIANY

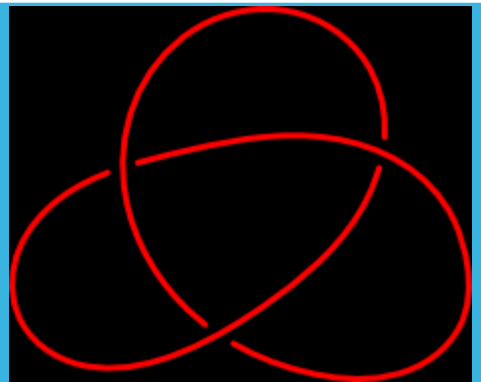


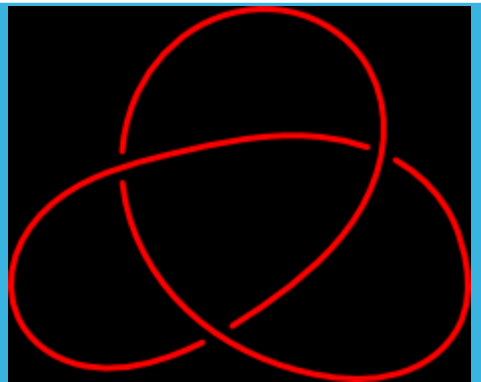
WĘZEŁ ÓSEMKOWY



LEWY I PRAWY

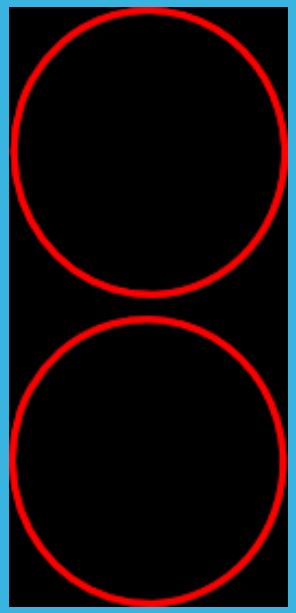
TRÓJLISTNIK

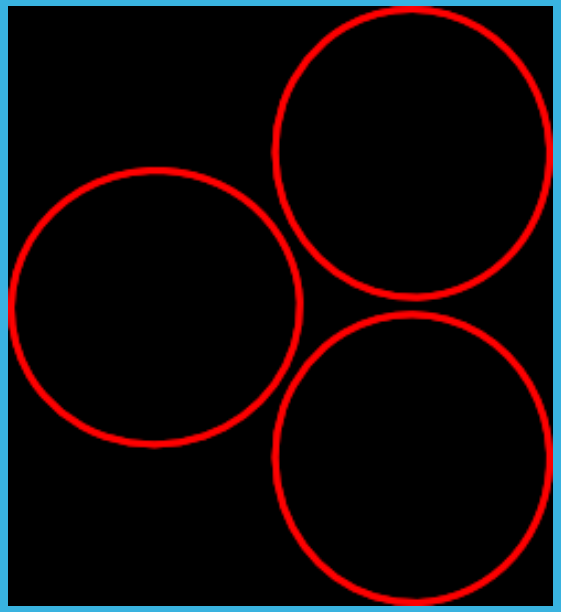




SPLOTY

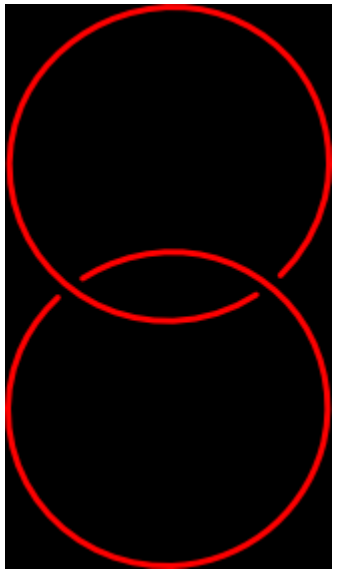
Analogicznie możemy zdefiniować sploty, jeżeli zamiast jednego kawałka sznurka użyjemy kilku. Każdy węzeł powstały z jednego kawałka sznurka wchodzący w skład splotu nazywamy składową spójną splotu. Najprostszymi splotami są sploty trywialne widoczne obok.



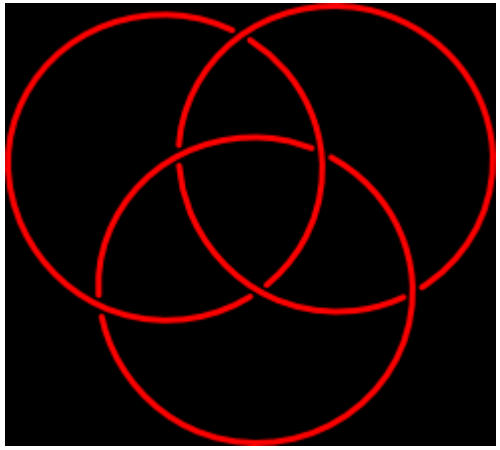


INNE PRZYKŁADY SPLOTÓW

SPLOT HOPFA



PIERŚCIENIE BOROMEJSKIE



MATEMATYCY BADAJĄCY WĘZŁY IDEALNE (J. SIMON, J. O'HARA, J. SULLIVAN, E. RAWDON, G. BUCK I INNI. PATRZ: [IDEAL KNOTS 1998]) STARAJĄ SIĘ TAK FORMUŁOWAĆ PROBLEMY, NAD KTÓRYMI PRACUJĄ, BY UZYSKIWANE PRZEZ NICH WYNIKI MOGŁY MIEĆ POSTAĆ ŚCISŁYCH TWIERDZEŃ. EFEKTEM TAKIEGO PODEJŚCIA JEST SILNE OGRANICZENIE POLA BADAŃ.

FIZYCY, SZUKAJĄCY CIEKAWYCH EFEKTÓW DOŚWIADCZALNYCH, RÓWNIEŻ TAKICH, KTÓRYCH ŚCISŁA TEORIA NIE JEST DOBRZE ZNANA, MAJĄ W SWEJ PRACY WIĘCEJ SWOBODY. UZYSKIWANE PRZEZ NICH WYNIKI STANOWIĄ CZĘSTO INSPIRACJĘ I PUNKT STARTOWY DLA PRAC MATEMATYKÓW.

POROZUMIENIE MIĘDZY MATEMATYKAMI I FIZYKAMI BADAJĄCYMI WĘZŁY JEST MOŻLIWE W SYTUACJI, GDY OBIE TE GRUPY UŻYWAJĄ TEGO SAMEGO JĘZYKA.

FIZYKA I TOPOLOGIA

Topologia to ważny
dział matematyki badający te własności
przestrzeni,
które zachowują się przy ich deformacjach.
Ściślej, interesować
się będziemy topologią rozmaitości, czyli
takich
przestrzeni, które intuicyjnie odpowiadają
przestrzeni
w rozumieniu fizycznym.

Innymi słowy, jeżeli zapomnimy o
własnościach metrycznych przestrzeni
(odległość), to pozostaje nam topologia.

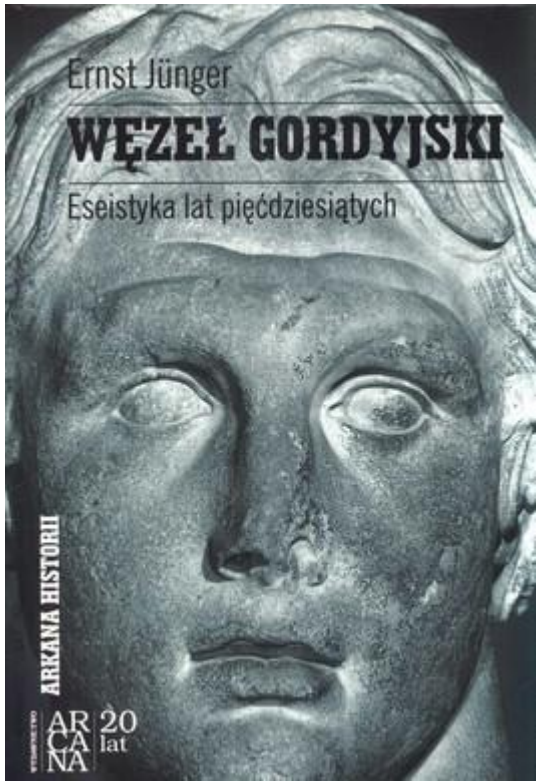
WĘZEŁ GORDYJSKI

Wydaje się, że pierwszymi nietrywialnymi obiektami topologicznymi, które mogły interesować już starożytnych, były w ę z ł y, czyli pętle niedające się rozplątać bez rozcięcia (rys. obok).

Symbolem tego zainteresowania jest słynna zagadka starożytności – węzeł gordyjski.

MIT WĘZŁA GORDYJSKIEGO

Z tego, co wiemy na temat węzła gordyjskiego (a wiemy niewiele i są to trochę sprzeczne informacje), węzeł ten nie miał widocznych końców, co sugeruje, że były one ze sobą połączone, a całość była bardzo ściśle zaciśnięta. Legenda głosiła, że ten, kto węzeł rozwiąże, będzie władał Azją, ale przez długie lata nikomu się to nie udawało. Dopiero Aleksander Wielki w 333 r. p.n.e. rozwiązał problem (nie węzeł!), przecinając węzeł mieczem. To bardzo kontrowersyjne i radykalne rozwiązanie było najwyraźniej prawidłowe, bo przepowiednia się ziściła



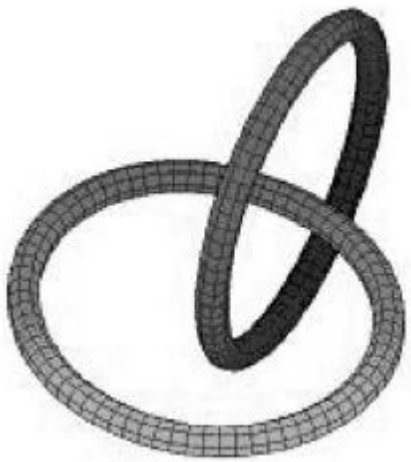
Wykonujemy teraz długi skok przez stulecia do czasów fizyki nowożytnej. Tu napotykamy pierwszy wyraźny ślad naukowej teorii węzłów i s p l o t ó w (więcej niż jedna pętla to już nie węzeł, a splot) w ELEKTRODYNAMICE KLASYCZNEJ. Okazuje się, że z dobrze znanego Prawa Amp`ere'a

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = mI,$$

gdzie : H- natężeniem pola magnetycznego,

I- natężeniem prądu przebijającego powierzchnię rozpiętą na pętli C, można „wyciągnąć" pewną informację topologiczną zakodowaną w liczbie m, zwanej w tym kontekście liczbą Gaussa.

Tutaj natężenie H wytwarzane jest przez prąd płynący w drugiej pętli i możemy je wyznaczyć z prawa Biota–Savarta.



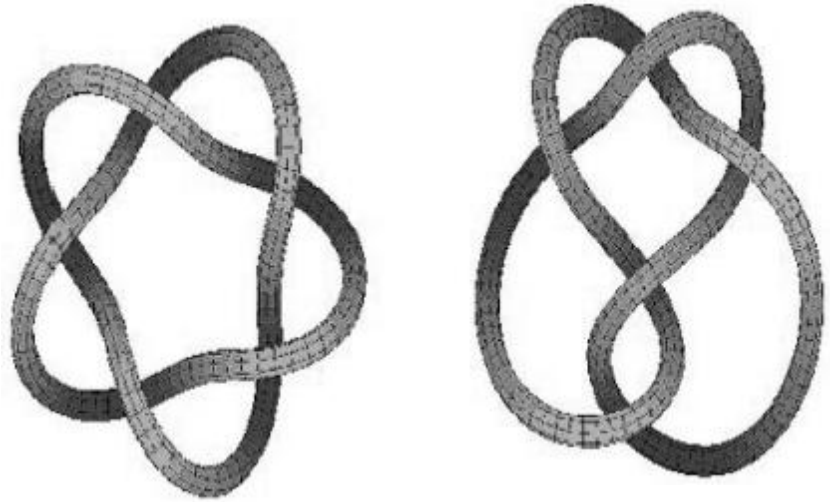
SPLOT HOPFA , dla którego lml =1. Jeden z okręgów to C, a drugi to C'.

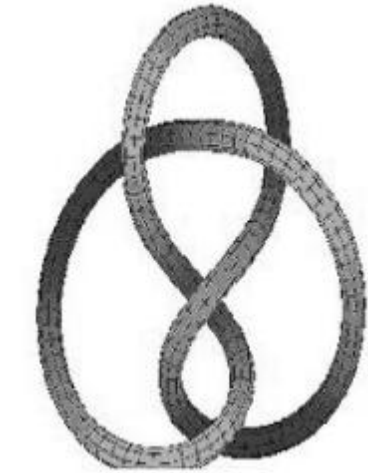
Pierwszą „poważną” teorią fizyczną, aspirującą do opisu struktury materii w skali atomowej i odnoszącą się do topologii (teorii węzłów) w całej jej głębi, była

WIROWA TEORIA ATOMU LORDA KELVINA

(Williama Thomsona).

W 1867 r. przedłożył on niezwykle śmiałą hipotezę, według której atomy miały być węzłami utworzonymi z wirowych rurek eteru.

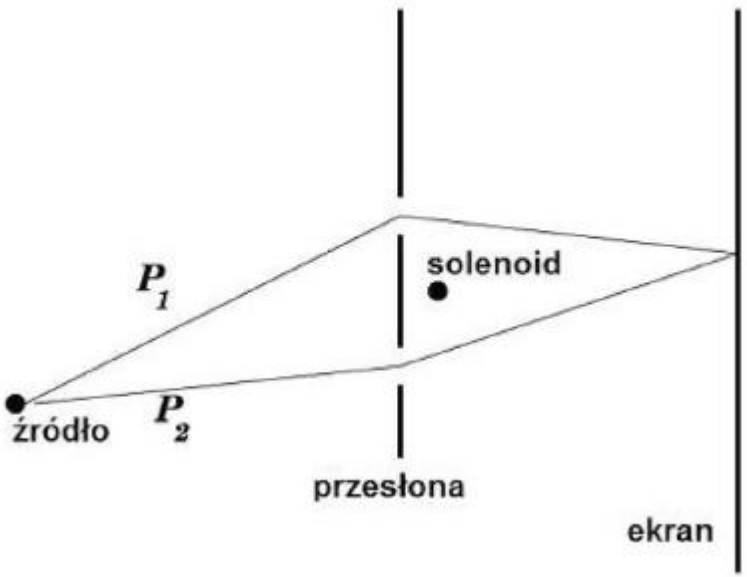




Kilka przykładów nietrywialnych węzłów Zgodnie z wirową teorią atomu lorda Kelvina z połowy XIX w., przypisującą różnym pierwiastkom różne węzły, jest to odpowiednik tablicy Mendelejewa.

ZJAWISKO AHARONA- BOHMA

Schemat „eksperymentu” Aharonova–Bohma



Zjawisko Aharonova–Bohma, które polega na tym, że na ekranie obserwujemy przesunięcie obrazu interferencyjnego elektronów, gdy przez solenoid przepuścimy prąd. Z czysto klasycznego punktu widzenia nie jest to zrozumiałe, gdyż solenoid ma tę własność, że pole magnetyczne na zewnątrz solenoidu jest zawsze zerowe. Interferujące elektrony z wiązek P1 oraz P2 reagują jednak na pole, chociaż tam, gdzie się znajdują, właściwie go nie ma.

Wniosek wypływający z powyższego jest taki, że sens fizyczny ma nie tylko pole elektromagnetyczne, ale również potencjał tego pola (w tym przypadku nietrywialny), któremu do tej pory przypisywano jedynie pomocnicze znaczenie matematyczne.

PRACE NAD TABELARYZOWANIEM WĘZŁÓW PROWADZONE SĄ NIEUSTANNIE. JEDNYM Z NAJBARDZIEJ AKTYWNYCH BADACZY POŚWIĘCAJĄCYCH SIĘ TEMU ZAGADNIENIU JEST MATEMATYK BRYTYJSKI MORWEEN THISTLETHWAIT. W 1998 ROKU OPUBLIKOWAŁ ON WRAZ Z HOSTEM I WEEKSEM PRACE PT. *„THE FIRST 1701936 KNOTS”*, MATHEMATICAL INTELIGENCER 20, (1998), W KTÓREJ PRZEDSTAWIŁ WYNIKI PRAC NAD TABELARYZACJĄ WĘZŁÓW DO 16 SKRZYŻOWAŃ.

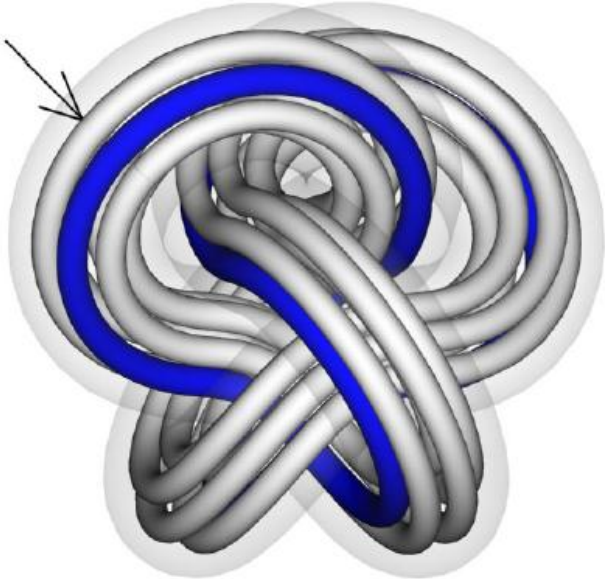
JAK WYNIKA Z TYTUŁU PRACY, JEST ICH 1701936!!!!

KWAZIKWANTOWANIE ZWOJU

Zwój W_r jest jednym z geometrycznych parametrów charakteryzującym konformację węzła. Jest to parametr istotny z praktycznego punktu widzenia,
bowiem to właśnie od jego wartości zależy, czy końce podwójnej helisy DNA uformowanej w kształt węzła dadzą się złączyć bez wprowadzania dodatkowego skręcenia.

KWAZIKWANTOWANIE ZWOJU

Idealne węzły, trójlistny (u góry) i ósemkowy (u dołu), zawiązane na linie o włóknistej strukturze wewnętrznej. Jak widać, w węźle trójlistnym, końce liny spotykają się w złej fazie.



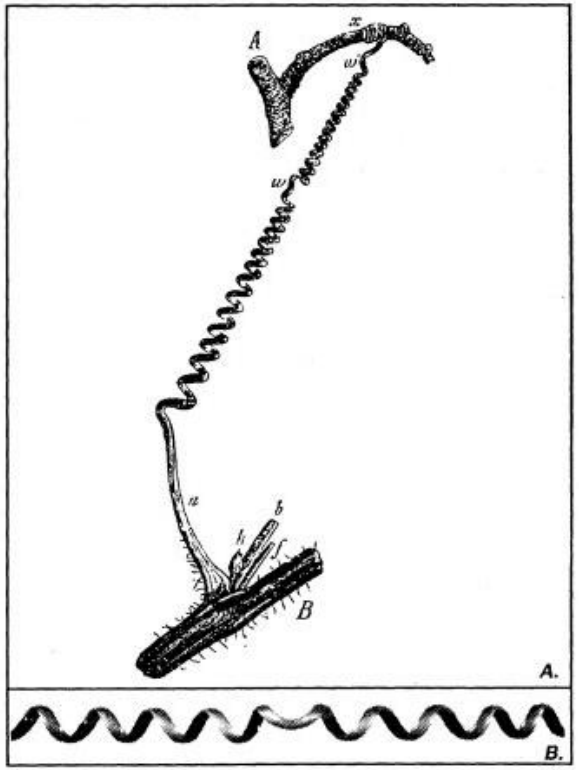
INNY PRZYKŁAD

EWOLUCJA WARTOŚCI ZWOJU TOWARZYSZĄCA ZWIJANIU SIĘ WĄSÓW

KOLCZURKI KLAPOWANEJ W HELISĘ WYMUSZA PODZIAŁ TEJ HELISY NA RÓWNE, PRZECIWNIE SKRĘTNE CZĘŚCI. ZJAWISKO TO, ZWANE „PERWERSJĄ WĄSÓW CZEPNYCH" (TENDRIL PERVERSION)

ZNANE JUŻ BYŁO DARWINOWI, JEDNAK DOPIERO KILKA LAT TEMU OPRACOWANO ILOŚCIOWĄ TEORIĘ PRZYCZYN JEGO POWSTAWANIA [GORIELY 1998].

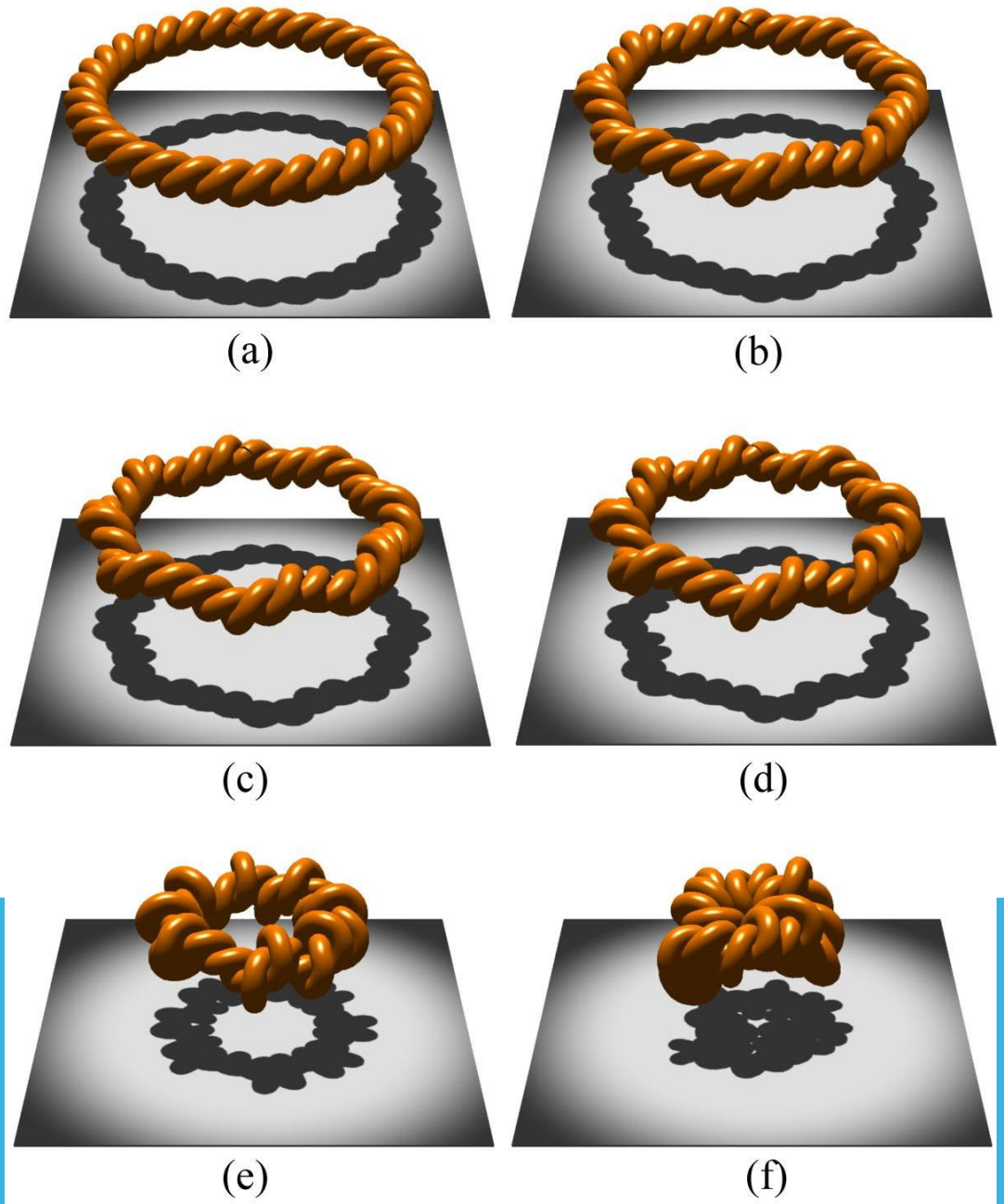
ZJAWISKO PERWERSJI WĄSÓW CZEPNYCH. PO LEWEJ: WĄS CZEPNY PRZESTĘPU DWUPIENNEGO Z *TEXT BOOK ON BOTANY* [GORIELY 1988]. PO PRAWEJ: WĄS CZEPNY KOLCZURKI KLAPOWANEJ (ZDJĘCIE Z NATURY: P. PIERAŃSKI).



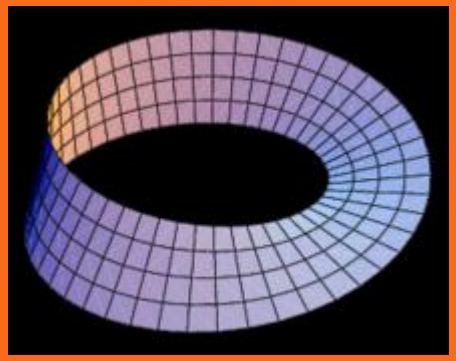
SKRĘCANIE LIN

Analizując proces wymuszonej skracaniem liny ewolucji węzłów do ich postaci idealnej zadajemy sobie pytanie, czy ewolucja ta biegnie jakimiś utartymi ścieżkami, czy też za każdym razem ścieżki te są inne. Pytanie to nasuwa się spontanicznie, gdy oglądamy rysunki ilustrujące ewolucję zaciskanych węzłów.

EWOLUCJA KONFORMACJI ZACISKANEGO WĘZŁA TORUSOWEGO [PIERAŃSKI 1998].

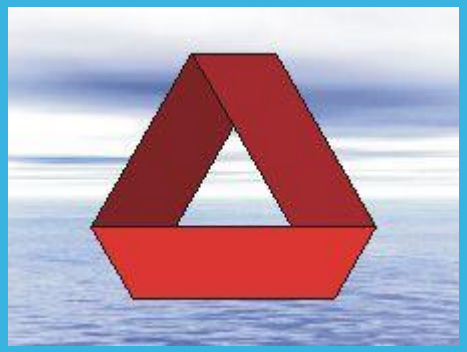


JAK JASNO WIDAĆ NA POPRZEDNIM SLAJDZIE , UKŁADANIE SIĘ LINY W ZACISKANYM WĘŹLE PODLEGA TU JAKIEMUŚ PRAWU, KTÓREGO POSTAĆ MOGLIBYŚMY POZNAĆ BADAJĄC ZNACZNIE PROSTSZY PROCES SKRĘCANIA DWÓCH LIN Z SOBĄ.



WSTĘGA MÖBIUSA

Sklejając końce paska papieru otrzymujemy powierzchnię boczną walca. Wstęga Möbiusa to też zwykły pasek papieru ze sklejonymi końcami tylko z jednym obróconym przed sklejeniem o 180°. To mogło zdarzyć się kiedyś przez nieuwagę lub być celowym sztubackim figlem, faktem jest, że odkryto dzięki temu powierzchnię o niezwykłych matematycznych własnościach. Ten szczególny topologiczny obiekt opisał po raz pierwszy w 1858 roku niemiecki matematyk i astronom August Ferdynand Möbius i stąd wstęga wzięła swoją nazwę.



WSTĘGA MÖBIUSA

Ogólnie wstęgą rzędu n nazywamy pasek, który przed sklejeniem końców został przekręcony n- krotnie o 180°C. Takie wstęgi są motywami zdobniczymi. Można je znaleźć np.:

1. w logo firmy Renault autorstwa Victora Vasarely'ego, logo niemieckiego Commerzbanku i innych firm, np. Global Investment Servicing, Carmike Cinemas i amerykańskiej firmy administrującej ubezpieczeniami zdrowotnymi HMS Holdings Corporation,
2. na belgijskich znaczkach pocztowych jako symbol poczty Beneluxu,
3. w matematycznym symbolu nieskończoności,
4. w symbolu recyclingu, czyli procesu transformacji zużytych odpadów w gotowe do ponownego użytku materiały, którymi wcześniej były (następuje powrót do punktu wyjścia, jak na wstędze Möbiusa).

WSTĘGA MÖBIUSA MA TAKŻE BARDZIEJ PRAKTYCZNE ZASTOSOWANIA:

1. Cyrkowcy wykonują "magiczną" sztuczkę, w której cylindryczna obręcz ma ścieżkę z prochu umieszczoną w połowie szerokości i po podłożeniu ognia efektownie przepala się na dwie części, a gdy ogień dochodzi już do końca (tzn. w tym przypadku do początku), wbrew oczekiwaniom widzów wstęga nie rozpada się na dwie części, ale nadal stanowi jedną całość! (oczywiście obręcz nie jest cylindrem lecz wstęgą Möbiusa, sam możesz sprawdzić, co dzieje się, jeśli rozetniesz ją wzdłuż środkowej linii),
2. Istnieją książki sklejone w kształt wstęgi Möbiusa, które można czytać "w koło Macieju" i to zaczynając z dowolnego miejsca,
3. W narciarskich skokach akrobatycznych jedna z ewolucji nosi nazwę "koziołek Möbiusa", gdyż ciało narciarza zakreśla w czasie jej wykonywania fragment wstęgi Möbiusa,
4. W technice używa się pasów transmisyjnych skręconych w kształt wstęgi Möbiusa, co powoduje, że ich powierzchnia zużywa się jednakowo po obu stronach,
5. Istnieją mapy Ziemi (tzw. mapy Tobblera) kreślone na wstędze Möbiusa, na których antypodyczne punkty znajdują się w tym samym miejscu na odwrotnej stronie wstęgi.

"Möbius Band" (wstęga Möbiusa), drzeworyt langowy
Analizując wędrówkę mrówek widać, że wstęga ma tylko jedną stronę.

Grind
160

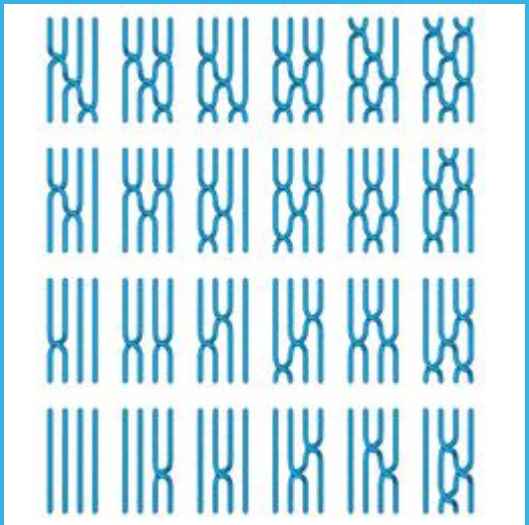
034/100
02'54"57
GP Gauge UP
128
1st
LAP 3/3

014/100
04'56"28
160

001/100
TIME
02'05"00
Grind
Speed
163
LAP 3/3

TEORIA WARKOCZY

DZIAŁ TOPOLOGII ZAINSPIROWANY GEOMETRYCZNĄ KONSTRUKCJĄ WARKOCZY



Wszystkie 24 permutacje 4 elementowej grupy warkoczowej.

Zapoczątkowana przez Emila Artina wydanym w 1925 roku artykułem "Theorie der Zopfe"[1]. Warkocze tworzą grupę. Znajdują zastosowanie między innymi w kryptografii.

KRYPTOLOGIA

Kryptologia jest nauką o szyfrowaniu, czyli bezpiecznych sposobach przekazywania informacji. Kryptologię dzieli się na kryptografię - naukę o tworzeniu szyfrów i kryptoanalizę - naukę o łamaniu szyfrów, tzn. o odczytywaniu zaszyfrowanej wiadomości bez znajomości klucza. Kryptologia jest nauką ścisłą, zajmuje się praktycznym zastosowaniem matematyki w ochronie danych. Ważną rolę we współczesnej kryptografii odgrywają takie działy matematyki jak: teoria liczb, teoria grup, logika kombinatoryczna, teoria złożoności, teoria ergodyczna i teoria informacji. Kryptologia jako nauka liczy kilka tysięcy lat. Jej rozwój przebiegał równolegle z rozwojem matematyki. Obecnie kryptografia stosowana jest do ochrony danych cyfrowych, ale wykorzystywano ją już w czasach starożytnych.

Kryptologia jako nauka liczy kilka tysięcy lat. Zapiski na temat stosowania szyfrów znaleziono na pochodzących z Mezopotamii tabliczkach z pismem klinowym datowanych już na 1500 rok p.n.e. Rozwój kryptografii był powolny i nierówny. Powstawała ona niezależnie w wielu kręgach kulturowych i przybierała różne formy i stopnie zaawansowania. Rozwój przebiegał równolegle z rozwojem matematyki. Szczególnie działania matematyków w czasie II Wojny Światowej przyczyniły się do kojarzenia kryptologii z matematyką.

Istotą kryptografii jest zamiana tekstu jawnego na zaszyfrowany. Algorytm służący do zaszyfrowania i odszyfrowania wiadomości to szyfr, zaszyfrowana wiadomość - szyfrogram. Szyfry dzieli się na symetryczne i asymetryczne.

JAK TEORIE WĘZŁÓW WYKORZYSTUJĄ BIOLODZY

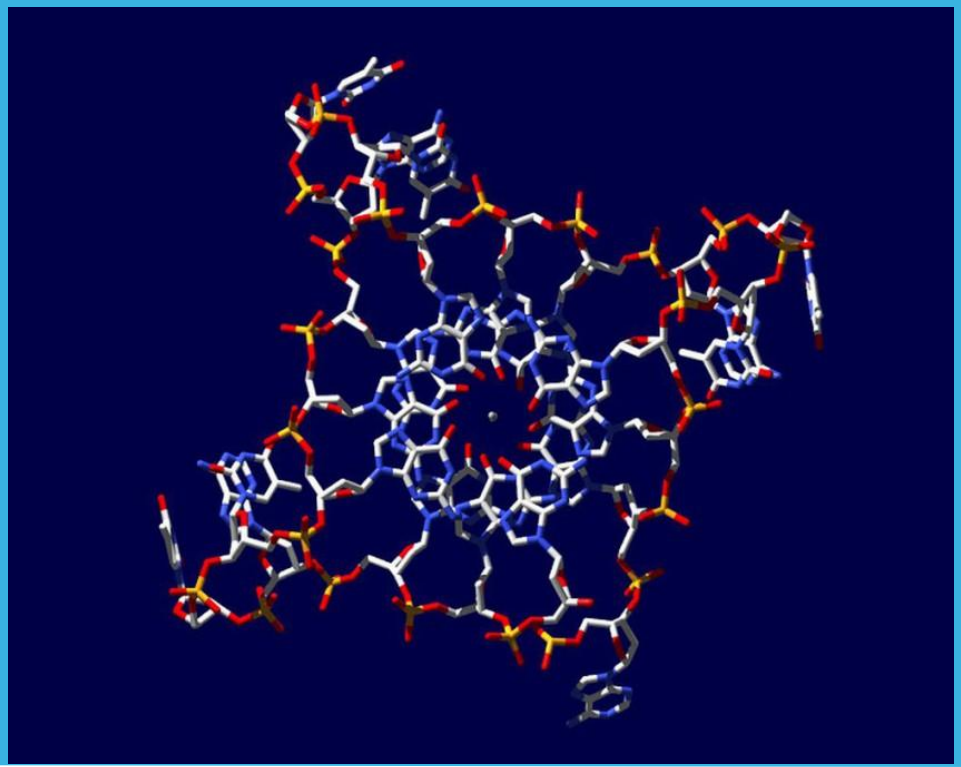
GENETYKA

DNA

W rzeczywistości podwójna helisa DNA zbudowana jest z dwóch długich krzywych które przeplatają się miliony razy. Nici DNA są szerokie jedynie na kilka molekuł, jednak długie na kilka centymetrów, które są ciasno skręcone w zwój i upakowane w każdej komórce ciała.

GENETYKA A WĘZŁY

Genetycy odkryli, że DNA formuje węzły i sploty które mogą zostać opisane matematycznie – dzięki poznaniu ich natury możemy przybliżyć się do zrozumienia udziału tych „węzłów i splotów” w życiu i reprodukcji komórek.



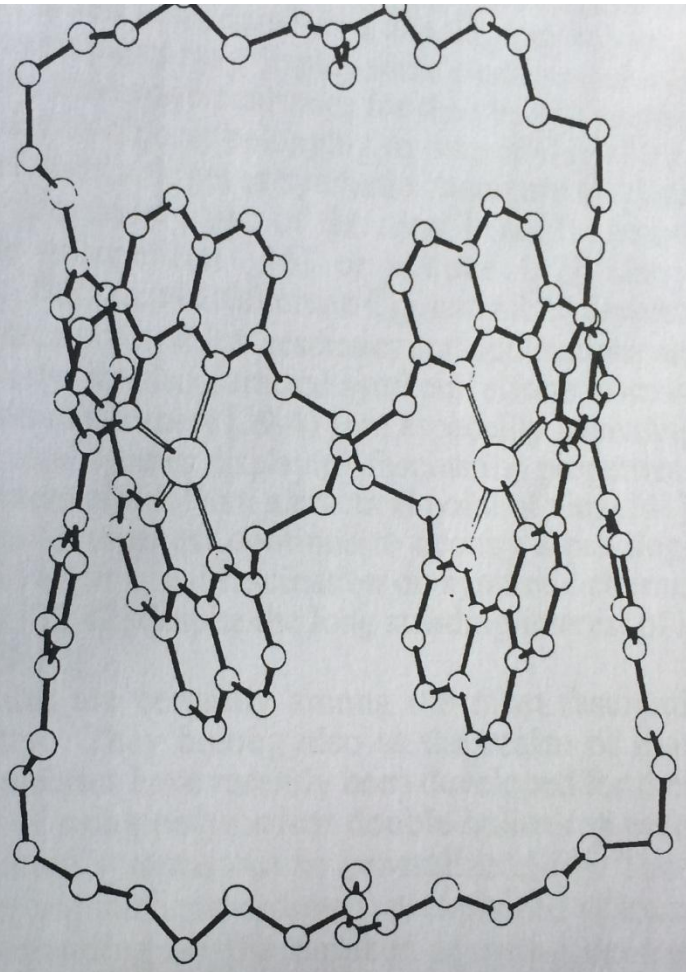


Figure 14. X-ray structure of the dicopper trefoil knot **25**$^{2+}$.[34]

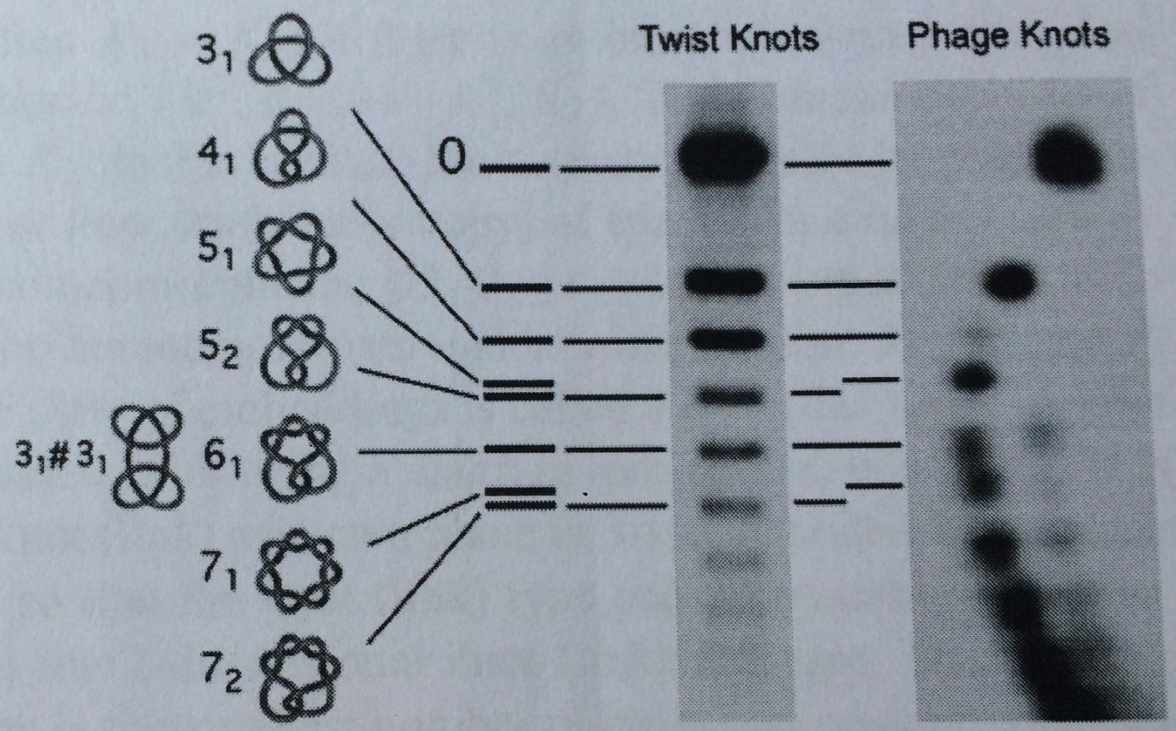
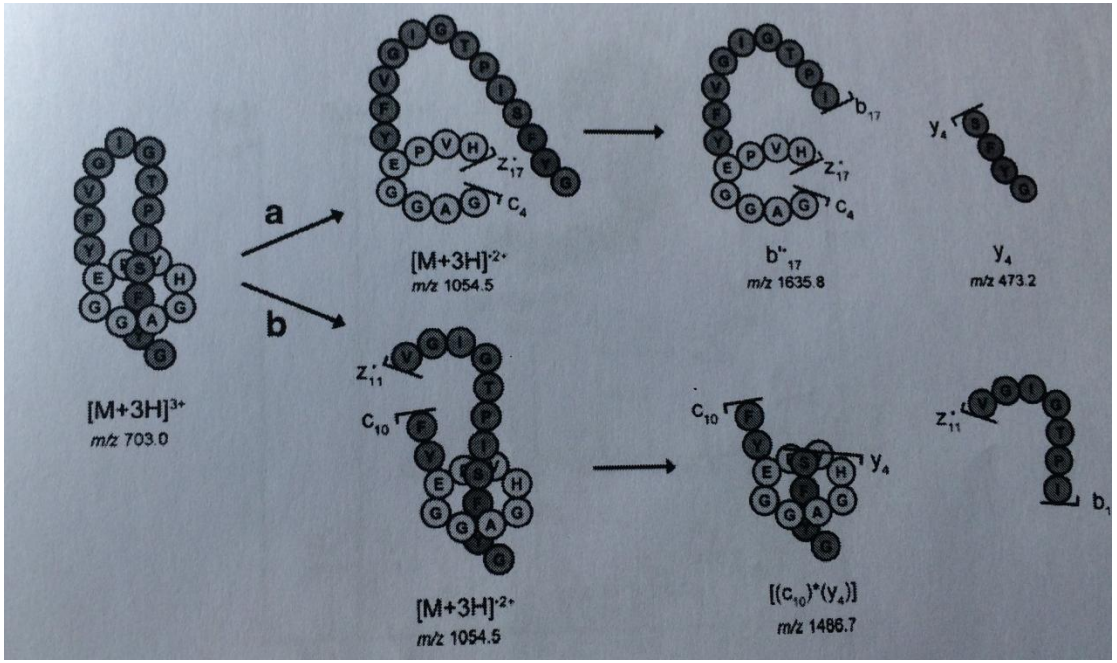


Fig. 11.8 Gel electrophoresis of DNA knots (from [AVM+05])

ZNOWU BIOLOGIA

Węzły oraz sploty są także wykorzystywane w przedstawianiu budowy strukturalnej bakterii i innych mikroorganizmów.



WĘZŁY I CHEMIA

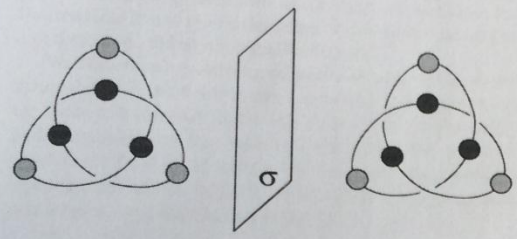


Figure 3. Topological chirality (enantiomers) of trefoil knots.

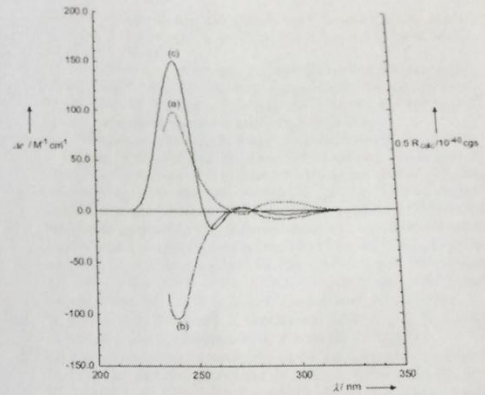
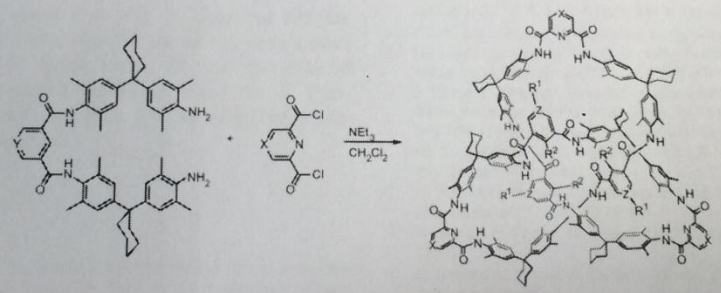


Figure 4. Experimental (a), (b) and theoretical (c) circular dichrograms.



2 a: Y = CH
b: Y = CCH_3
c: Y = N

3 a: X = CH
b: X = CD
c: X = CCl
d: X = $CCOCH_3$

1 a: X = CH, Y =CH
b: X = CH, Y = N
c: X = CH, Y = CCH_3
d: X = CD, Y = CH
e: X = CCl, Y = N
f: X = $COCH_3$, Y = N

Figure 5. New synthesized knots.

CHEMIA

Wzory strukuralne

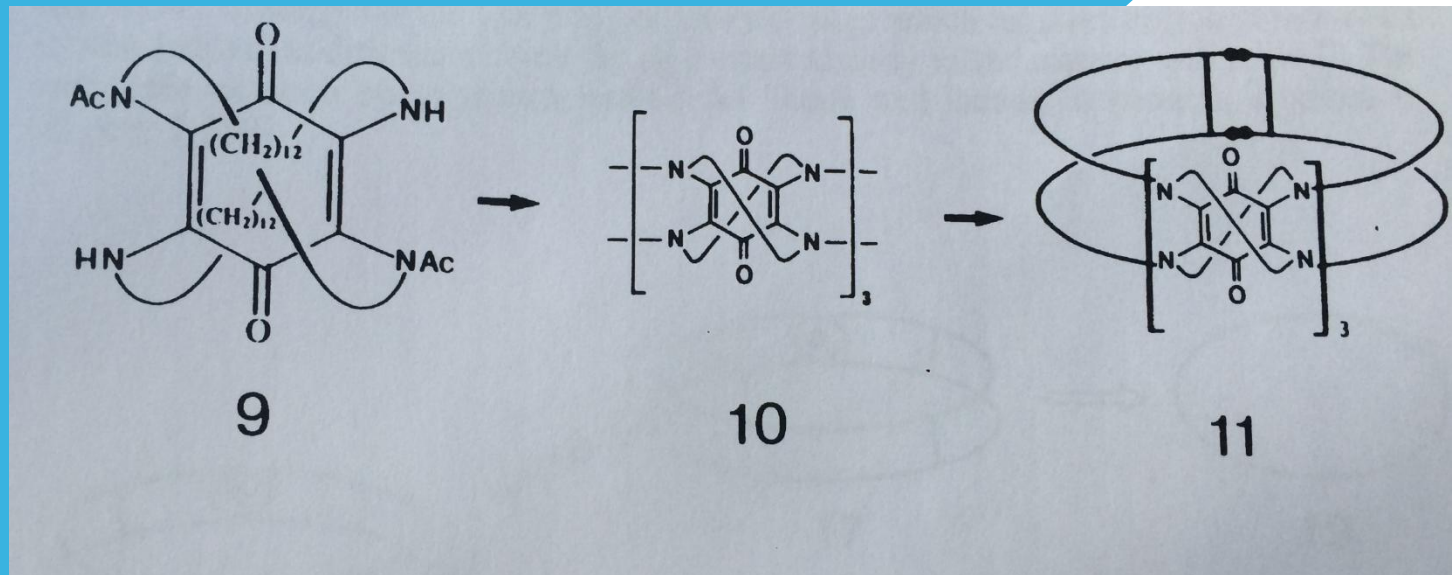
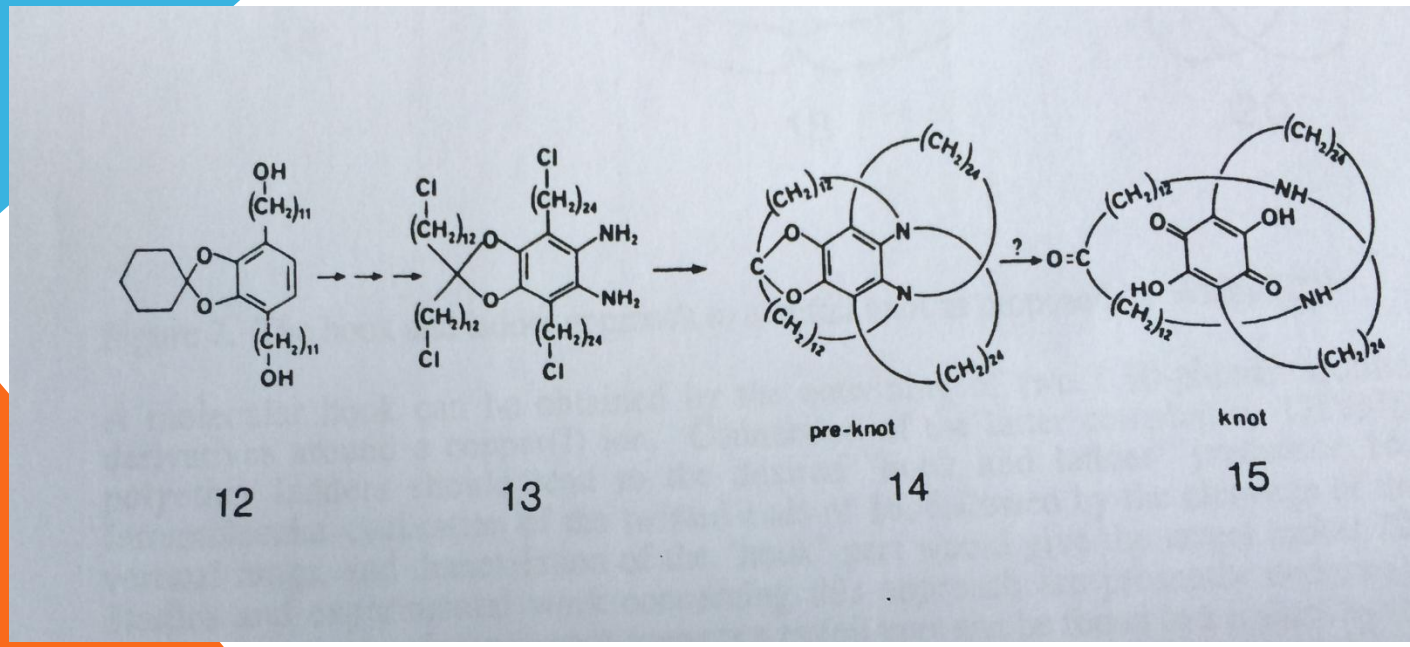


Figure 5. A way of introducing three half-twists in a molecular ladder as envisaged by Schill and his group.[14]



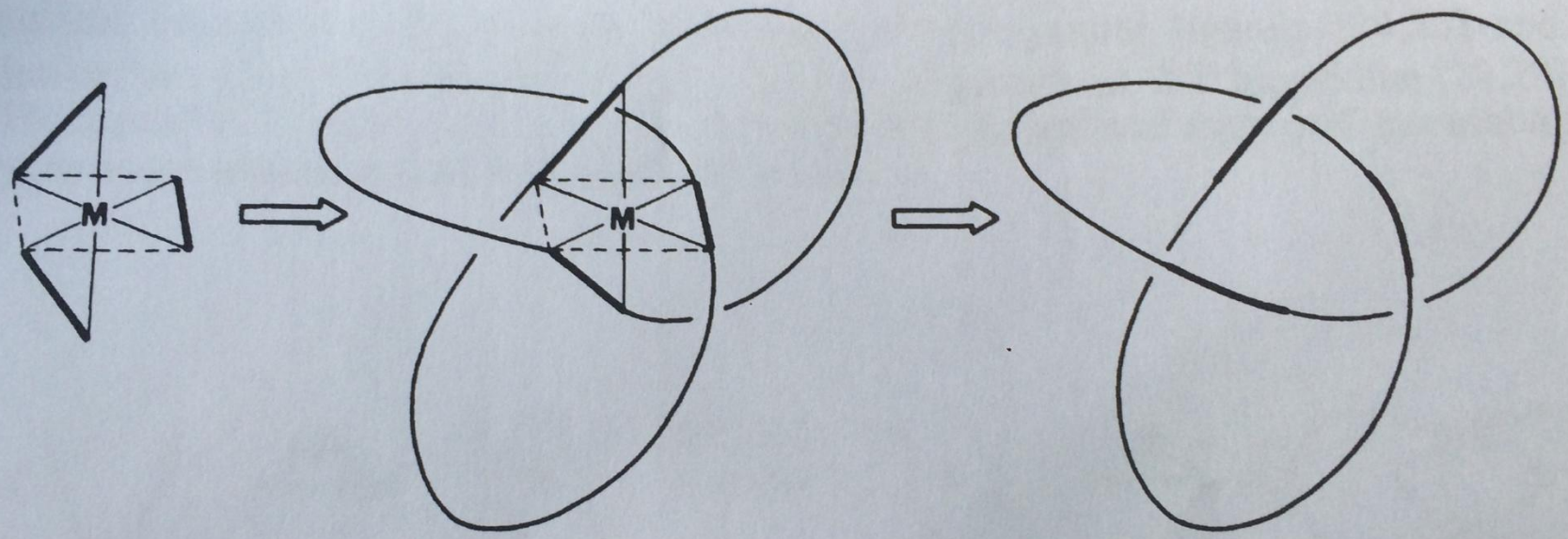


Figure 8. Sokolov's strategy for constructing a trefoil knot on an octahedral tris-chelate complex.[21]

STRATEGIA SOKOLVA

LITERATURA

- http://www.ot.co.id/e_Research_life.aspx?Research_id=11
- http://www.ijbs.com/v06p0834.htm
- http://www.mimuw.edu.pl/~jurewicz/jj197869.pdf
- http://postepy.ptf.net.pl/tl_files/postepy/pdf/2004/pf55z3s120.pdf
- http://www.swietageometria.darmowefora.pl/index.php?topic=15.25;wap2
- http://www.msn.ap.siedlce.pl/smp/msn/12/39-43.pdf
- http://www.cryptography.ovh.org/
- https://www.math.hmc.edu/~gu/curves_and_surfaces/surfaces/moebius.html