Niezmienniki wielomianowe:

Wielomian Jonesa
Wielomian Alexandra
Nawias Kauffmana

Julia Radwan-Pragłowska

gr. 10B2

Elementy teorii węzłów

Plan prezentacji

1. Wprowadzenie
   - Niezmiennik
   - Wielomian
   - Wielomian wielomian węzła
   - Warkocz
   - Grupa warkocza
   - Wielomian Laurenta
2. Niezmienniki homologiczne
   1. Wielomian Alexandra
   2. Wielomian Alexadra-Conwaya
3. Niezmienniki diagramatyczne
   1. Wielomian Jonesa
      - Warkocz splotu
      - Lustrzane odbicie
      - Przykłady
      - Obliczenia
   2. Nawias Kauffmana

Niezmiennik węzła/splotu

Dana własność węzła (splotu) jest jego niezmiennikiem, jeżeli nie ulega zmianie podczas żadnego z trzech ruchów Reidemeistera

- Gdy dwa sploty są równoważne, to niezmiennik jest zgodny dla obu splotów.
- Zwykle stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tj. istnieją nierównoważne sploty o zgodnych niezmiennikach
- Jeśli niezmiennik różni się dla dwóch splotów, to sploty te nie są ze sobą równoważne.
- Niezmienniki Reidemeistera służą do udowodnienia, że dane węzły, czy sploty, nie są podobnie zasupłane.
- Zastosowanie przy rozwiązywaniu problemów natury klasyfikacyjnej.

Wielomian

- Wyrażenie algebraiczne złożone ze zmiennych i stałych połączonych z działaniami takimi jak:

✓ Dodawanie
✓ Odejmowanie
✓ Mnożenie
✓ Potęgowanie o stałym wykładniku naturalnym

Wielomian węzła

Niezmiennik węzła w formie wielomianu takiego jak:

- ✓ wielomian Alexandra
- ✓ wielomian BLM/Ho
- ✓ wielomian nawiasowy
- ✓ wielomian Conwaya
- ✓ wielomian HOMFLY
- ✓ wielomian Jonesa
- ✓ wielomian Kauffmana F
- ✓ wielomian Kauffmana X
- ✓ niezmiennik Vassilieva

Wielomian Laurenta

- Autor: Pierre Alphonse Laurent
- Wielomian w jednej zmiennej na polu F jest liniowa kombinacją dodatnich i ujemnych sił zmiennej ze współczynnikami F
- Wielomiany Laurenta X tworzą pierścień $F[X, X^{-1}]$
- Wielomian Laurenta p:

$$p = \sum_{k} p_k X^k, p_k \in F$$

X - zmienna, k - wskaźnik sumy, p_k - współczynnik

Warkocz

- Teoria warkoczy (Emil Artin 1947 r.)

Warkocze mogą tworzyć grupy. Działanie grupy polega na zrobieniu pierwszego warkocza na stosie sznurków, a następnie drugiego warkocza na już skręconych sznurkach.

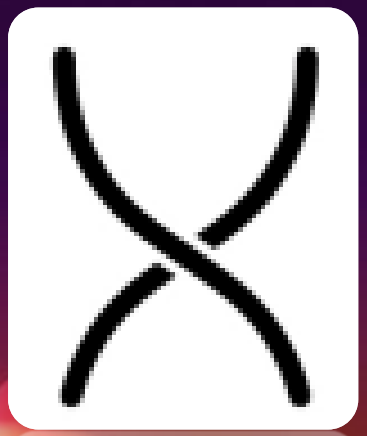
Grupa warkoczy

- Grupy warkoczy B_n (rys. B_3 i B_4)
- Niech $n \in N$
- Symbol B_n oznacza zbiór wszystkich warkoczy, złożonych z n strun rozpiętych pomiędzy n punktami położonymi na dwóch równoległych płaszczyznach
- Warkocze utożsamiane są „homeomorficznie”.

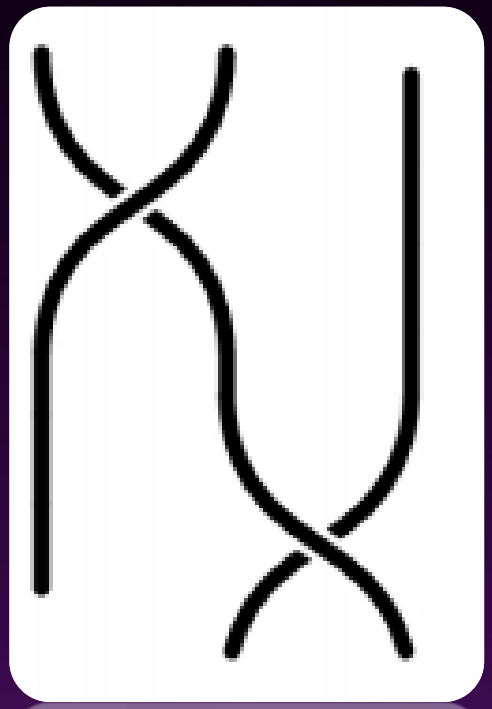
Grupa warkoczy

- Dodawanie warkoczy polega na naturalnym złożeniu

Warkocz 1



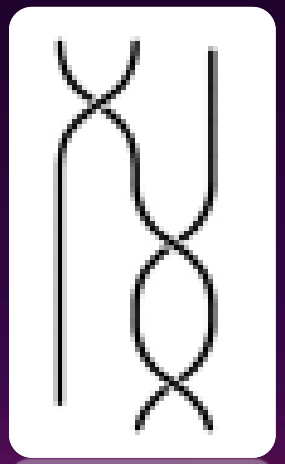
Warkocz 2



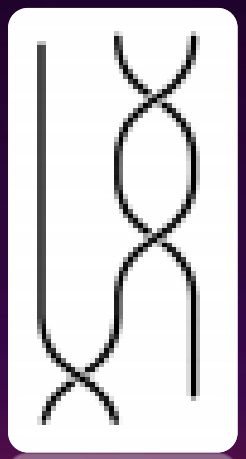
Warkocz 1,2

Grupa warkoczy

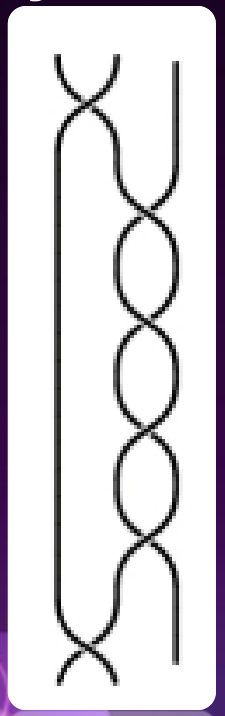
- Branie elementu odwrotnego do danego warkocza polega na odbiciu symetrycznym względem dolnej płaszczyzny:



Warkocz 1,2



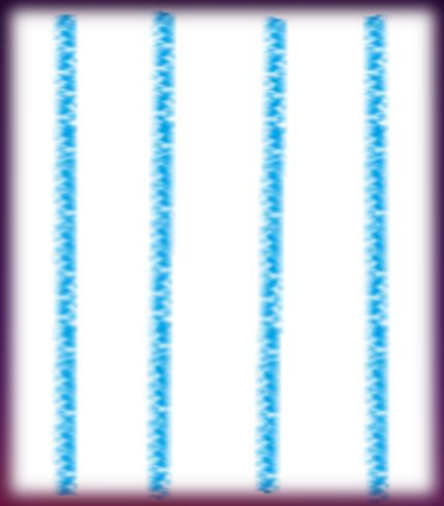
Warkocz $(1,2)^{-1}$



Warkocz $a=1,2(1,2)^{-1}$

Permutacje warkoczy

- Ilu permutacji 4 elementowej grupy warkoczowej można dokonać?



Permutacje warkoczy

?? = 4! = 24

Wielomian Alexandra

- Twierdzenie Alexandra:

Każdy węzeł (splot) ma postać zamkniętego warkocza.

- Twierdzenie Markowa:

Dwa warkocze, które mogą posiadać różną ilość pasm, po zamknięciu są równoważne jako węzły (sploty) wtedy i tylko wtedy, gdy warkocze te powstają jeden z drugiego przez skończoną ilość ruchów dwóch typów.

- Ruchy te zwane są ruchami Markowa.

$$\beta \leftrightarrow \alpha\beta\alpha^{-1}$$
$$\beta \leftrightarrow \beta\sigma\pm 1\ n$$

Wielomian Alexandra

- 1928 rok - podanie reguł pozwalających na przypisanie każdemu węzłowi pewien wielomian przez J. W. Alexandra
- Wielomian Alexandra jest niezmiennikiem węzła

nie ulega zmianie, gdy węzeł zostanie poddany deformacjom, podczas których nie dochodzi samoprzecięcia

- Sytuacje, w których dwa różne węzły związane są z tym samym wielomianem są bardzo rzadkie
- Wyznaczanie wielomianu Alexandra stało się użyteczną metodą identyfikacji węzłów

Wielomian Alexandra

- Każdy węzeł można sprowadzić do postaci, która charakteryzuje się minimalną liczbą skrzyżowań MCN (ang. *minimal crossing number*) widocznych w jego rzucie na pewną płaszczyznę
- Węzeł, którego MCN ' 0 to węzeł trywialny
- Wraz ze wzrostem minimalnej liczby skrzyżowań bardzo gwałtownie wzrasta liczba różnych węzłów
- Znajomość wielomianu Alexandra węzła pomaga odnaleźć go w tablicach i określić typ
- Nie pozwala on na rozróżnienie skrętów
- Jest słabszy od wielomianu Jonesa

Wielomian Alexandra

- Ponieważ wielomian Alexandra oswojonego węzła w sferze trójwymiarowej posiada reprezentującą macierz kwadratową, jego ideał Aleksandra (pierścień integralnych wielomianów Laurenta) jest ideałem głównym i posiada wielomian Alexandra zapisywany jako $\Delta(t)$.

Wielomian Alexandra

Gdy Ψ jest wynikiem mnożenia macierzy warkoczy (σ) węzła, wtedy:

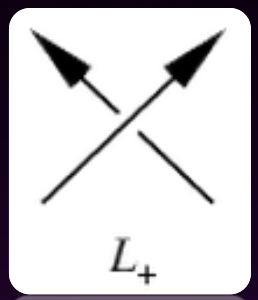
$$\Delta_L = \det(1- \Psi)/(1+x+\ldots+x^{n-1})$$

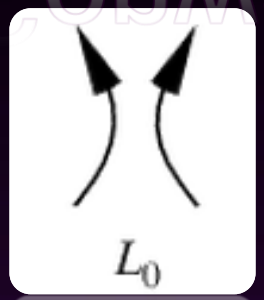
Gdzie Δ_L wielomian Alexandra, det - wyznacznik

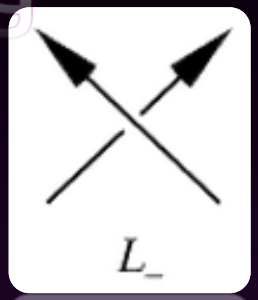
$$\Delta (x) = \det(V^x - xV)$$

- gdzie V - macierz Seiferta, V^x transponowana macierz Seiferta
- Wielomian Alexandra jest symetryczny dla x i x^{-1} i wynosi $\Delta (1) = \pm 1$

Wielomian Alexandra Conwaya







- 1969 r., opracowanie przez Johna Conwaya wersji wielomianu Alexandra, ∇(z), Wielomian Alexandra-Conwaya
- Jeśli wielomian Alexandra skrzyżowania L zmiennej x oznaczymy Δ_L (x) wtedy istnieje zależność pomiędzy przeciwnymi skrzyżowaniami :

$$\Delta_{L+}(x) - \Delta_{L-}(x) + (x^{-1/2} - x^{1/2})\,\Delta_{L0}(x) = 0$$

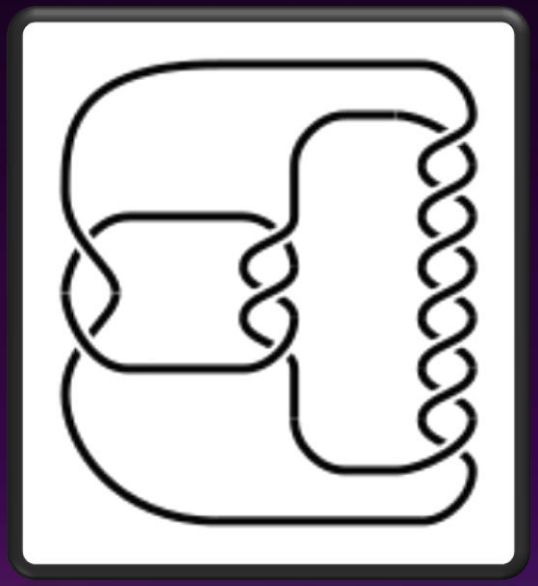
- Wielomian dla rozszczepionego skrzyżowania L zawsze wynosi zero.

Wielomian Alexandera Conwaya

- Relacja pozwala na wyznaczenie wielomianów Alexsandra dla dowolnych węzłów poprzez budowanie ich jako zestaw skrzyżowań dodatnich i ujemnych
- Znane są przykłady węzłów nietrywialnych o $\Delta_L = 1$ jednak nie w przypadku węzłów o ilości 10 lub mniej skrzyżowań.

Wielomian Alexandera Conwaya

- Przykład stanowi węzeł **Fintushel-Sterna** (-2,3,7), inaczej „precel”



Zastosowanie węzła Pretzel

Wielomian Alexandra-Conweya

- Zmodyfikowana wersja wielomianu Alexandera w wyniku reparametryzacji:

$$\Delta_L(x) = \nabla_L(x - x^{-1})$$

$\Delta_L(x)$ Wielomian Alexandra-Conweya

Zależność pomiędzy skrzyżowaniami L:

$$\Delta_{L+}(x) - \Delta_{L-}(x) = x\,\Delta_{L0}(x)$$

Wielomian Jonesa

- Autor: Vaughan Frederick Randal Jones (ur. 31.12.1952 r.)
- Medal Fieldsa, Kioto 1990 r.
- Nowozelandzki matematyk
- Uniwersytet w Genewie
- Uniwersytet Kalifornijski, Berkley
- Odkrycie wielomianu 1984 r.

Wielomian Jonesa

- Twierdzenie Jonesa:

Wielomian $V_L(x)$ jest niezmiennikiem splotów:

$$V_L(x) = V_{L'}(x)$$

$$\Downarrow$$

$$c_i(L) = c_i(L')$$

Tzn. gdy sploty L oraz L' są ze sobą równoważne.

Wielomian Jonesa

- Każdemu splotowi zorientowanemu L można przypisać wielomian Laurenta $V_L(x)$ zmiennej $\sqrt{x}$:

$$\cdots + c_{-2}(\sqrt{x})^{-2} + c_{-1}(\sqrt{x})^{-1} + c_0 + c_1(\sqrt{x}) + c_2(\sqrt{x})^2 + \cdots$$

o współczynnikach całkowitych $c_i = c_i(L)$, przy czym c_i 6= 0 dla skończonej liczby indeksów

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{oraz } c_i = 0$$

Wielomian Jonesa

- Wielomian Jonesa splotu zorientowanego L:

$$V_L(x) = (\sqrt{x})^{1-n+e(\beta)} (-t^{-1})^{n-1} \operatorname{trace} \rho(\beta)$$

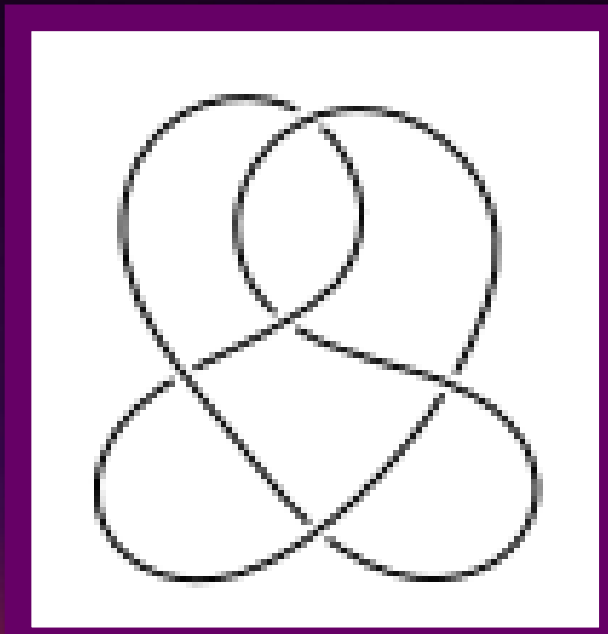
β - warkocz o n pasmach, którego zamknięciem jest L

$e(\beta)$ - suma wykładników w przedstawieniu warkocza β za pomocą generatorów $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ grupy n-warkoczy, $n \geq 2$

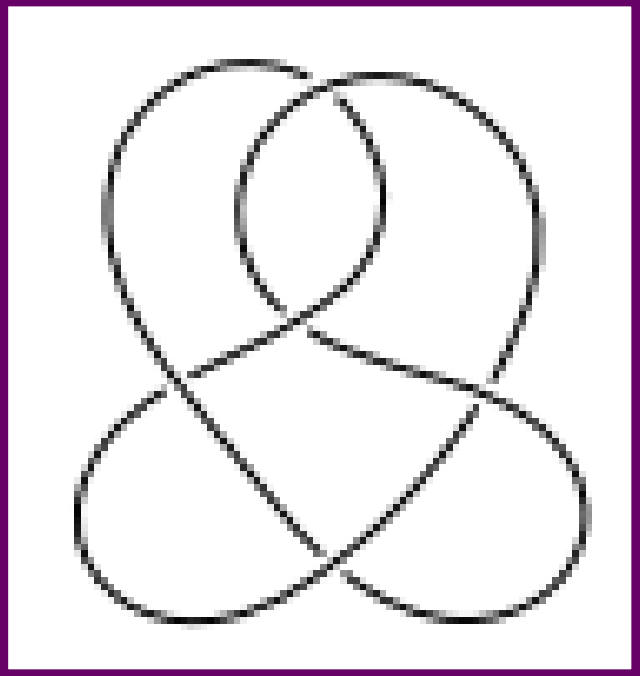
trace $\rho(\beta)$ - ślad macierzy Burau $\rho(\beta)$ warkocza β

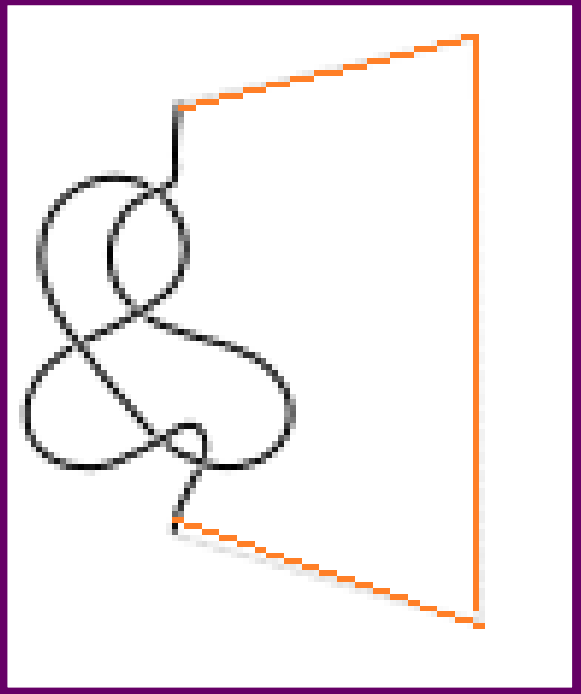
Warkoczowa postać splotu

- Jak określić warkocz β, którego zamknięciem jest dany splot L?

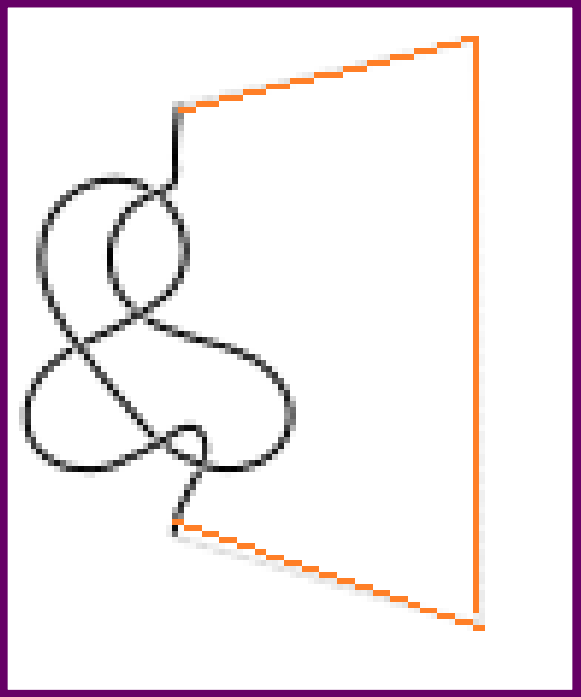


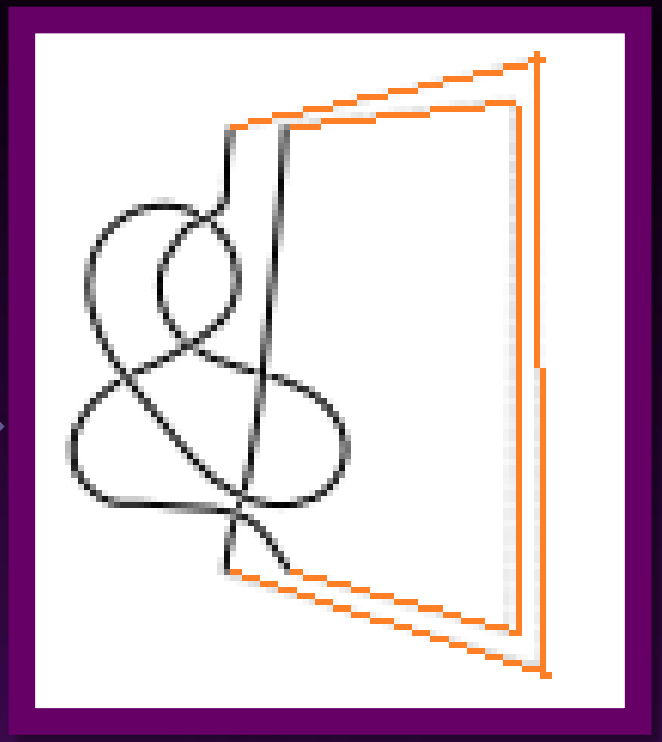
Warkoczowa postać splotu



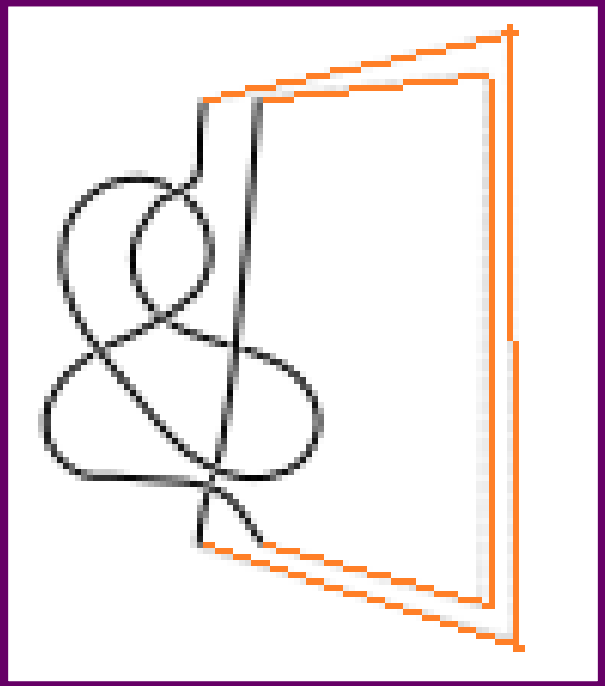


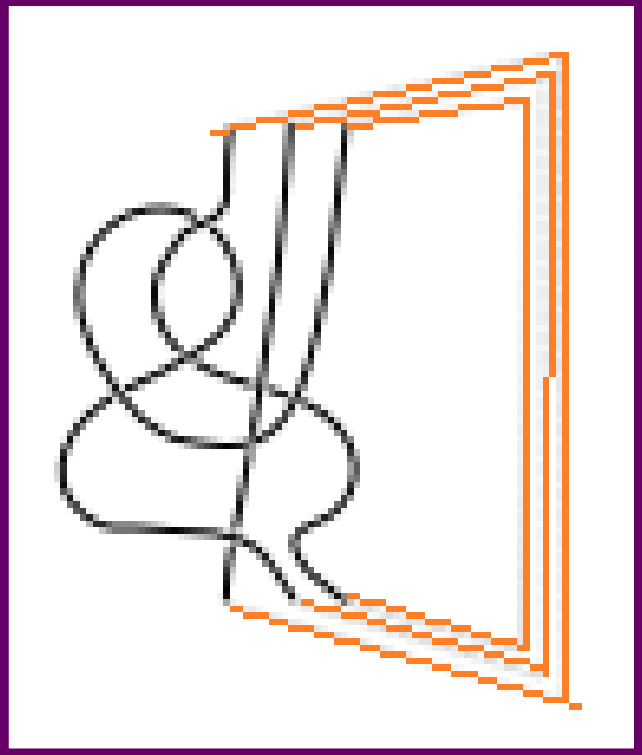
Warkoczowa postać splotu



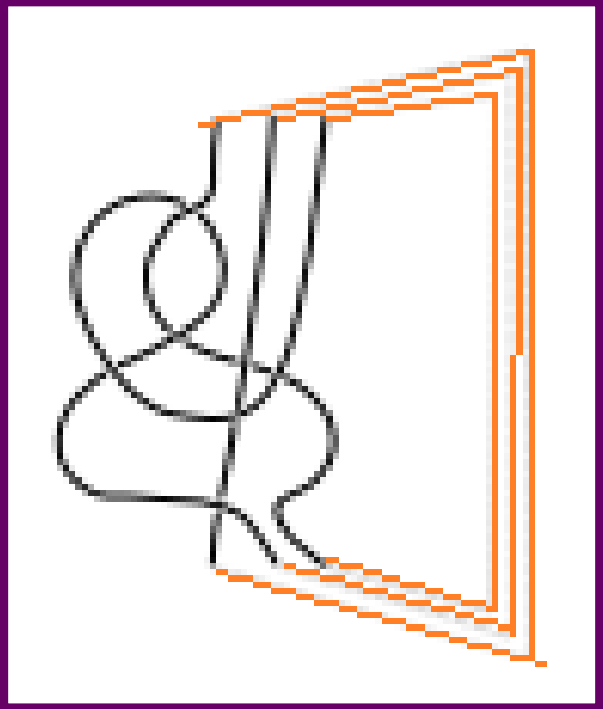


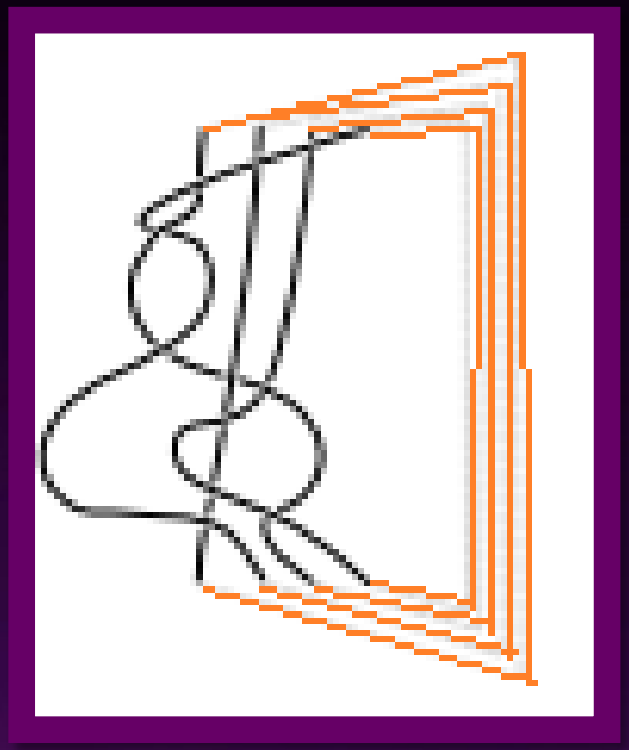
Warkoczowa postać splotu



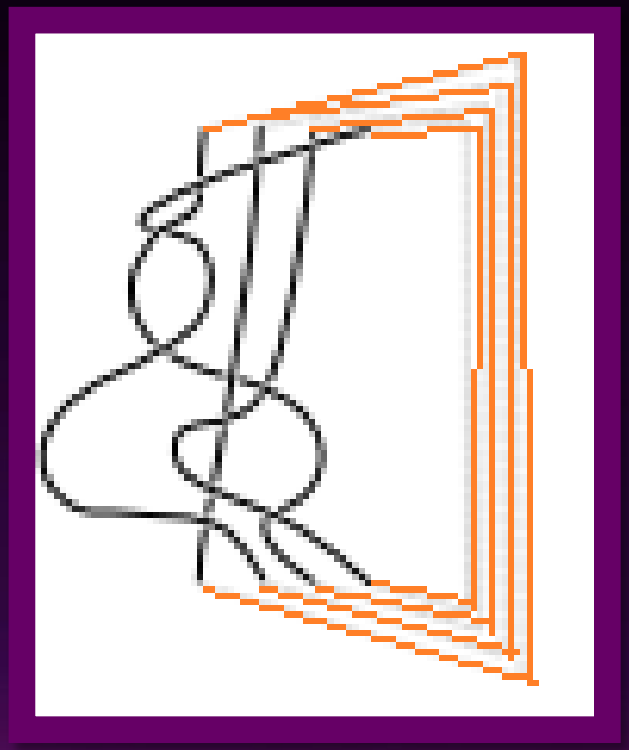


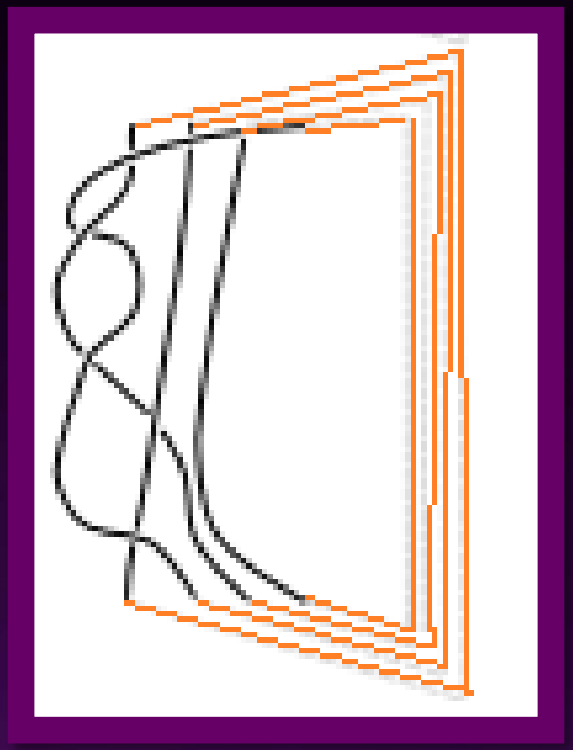
Warkoczowa postać splotu





Warkoczowa postać splotu





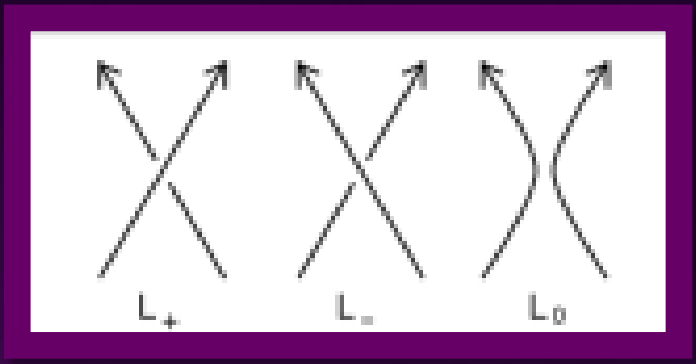
- Wielomian Jonesa węzła rozsupłanego

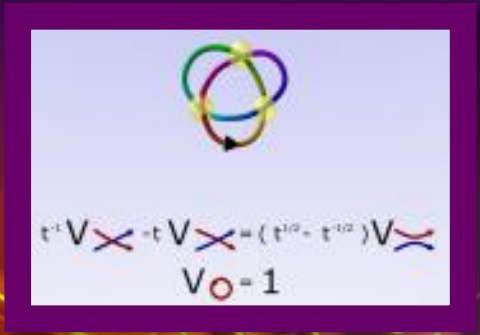
$$V_o(x) = 1$$

$$x^{-1} V_{L+}(x) - V_{L-}(x) = (x^{1/2} - x^{-1/2}) V_{L0}(x)$$

Wielomian Jonesa

- Dla dowolnych trzech splotów zorientowanych L_+, L_-, L_0 różniących się od siebie tylko w jednym fragmencie splotu:





Wielomian Jonesa

- Wielomian Jonesa węzła, czy splotu L mającego nieparzystą liczbę składowych, jest wielomianem Laurenta zmiennej x

$$V_L(x) = \cdots + c_{-2}x^{-2} + c_{-1}x^{-21} + c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$$

o współczynnikach całkowitych $c_i = c_i(L)$,

przy czym c_i 6= 0 tylko dla skończonej liczby indeksów i = 0, ±1, ±2 . . .

- gdy splot L ma n składowych, n ≥1

$$V_L(1) = (-2)^{n-1}$$

$V_L(x) \neq 0$, tj. co najmniej jeden współczynnik $c_i(L) \neq 0$

$$V_{L1\#L2}(x) = V_{L1}(x)V_{L2}(x)$$

dla dwóch splotów L_1 oraz L_2

Zwierciadlane odbicie

$$V_{L^*}(x) = V_L(x^{-1}),\ \text{tj. } c_i(L^*) = c_{-i}(L)$$

- dla splotu L i jego zwierciadlanego odbicia L^*

$$V_{Lor}(x) = V_L(x)$$

- tj. $c_i(L_{or}) = c_i(L)$ dla splotu L i jego kopii L_{or} będącej splotem L z odwróconą orientacją.

Zwierciadlane odbicie

- Zwierciadlane odbicie L^* splotu L otrzymuje się przez wzajemną zamianę mostów z tunelami na każdym skrzyżowaniu splotu L
- Dla zwierciadlanego odbicia L^* splotu L

$$V_{L^*}(x) = V_L(x^{-1}), \text{ tj. } c_i(L^*) = c_{-i}(L)$$

dla $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Wielomian Jonesa

- Splot L jest zwierciadlany, jeżeli L i L^* są równoważne
- Dla zwierciadlanego splotu

$$L,\ V_L(x) = V_{L^*}(x) = V_L(x^{-1}),$$

Tzn. $c_i(L) = c_i(L^*) = c_{-i}(L)$ dla $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

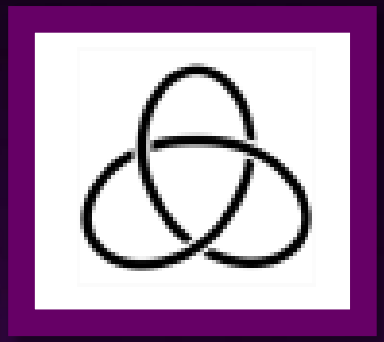
wielomian Jonesa $V_L(x)$ jest wielomianem symetrycznym

- Istnieją węzły, których wielomiany Jonesa są symetryczne, lecz same węzły nie są zwierciadlane

Wielomian Jonesa przykład 1

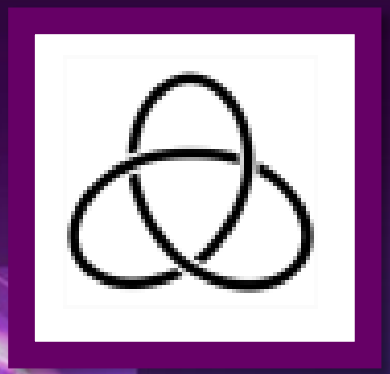
- Wielomian Jonesa dla trójlistnika

Trójlistnik lewy



$$V(x) = x^{-1} + x^{-3} - x^{-4}$$

Trójlistnik prawy



$$V(x) = x + x^{3} - x^{4}$$

Wielomian Jonesa Trójlistnik

- Znając już jeden z dwóch możliwych wielomianów Jonesa, drugi obliczamy zastępując x przez x^{-1} w znanym wielomianie.

Wielomian Jonesa trójlistnika nie jest symetryczny i dlatego też trójlistnik nie jest węzłem zwierciadlanym

Wielomian Jonesa przykład 2

Splot Hopfa

$$V_L(x) = \sqrt{x} + (\sqrt{x})^5 = (1 + x^2)\sqrt{x}$$

Wielomian Jonesa przykład 3

Splot pierścieni rodziny Boromeuszy

$$V_L(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 4 - 2x^{-1} + 3x^{-2} - x^{-3}$$

Wielomian Jonesa przykład 4

Splot Whiteheada

$$V_L(x) = -(\sqrt{x})^{-3} + (\sqrt{x})^{-1} - 2\sqrt{x} + (\sqrt{x})^{3} -$$

$$- \ 2(\sqrt{x})^{5} + (\sqrt{x})^{7} =$$

$$= -(-1 + x - 2x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5)(\sqrt{x})^{-3}$$

Wielomian Jonesa przykład 5

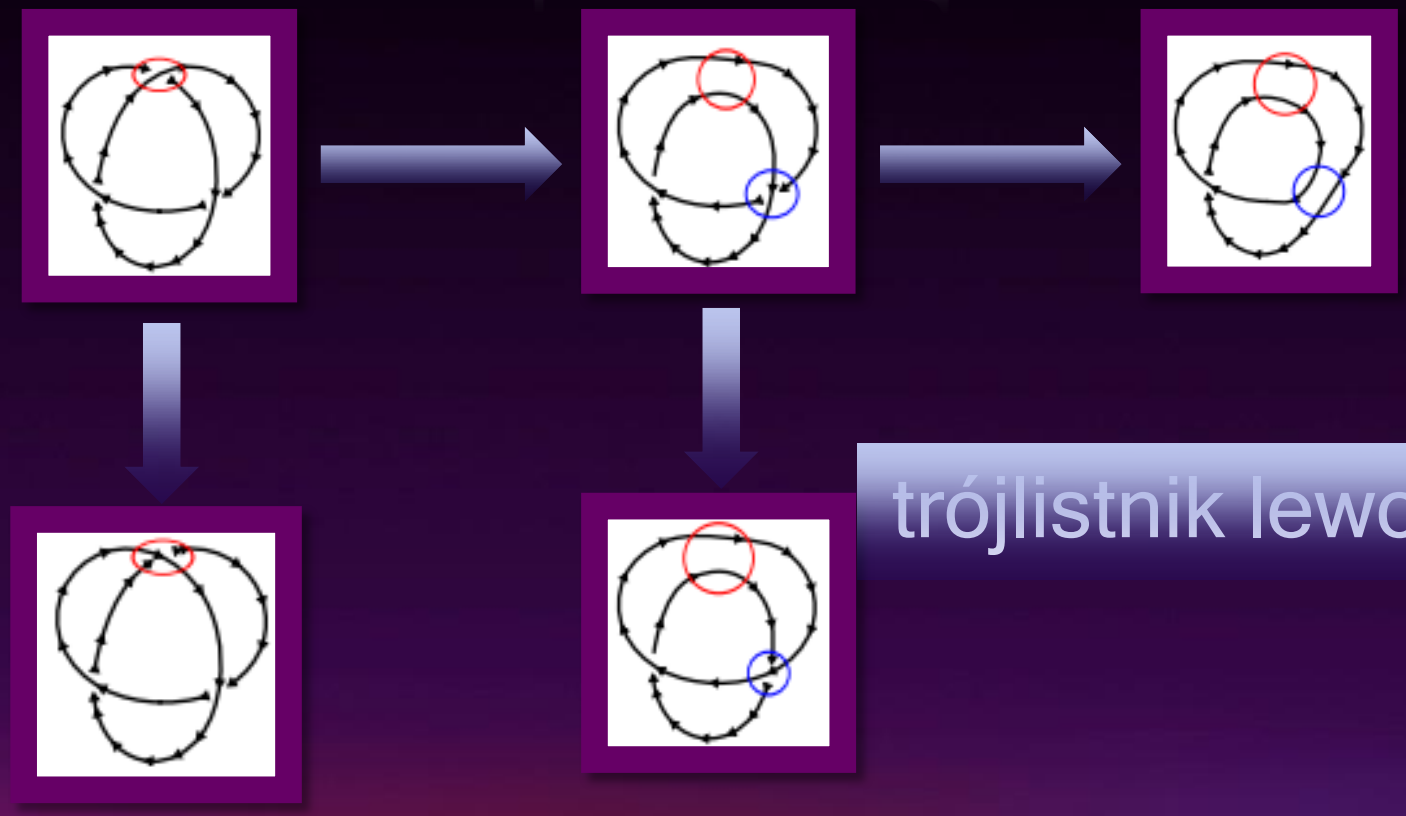
- Wielomian Jonesa dla węzła ósemkowego

$$V(x) = x^{-2} - x^{-1} + 1 - x + x^{2} = V(x^{-1})$$

✓ V (z) to wielomian symetryczny

✓ węzeł ósemkowy jest zwierciadlany

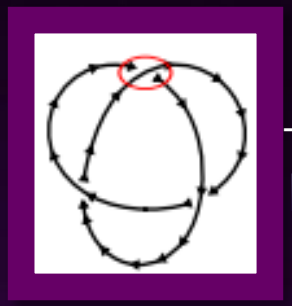
Obliczanie Wielomianu Jonesa 1



trójlistnik lewoskrętny

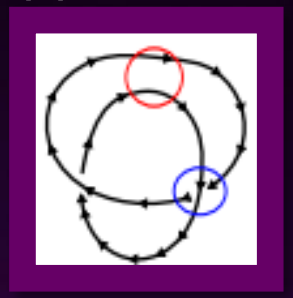
Obliczanie Wielomianu Jonesa 1

$V(x) = x^{-1} + x^{-3} - x^{-4}$

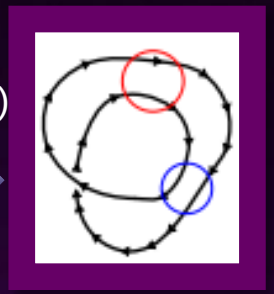


$-x^{-1}(x^{1/2} - x^{-1/2})$

$V(x) = x^{-5/2} + x^{-1/2}$

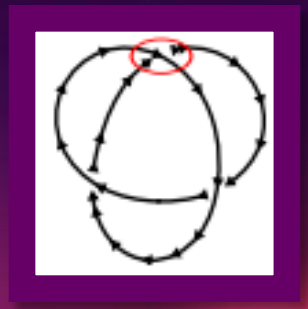


$-x^{-1}(x^{1/2} - x^{-1/2})$



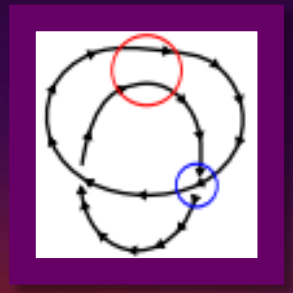
$V=1$

x^{-2}



$V=1$

x^{-2}

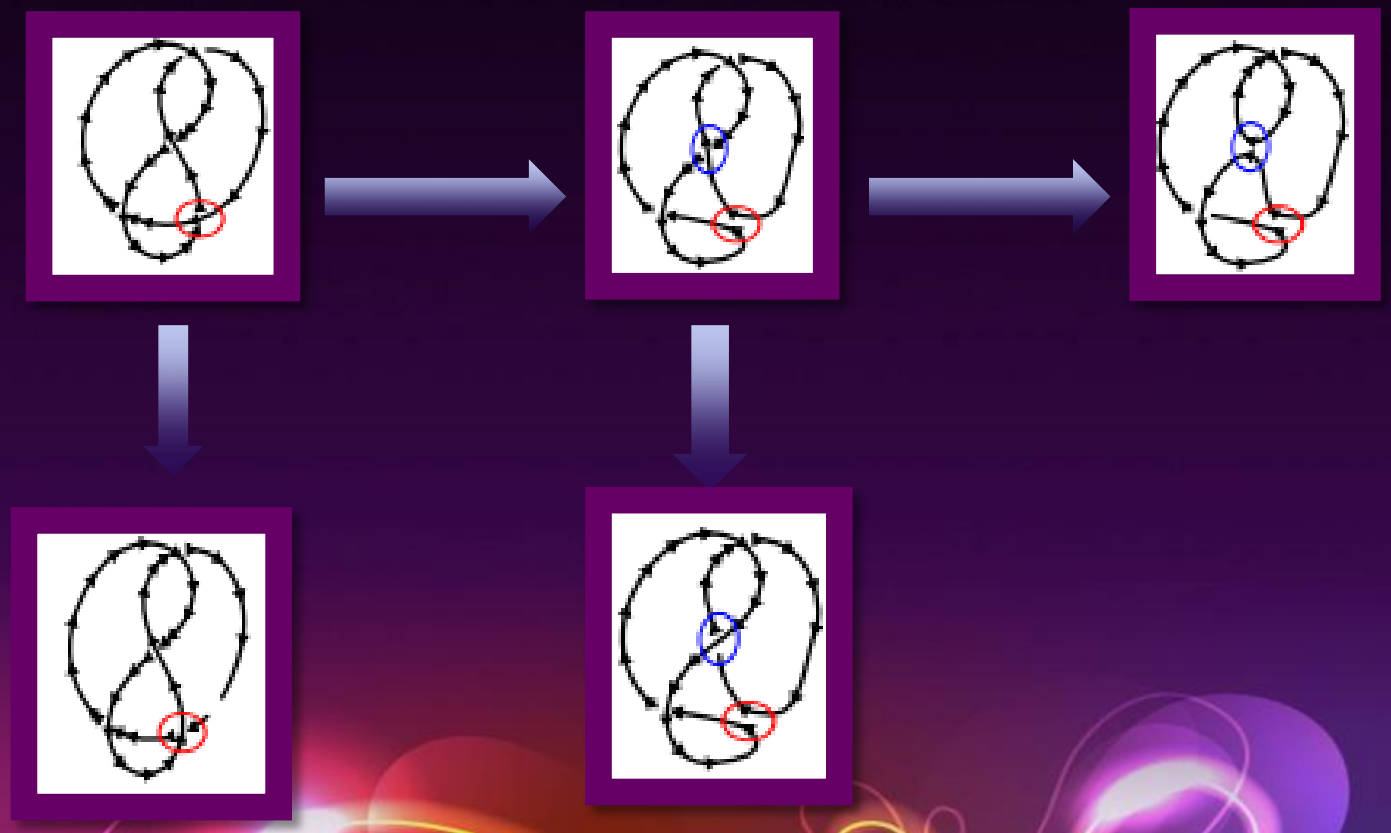


$V = x^{-1/2} - x^{1/2}$

Trójlistnik lewoskrętny

Obliczanie Wielomianu Jonesa 2

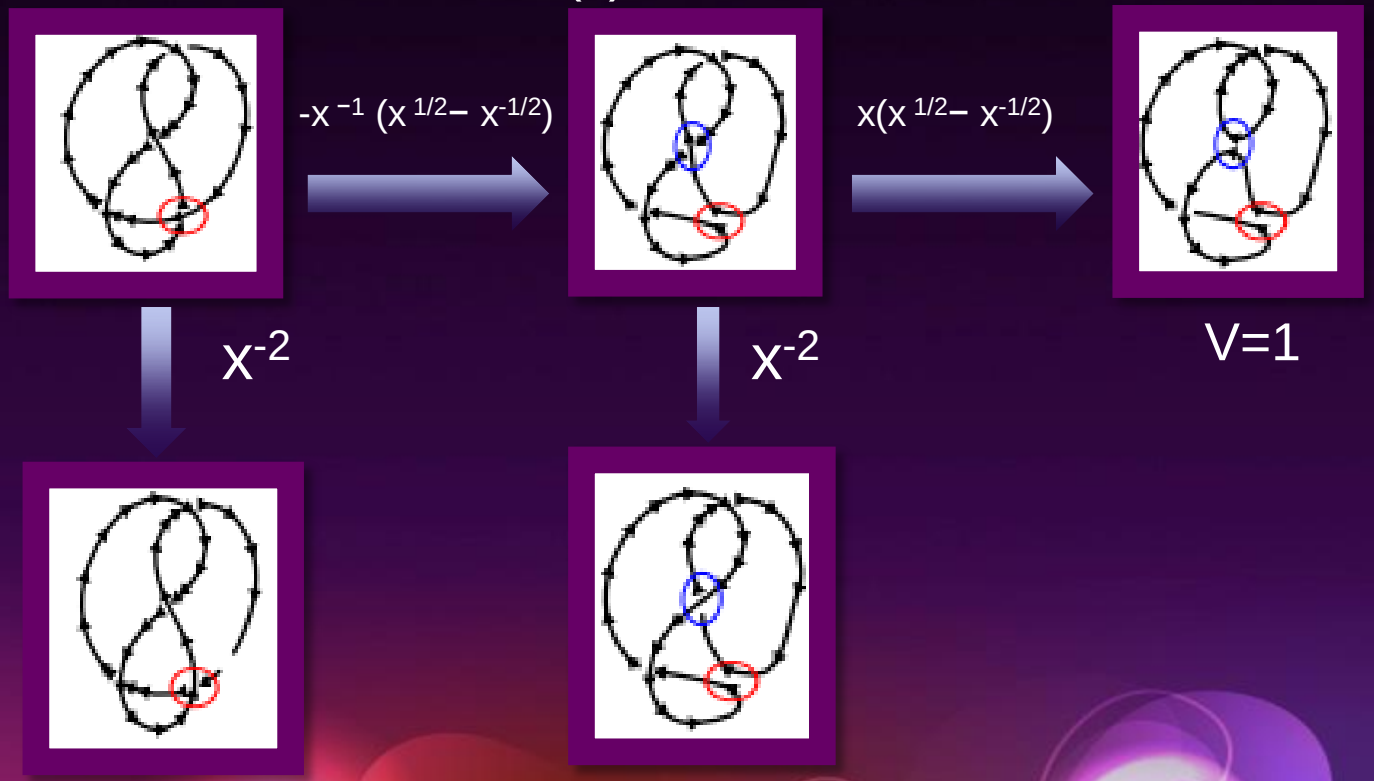
- Węzeł ósemkowy



Obliczanie Wielomianu Jonesa 2

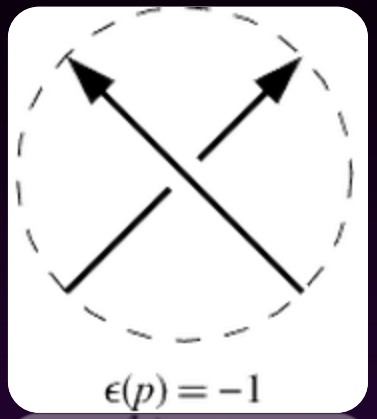
- Węzeł ósemkowy

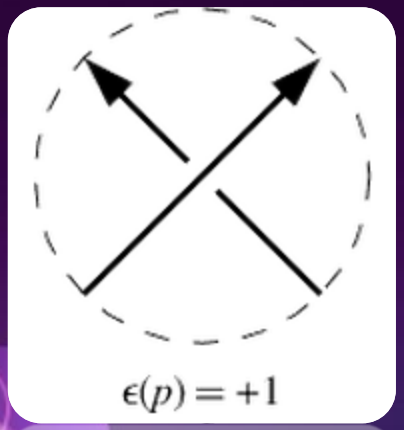
$V(x) = x^{-2} - x^{-1} + 1 - x + x^2$ $V(x) = -x^{5/2} - x^{1/2}$



Nawias Kauffmana

- Odkryty w 1987 r. przez Louisa Kauffmana
- Inaczej wielomian nawiasowy lub regularny, izotopowy niezmiennik
- Uogólnienie wielomianu Jonesa
- Nie jest niezmiennikiem topologicznym
- Można go przekształcić I ruchem Reidemeistra
- Rozpiętość nawiasu Kauffmana jest niezmiennikiem węzła, ponieważ jest znormalizowaną formą liczby skrętów





$$w(L) = \sum_{p \in C(L)} \in (p)$$

Bibliografia

1. An Introduction to Braid Theory, Maurice Chiodo, 2005
2. Weisstein, Eric W. "Bracket Polynomial”
3. Weisstein, Eric W. "Alexander Polynomial.„
4. http://mathworld.wolfram.com/JonesPolynomial.html
5. Niezmienniki, Tomasz Jakubek
6. Wielomiany Jonesa węzłów i splotów, Krzysztof Pawałowski Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
7. Projekt matematyczny, Tomasz Kochanek, Uniwersytet Śląski Instytut Matematyki Katowice
8. Poszukiwanie węzłów idealnych II – algorytm wyznaczania wielomianów Alexandra w języku Maple V.4., Jacek Buśkiewicz, Piotr Pierański, Politechnika Poznańska