

1. FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH I FUNKCJE UWIKŁANE

- Zad. 1. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $(1,04)^{(2,02)}$,
Zad. 2. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt{2,1 \cdot 8,05}$,
Zad. 3. Wykazać, że każda funkcja $z(x, y) = x^2 f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, gdzie f jest funkcją różniczkowalną jednej zmiennej, spełnia równanie

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z,$$

- Zad. 4. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^{3y})}{\sqrt{y-x}},$$

- Zad. 5. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = -x^2 - 6y^2$,
Zad. 6. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = -5x^2 + 7y^2$,
Zad. 7. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^3 + \frac{1}{27}y^3 - xy$,
Zad. 8. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$,
Zad. 9. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 + 6y + 8 - x$,
Zad. 10. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = \frac{1}{y}e^{y^2+y+x^2}$,
Zad. 11. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y)$,
w zbiorze $D = (0, \pi) \times (0, \pi)$,
Zad. 12. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + z$.

- Zad. 13. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

(a) $f(x, y) = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$

(b) $f(x, y) = e^x(x^2 + y^2)$

(c) $f(x, y) = \ln(xy) + 2x^2 - 2y^2 + 3$

(d) $f(x, y) = (x - y^2) \cdot \ln x$

(e) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 3y^2)$

(f) $f(x, y) = (y + 2)^2 + (y - x)^2$

(g) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 12xy$

(h) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

(i) $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - 2y^2 - xy + 6y$

(j) $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ dla $(x, y) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$.

- Zad. 14. Obliczyć pochodne pierwszego i drugiego rzędu dla funkcji uwikłanej y określonej równaniem $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$.

2. CAŁKA OZNACZONA I CAŁKI WIELOKROTNE

2.1. Całka oznaczona - zadania podstawowe.

Zad. 1. Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^{\ln 3} 3xe^{-x} dx$.

Zad. 2. Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Zad. 3. Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$.

Zad. 4. Obliczyć całkę $\int_0^{\ln 5} \sqrt{e^x - 1} dx$.

Zad. 5. Zbadać zbieżność całki $\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x^2+4}$.

Zad. 6. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Zad. 7. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Zad. 8. Obliczyć całkę $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

2.2. Pole między krzywymi.

Zad. 1. Obliczyć pole ograniczone krzywymi $y = x^2$, $y = x$.

Zad. 2. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu $y = \frac{1}{1+x^2}$ oraz osią OX .

Zad. 3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$, oraz osią OX .

Zad. 4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$, oraz osią OX .

Zad. 5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = x^3 + x^2 - 2x$, $x \in [-2, 2]$, oraz osią OX .

Zad. 6. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = x\sqrt{1-x^2}$ oraz osią OX .

Zad. 7. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \sin^3 x$, $y = \cos^3 x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Zad. 8. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \frac{1}{1+x^4}$, $x \in [0, \infty)$, oraz osią OX .

Zad. 9. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = x \ln x$, $x \in (0, 1]$ i osią OX .

Zad. 10. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą $y = 2x - x^2$ i prostą $y = -x$, $x \in [-1, 0]$.

Zad. 11. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach $y = 2x^3$, $y^2 = 4x$.

Zad. 12. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$, $2x - y + 3 = 0$.

Zad. 13. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \ln x$ i $y = \ln^2 x$.

Zad. 14. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^3$ i $y = x^5$.

Zad. 15. Obliczyć pole obszaru zawartego między krzywymi $y = \frac{1}{x^2+2x+10}$ i $y = 0$.

Zad. 16. Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami $y = \frac{1}{x^2+4x+8}$, $y = 0$, dla $x \in [0, 1]$.

Zad. 17. Obliczyć pole obszaru ograniczonego linią $y = \frac{1}{x^2+4x+5}$ oraz jej asymptotą, dla $x \in [0, 1]$.

Zad. 18. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu parametrycznym

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{1}{3}t^3, \quad t \in [0, \sqrt{3}]. \end{cases}$$

Zad. 19. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą

$$\begin{cases} x(t) = 2r \sin^2 t \\ y(t) = 2r \sin^2 t \operatorname{tg} t, \quad t \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}], \quad r > 0. \end{cases}$$

Zad. 20. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą

$$\begin{cases} x(t) = 3r \cos^2 t \\ y(t) = 3r \cos^2 t \operatorname{ctg} t, \quad t \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}], \quad r > 0. \end{cases}$$

Zad. 21. Obliczyć pola powierzchni ograniczonych krzywymi

(a) $y = \cos(x)$, $y = \sin(x)$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$,

(b) $xy = 1$, $y = x$, $y = 2x$ ($x, y > 0$),

(c) $y = \sqrt{|x|}$, $y = x^2$,

(d) $x^2 + (y-2)^2 = 4$, $y = x$ ($y \leq x$),

(e) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$,

(f) $(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9})^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$.

2.3. Długość łuku krzywej.

Zad. 1. Obliczyć długość łuku krzywej

$$\begin{cases} x(t) = e^t \sin t \\ y(t) = e^t \cos t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Zad. 2. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

Zad. 3. Obliczyć długość łuku krzywej $y = 1 - \ln(\cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Zad. 4. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

Zad. 5. Obliczyć długość łuku krzywej

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{1}{3}t^3, \quad t \in [0, \sqrt{3}]. \end{cases}$$

Zad. 6. Obliczyć długość łuku krzywej

$$l : \begin{cases} x(t) = e^{2t} \cos t \\ y(t) = e^{2t} \sin t, \quad t \in [0, \frac{\ln 2}{2}]. \end{cases}$$

Zad. 7. Obliczyć długość łuku krzywej

$$k : \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

2.4. Objętość i pole powierzchni bocznej bryły obrotowej.

Zad. 1. Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót wokół osi OX krzywej $y = \frac{1}{3}x^3$, $x \in [0, 1]$.

Zad. 2. Obliczyć pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót wokół osi OX krzywej $y = \sqrt{x+2}$, $x \in [1, 2]$.

Zad. 3. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OX łuku asteroidy

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Zad. 4. Obliczyć pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót krzywej $y = x\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, wokół osi OX.

Zad. 5. Zbadaj, czy istnieje objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX krzywej danej równaniem $y = e^{-x}\sqrt{x}$, $x \leq 0$.

Zad. 6. Obliczyć objętość bryły, która powstała przez obrót wokół osi OX elipsy

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Zad. 7. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = \operatorname{tg} x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, wokół osi OX.

Zad. 8. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = e^{-x}\sqrt{|\sin x|}$, $x \in [0, \infty)$, wokół osi OX.

Zad. 9. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = \sqrt{\frac{1}{x^2+2x+2}}$, $x \in (-\infty, \infty)$, wokół osi OX.

Zad. 10. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $x \in [0, \infty)$, wokół osi OX.

Zad. 11. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = \frac{1}{\sqrt{x \ln^2 x}}$, $x \in (0, \frac{1}{e}]$, wokół osi OX.

Zad. 12. Obliczyć objętość bryły nieograniczonej powstałej przez obrót krzywej $y = \sqrt{x-1} \cdot e^{-x}$ wokół osi OX.

Zad. 13. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = xe^{-x}$, $x \geq 0$, wokół osi OX.

Zad. 14. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX krzywej $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, dla $2 \leq x \leq y$.

Zad. 15. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = \sqrt{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$, $x \in [0, 1]$, wokół osi OX.

2.5. Całka podwójna.

Zad. 1. Obliczyć całkę $\iint_D F(x, y) dx dy$, jeżeli

- (a) $F(x, y) = xy$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$,
- (b) $F(x, y) = x^2 y e^{xy}$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$,
- (c) $F(x, y) = e^{x+y}$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,
- (d) $F(x, y) = x \sin(y)$, $D = \left\{ (x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$,
- (e) $F(x, y) = \frac{x^2}{1+y^2}$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,
- (f) $F(x, y) = \frac{1}{(x+y+1)^2}$, $D = \{(x, y) : 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$,
- (g) $F(x, y) = \sqrt{xy}$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$,
- (h) $F(x, y) = x^2 y \cos(xy^2)$, $D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2 \right\}$,
- (i) $F(x, y) = x^3 y^2$, obszar D jest kołem $x^2 + y^2 \leq R^2$,
- (j) $F(x, y) = x^2 + y$, obszar D jest ograniczony parabolami $y = x^2$, $y^2 = x$,
- (k) $F(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$, obszar D jest ograniczony krzywymi $x = 2$, $x = y$, $xy = 1$,
- (l) $F(x, y) = \cos(x+y)$, obszar D jest trójkątem ograniczonym prostymi $x = 0$, $y = \pi$, $x = y$,
- (m) $F(x, y) = x + y$, obszar D jest trójkątem ograniczonym prostymi $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Zad. 2. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć następujące całki po obszarach ograniczonych wskazanymi krzywymi

- (a) $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, obszar $D : x^2 + y^2 = 2$,
- (b) $\iint_D y dx dy$, obszar $D : x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, $x = y$, $y = 0$ ($y \geq 0$),
- (c) $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$, obszar $D : x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 1$ ($x \leq 0$, $y \geq 1$),
- (d) $\iint_D x dx dy$, obszar $D : x^2 + (y-1)^2 = 1$, $y = x$, ($x \geq y$),
- (e) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, obszar $D : (x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2) = 4y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ ($x \geq 0$),
- (f) $\iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, obszar $D : (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, $x = 0$ ($x \geq 0$).

Zad. 3. Obliczyć całkę $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2 + y^2 = 6x$.

Zad. 4. Obliczyć $\iint_D (x+y) dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

Zad. 5. Obliczyć $\iint_D \frac{xy \cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$.

Zad. 6. Obliczyć $\iint_D xy dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

Zad. 7. Obliczyć $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $r, R > 0$.

Zad. 8. Obliczyć $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, -x \leq y, y \geq x\}$.

Zad. 9. Obliczyć pole płata powierzchniowego wyciętego walcem $x^2 + y^2 = 4$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2.6. Całka potrójna.

Zad. 1. Obliczyć objętości brył ograniczonych wskazanymi powierzchniami

- (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 = 1,$
 (b) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z = 0, x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9,$
 (c) $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0,$
 (d) $z = e^{y-x}, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (x + y \leq 1),$
 (e) $z = 9 - x^2, z = 0, y^2 = 3x,$
 (f) $z = x^2 + y^2, z = x + y, z = 0.$

Zad. 2. Obliczyć całkę $\iiint_V (2xy+x)dxdydz$, gdzie obszar V jest czworościanem o wierzchołkach $A(-2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, -3), D(0, 0, 0).$

Zad. 3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4$ dla $z \geq 0.$

Zad. 4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = 8 - \sqrt{x^2 - y^2 + z^2}, z = 2 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1, x = 0, y = 0,$ dla $x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0.$

Zad. 5. Obliczyć objętość bryły określonej warunkami $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x^2 + y^2 \leq 4, z \geq 0.$

Zad. 6. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2 + y^2} + 4, z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

Zad. 7. Obliczyć objętość bryły $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 3z\}.$

Zad. 8. Obliczyć objętość bryły $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, z^2 \leq x^2 + y^2\}.$

Zad. 9. Obliczyć objętość bryły

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \arctg \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Zad. 10. Obliczyć objętość bryły

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2}, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Zad. 11. Obliczyć objętość bryły określonej warunkami $z \leq 9 - x^2 - y^2, 4x^2 + y^2 \leq 1, z \geq -1.$

Zad. 12. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = 1 + x^2 + y^2, z = 9 - x^2 - y^2.$

Zad. 13. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4,$ dla $z \geq 0.$

Zad. 14. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równania $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ i $x^2 + y^2 = z^2.$

Zad. 15. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 3z.$

Zad. 16. Obliczyć objętość bryły

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 \leq z^2, 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}.$$

Zad. 17. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 6 - x^2 - y^2.$

Zad. 18. Obliczyć całki $\iiint_V f(x, y, z) dxdydz$, gdzie:

(a) $f(x, y, z) = \exp(x + y + z), V : x \leq 0, -x \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq -x$

(b) $f(x, y, z) = \frac{1}{(3x + 2y + z + 1)^4}, V : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 - x - y$

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2, V : x^2 + y^2 \leq 4, 1 - x \leq z \leq 2 - x;$

(d) $f(x, y, z) = xyz, V : \text{bryła ograniczona powierzchniami } y = x^2, x = y^2, z = xy, z = 0$

(e) $f(x, y, z) = x, V : \text{bryła ograniczona płaszczyznami układu współrzędnych i płaszczyzną przechodzącą przez punkty } (2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 3)$

Zad. 19. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całki:

(a) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^2 dxdydz, V : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1,$

(b) $\iiint_V xyz dxdydz, V : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2},$

(c) $\iiint_V (x^2 + y^2) dxdydz, V : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz,$

$$(d) \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad V : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1.$$

Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całki:

$$(a) \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad V : -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0,$$

$$(b) \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad V : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,$$

$$(c) \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad V : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$(d) \iiint_V -V z^2 dx dy dz, \quad V : x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2,$$

$$(e) \iiint_V x^2 dx dy dz, \quad V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4x,$$

$$(f) \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz, \quad V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Zad. 20. Obliczyć

$$\int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{16-x^2}} \left(\int_0^{2x+2y} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dy \right] dx.$$

Zad. 21. Obliczyć

$$\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz \right) dy \right] dx.$$

Zad. 22. Obliczyć całki:

$$(a) \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x + y + z) dz,$$

$$(b) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+x+y+z}},$$

$$(c) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz,$$

$$(d) \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz,$$

$$(e) \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz,$$

$$(f) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz,$$

$$(g) \int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)} dz,$$

Zad. 23. Obliczyć objętość obszarów ograniczonych podanymi powierzchniami:

$$(a) x^2 + y^2 = 9, x + y + z = 1, x + y + z = 5,$$

$$(b) x = -1, x = 2, z = 4 - y^2, z = 2 + y^2,$$

$$(c) z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, z = 0, x^2 + y^2 = 1,$$

$$(d) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c,$$

$$(e) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z, (a > 0).$$

- Zad. 24. Dana jest bryła wycięta walcem $x^2 + y^2 = Rx$ z kuli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (bryła Vivianiego). Obliczyć:
- objętość,
 - pole górnej i dolnej podstawy,
 - pole powierzchni bocznej,
 - położenie środka ciężkości (jednorodnej) bryły Vivianiego.
- Zad. 25. Obliczyć masę i objętość bryły ograniczonej powierzchniami $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$ i $z = a > 0$, jeżeli jej gęstość w każdym punkcie jest wprost proporcjonalna do trzeciej współrzędnej tego punktu i równa jest $\frac{4}{3}$ na płaszczyźnie $z = a$.
- Zad. 26. Obliczyć masę bryły zadanej nierównościami $x^2 + y^2 \leq 16$ i $0 \leq z \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$, jeżeli jej gęstość w każdym punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od osi OZ .
- Zad. 27. Obliczyć masę bryły ograniczonej powierzchniami $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, jeżeli jej gęstość w każdym punkcie jest odwrotnie proporcjonalna do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.
- Zad. 28. Obliczyć masę i średnią gęstość bryły ograniczonej powierzchniami $x^2 - y^2 = az$, $x^2 + y^2 = a^2$ i $z = 0$ ($z > 0$), jeżeli jej gęstość w każdym punkcie jest wprost proporcjonalna do trzeciej współrzędnej tego punktu i największa wartość gęstości równa jest 3.
- Zad. 29. Wyznaczyć środek masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchnią $y^2 + 2z^2 = 4x$ i płaszczyzną $x = 2$.
- Zad. 30. Wyznaczyć środek masy jednorodnej bryły ograniczonej paraboloidą $z = x^2 + y^2$ i płaszczyzną $z = 4$.
- Zad. 31. Obliczyć moment statyczny jednorodnej bryły ograniczonej powierzchnią $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ i płaszczyzną $z = 0$ ($z > 0$) względem tej płaszczyzny.
- Zad. 32. Obliczyć biegunowy moment bezwładności bryły ograniczonej powierzchnią $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ względem punktu $(0, 0, 0)$.

3. CAŁKA POWIERZCHNIOWA I KRZYWOLINIOWA

- Zad. 1. Obliczyć $\iint_S xy^2 dydz + yz^2 dx dz + zx^2 dx dy$, gdzie S jest wewnętrzną stroną powierzchni bryły określonej nierównościami $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
- Zad. 2. Obliczyć $\iint_S (xz + yz) dS$, gdzie S jest częścią powierzchni stożkowej $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ wyciętej walcem $x^2 + y^2 = 4x$.
- Zad. 3. Obliczyć $\iint_S (x^2 + y^2) dx dz$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni $y = a^2 - x^2 - z^2$ odciętej płaszczyzną $y = \frac{1}{2}a^2$.
- Zad. 4. Obliczyć pola części powierzchni o równaniu $z = f(x, y)$ odciętych wskazanymi powierzchniami:
- $f(x, y) = 8 - 2(x + y)$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
 - $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 2x$
 - $f(x, y) = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}$, $z = 1$, $z = 2$
 - $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 = 8$
 - $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$, $z = 0$
 - $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$, $z = 2$;
 - $f(x, y) = xy$, $x^2 + y^2 = R^2$
 - $f(x, y) = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$.
- Zad. 5. Obliczyć całkę $\iint_S z dS$, gdzie S jest
- górną częścią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$;

- (b) częścią powierzchni stożka $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$ dla $x \in [a, b]$, $b > a > 0$;
 (c) częścią płata powierzchniowego danego równaniami parametrycznymi $x(u, v) = u \cos v$, $y(u, v) = u \sin v$, $z(u, v) = v$ dla $u \in [0, a]$, $v \in [0, 2\pi]$.

- Zad. 6. Obliczyć $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, gdzie S jest częścią powierzchni bocznej walca $x^2 + y^2 \leq 1$ dla $0 \leq z \leq 2$ i leżącą w I oktancie.
- Zad. 7. Obliczyć $\iint_S x(y + z) dS$, gdzie S jest częścią powierzchni bocznej walca $x^2 + y^2 \leq 1$ dla $0 \leq z \leq 2$.
- Zad. 8. Obliczyć $\iint_S xz dS$, gdzie S jest częścią płata powierzchniowego danego równaniami $x(u, v) = v \cos u$, $y(u, v) = v \sin u$, $z(u, v) = v$ dla $u \in [0, \pi]$, $v \in [3, 4]$.
- Zad. 9. Obliczyć $\iint_S z dS$, gdzie S jest częścią powierzchni torusa powstałego w wyniku obrotu wokół osi OZ okręgu $(x - 3)^2 + z^2 = 4$ i leżącą w I oktancie na zewnątrz walca $x^2 + y^2 = 16$.
- Zad. 10. Obliczyć pole części powierzchni stożka $z^2 = x^2 + y^2$ wyciętej walcem parabolicznym $z^2 = 2py$, $p > 0$.
- Zad. 11. Obliczyć pole części płata powierzchniowego $az = x \cdot y$ leżącego w I oktancie między powierzchniami $x^2 + y^2 = a^2$ i $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < a < b$.
- Zad. 12. Obliczyć pole części płaszczyzny $x + y + z = 2$ wyciętej powierzchniami $x^2 + y^2 = x$, $x = y$ i $y = 0$.
- Zad. 13. Obliczyć pole części sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ zawartej między płaszczyznami $z = 3$ i $z = 4$.
- Zad. 14. Obliczyć pole części płata powierzchniowego opisanego równaniami parametrycznymi $x(u, v) = (10 + 3 \cos v) \cos u$, $y(u, v) = (10 + 3 \cos v) \sin u$, $z(u, v) = 3 \sin v$ dla $u \in [0, \pi]$, $v \in [\pi, 2\pi]$.
- Zad. 15. Obliczyć przybliżone pole części powierzchni Ziemi zawartej między południkami 60° i 80° W oraz równoleżnikami 45° i 60° N. W zadaniu przyjąć, że Ziemia jest kulą o promieniu $R = 6370$ km.
- Zad. 16. Obliczyć masę sfery o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, jeśli powierzchniowa gęstość masy w każdym jej punkcie jest wprost proporcjonalna do kwadratu pierwszej współrzędnej tego punktu.
- Zad. 17. Wyznaczyć masę płata powierzchniowego $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2 - 3, -2 \leq x \leq 1\}$, jeżeli gęstość w każdym jego punkcie jest odwrotnie proporcjonalna do odległości tego punktu od osi Ox .
- Zad. 18. Wyznaczyć masę płata powierzchniowego $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4x, x \geq 2\}$, jeżeli gęstość masy w każdym jego punkcie jest wprost proporcjonalna do odległości tego punktu od płaszczyzny Oyz .
- Zad. 19. Obliczyć masę części płata powierzchniowego $z = \sqrt{9 - y^2}$ odciętego płaszczyznami $x = 0$ i $x = 2$, jeżeli powierzchniowa gęstość masy w każdym jej punkcie dana jest wzorem $\rho(x, y, z) = z(x + y)$.
- Zad. 20. Obliczyć masę części płata powierzchniowego wyciętego walcem $x^2 + y^2 = 4$ z powierzchni danej równaniem $z = xy$, jeżeli gęstość w każdym punkcie tej powierzchni jest równa odległości tego punktu od osi Oz .
- Zad. 21. Obliczyć masę, moment statyczny M_{xy} oraz moment bezwładności względem osi OZ górnej półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, jeżeli powierzchniowa gęstość masy w każdym punkcie równa jest kwadratowi odległości tego punktu od wertykalnej średnicy sfery.
- Zad. 22. Dane jest pole sił $\vec{F} = (P, Q, R)$, $P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = xz + z$, $R(x, y, z) = xy + y + 2z$. Obliczyć pracę jaką trzeba wykonać pokonując siły pola wzdłuż łuku AB od punktu $A = (0, 0, 1)$ do punktu $B = (1, 1, 2)$.
- Zad. 23. Obliczyć następujące całki:

- (a) $\iint_S xy \, dydz + yz \, dzdx + xz \, dxdy$, gdzie S jest trójkątem o wierzchołkach $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(1, -1, 1)$ zorientowanym tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz ;
- (b) $\iint_S x^2 y^2 z \, dxdy$, gdzie S jest górną półsferą $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ zorientowaną tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz ;
- (c) $\iint_S xz \, dydz + x^2 y \, dzdx + y^2 z \, dxdy$, gdzie S jest częścią powierzchni opisanej równaniami $x(u, v) = v \cos u$, $y(u, v) = v \sin u$, $z(u, v) = v$ dla $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $v \in (0, 1)$ oraz zorientowaną tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz ;
- (d) $\iint_S xz \, dydz + x^2 y \, dzdx + y^2 z \, dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną części walca $x^2 + y^2 = 1$ położoną w pierwszym oktancie i odciętą płaszczyznami $z = 0$, $z = 1$;
- (e) $\iint_S z \, dydz - x \, dzdx + y \, dxdy$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $3x + 6y - 2z = 6$ odciętej płaszczyznami układu współrzędnych i zorientowaną tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz .

Zad. 24. Obliczyć całkę $\iint_S xz \, dxdy$, gdzie S jest częścią powierzchni torusa powstałego w wyniku obrotu wokół osi Oz okręgu $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, leżącą w obszarze $x \leq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$ oraz zorientowaną tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz .

Zad. 25. Obliczyć całkę $\iint_S yz \, dxdy$, gdzie S jest częścią powierzchni torusa powstałego w wyniku obrotu wokół osi Oz okręgu $(y - 2)^2 + z^2 = 1$, leżącą w obszarze $x \geq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 4$ oraz zorientowaną tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz .

Zad. 26. Obliczyć następujące całki:

- (a) $\iint_S x^3 \, dydz + y^3 \, dzdx + z^3 \, dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
- (b) $\iint_S xz \, dydz + x^2 y \, dzdx + y^2 z \, dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni bryły ograniczonej przez $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, gdzie $x, y \geq 0$;
- (c) $\iint_S dydz + 2 \, dzdx + z^2 \, dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni bryły ograniczonej przez $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4z - 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, gdzie $x, y \geq 0$;
- (d) $\iint_S 3x \, dydz - dzdx + 2 \, dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni bryły ograniczonej przez $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
- (e) $\iint_S (\operatorname{tg} z + xyz) \, dydz + 2y \, dzdx + (z^2 + 2xy) \, dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni bryły ograniczonej przez $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $y = 8$;
- (f) $\iint_S x^2 y \, dydz - xy^2 \, dzdx + (x^2 + y^2)z \, dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni walca $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 5$;
- (g) $\iint_S (x^2 + yz) \, dydz + (xz + y^2) \, dzdx + xy^2 \, dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni walca $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$;
- (h) $\iint_S x^2 y \, dydz + xy^2 \, dzdx + xyz \, dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną części sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ położoną w pierwszym oktancie;
- (i) $\iint_S xy \, dydz + yz \, dzdx + xz \, dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną czworościanu ograniczonego płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 3$.

Zad. 27. Korzystając ze wzoru Greena obliczyć $\oint_K e^x(1 - \cos y)dx - e^x(y - \sin y)dy$, gdzie K jest krzywą ograniczającą obszar $D: \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \cos x$, zorientowaną dodatnio.

Zad. 28. Obliczyć $\oint_K -xy^2 dy + x^2 y dx$, gdzie krzywa K jest okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ dodatnio zorientowanym.

Zad. 29. Obliczyć $\oint_K (2x^3 - 11y) dx + (4x + \sin y) dy$, gdzie K jest dodatnio zorientowanym okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = 16$.

Zad. 30. Obliczyć $\oint_K -xy dx + (y^2 + 1) dy$, gdzie krzywa K jest dodatnio skierowanym brzegiem zbioru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$.

Zad. 31. Obliczyć $\oint_K e^x(1 - \cos y) dx - e^x(1 - \sin y) dy$, gdzie krzywa K jest krzywą zamkniętą składającą się z $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, $y = 0$, skierowaną dodatnio.

Zad. 32. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_{(0,0)}^{(2,4)} 2xy dx + x^2 dy$ wzdłuż drogi $y = x^2$.

Zad. 33. Korzystając z wzoru Greena obliczyć $\oint_L (1 - x^2) dx + x(1 + y^2) dy$, gdzie L jest krzywą zamkniętą zorientowaną dodatnio składającą się z linii $y = \sqrt{x+4}$, $y = 0$, $x = 0$.

Zad. 34. Obliczyć $\int_L x(y+z) dl$, gdzie

$$L : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, t \in [0, \pi] \\ z = \frac{3}{4}t \end{cases}$$

Zad. 35. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć $\oint_L xy dx - x dy$, gdzie L jest krzywą zamkniętą zorientowaną dodatnio składającą się z linii $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, dla $x \in [1, 2]$.

Zad. 36. Obliczyć $\oint_K x dx - x^2 dy$, gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 = 8x$ zorientowanym dodatnio.

Zad. 37. Obliczyć $\int_K y(x-y) dx + x dy$, gdzie K jest częścią krzywej $y^2 = 4x$ skierowanej od $A(1, -2)$ do $B(0, 0)$.

Zad. 38. Obliczyć $\oint_K y(x-y) dx + x dy$, gdzie K jest dodatnio zorientowanym brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 1)$.

Zad. 39. Obliczyć $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, gdzie

$$L : \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t, t \in [0, \pi] \\ z = \ln 5 \end{cases}$$

Zad. 40. Obliczyć $\int_K \left(\frac{\arctg y}{1+x^2} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dx + \left(\frac{\arctg x}{1+y^2} + \sqrt{\frac{x}{y}} + 2y \right) dy$, gdzie krzywa K jest linią $y = x$ od punktu $A(1, 1)$ do $B(2, 2)$.

Zad. 41. Obliczyć $\oint_C \ln(1+y) dx - \frac{xy}{1+y} dy$, gdzie krzywa C jest dodatnio zorientowanym trójkątem o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 4)$.

Zad. 42. Obliczyć $\oint_C x^2 y dy - x^2 dx$, gdzie krzywa C jest dodatnio zorientowanym kwadratem o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(3, -1)$, $D(3, 1)$.

Zad. 43. Obliczyć $\int_L yz dx + zxdy + xydz$, gdzie L jest fragmentem krzywej

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = \frac{at}{2\pi} \end{cases}$$

zawartym między płaszczyznami $z = 0$ i $z = a$, $a, r > 0$.

- Zad. 44. Obliczyć $\oint_K (y^2 + 2y)dx - (e^y + 2x)dy$, gdzie krzywa K jest okręgiem $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ skierowanym dodatnio.
- Zad. 45. Obliczyć masę krzywej $C : x^2 + y^2 = 4x$, gdzie gęstość w każdym jej punkcie jest wprost proporcjonalna do kwadratu odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.
- Zad. 46. Obliczyć masę łuku krzywej $K : y = 2 \ln x, 1 \leq x \leq 2$, gdzie gęstość krzywej w każdym jej punkcie równa jest kwadratowi odciętej tego punktu.
- Zad. 47. Obliczyć masę części krzywej $y = \ln(1 - x^2)$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}]$, jeżeli gęstość liniowa krzywej w każdym punkcie równa jest $\rho(x, y) = 1 + x$.
- Zad. 48. Obliczyć masę odcinka \overline{AB} , gdzie $A = (0, 1)$ i $B = (3, 0)$, o liniowej gęstości masy $\sigma(x, y) = x^2 + y^2$.
- Zad. 49. Obliczyć masę łuku cycloidy $x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t), t \in (0, 2\pi), a > 0$, jeśli gęstość liniowa krzywej w każdym punkcie równa jest rzędnej tego punktu.
- Zad. 50. Obliczyć masę części krzywej $\vec{r}(t) = [a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t)]$ dla $t \in [0, \pi], a > 0$, jeżeli gęstość liniowa krzywej w każdym punkcie jest równa kwadratowi promienia wodzącego.
- Zad. 51. Obliczyć masę części krzywej $\begin{cases} x(t) = 2 \int_0^t \frac{z}{1+z^2} dz \\ y(t) = \int_0^t \frac{1-z^2}{1+z^2} dz \end{cases}$ dla $t \in [0, 1]$, jeżeli gęstość liniowa krzywej w każdym punkcie równa jest $\rho(x, y) = \frac{y}{e^x}$.
- Zad. 52. Obliczyć masę części elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < b < a$ leżącej w pierwszej ćwiartce, jeżeli gęstość liniowa krzywej w każdym punkcie jest równa rzędnej tego punktu.
- Zad. 53. Obliczyć masę łuku krzywej $x(t) = ae^t \cos t, y(t) = ae^t \sin t, z(t) = ae^t$ od punktu $O = (0, 0, 0)$ do punktu $A = (a, 0, a), a > 0$, jeśli gęstość krzywej wyraża się wzorem $\gamma(t) = 2e^t$.
- Zad. 54. Obliczyć masę łuku \widehat{OA} , gdzie $O = (0, 0)$ i $A = (4, \frac{16}{3})$, krzywej $3y = 2x\sqrt{x}$, jeżeli gęstość liniowa w punkcie M łuku jest wprost proporcjonalna do długości łuku \widehat{OM} .
- Zad. 55. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny Oxz jednorodnego łuku krzywej $\vec{r}(t) = [e^t \cos t, e^t \sin t, e^t]$ dla $t \in [0, 2\pi]$.
- Zad. 56. Obliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnego łuku linii łańcuchowej $y = a \cosh \frac{x}{a}$, gdzie $-a \leq x \leq a$ dla pewnego $a > 0$.
- Zad. 57. Wyznaczyć położenie środka ciężkości tej części jednorodnego okręgu $x^2 + y^2 = 4$, która jest położona powyżej prostej $y = x$.
- Zad. 58. Oblicz pracę L , jaką wykona siła $F[x + y, xy]$ przesuując punkt materialny o jednostkowej masie po krzywej K skierowanej ujemnie, której fragmenty są odcinkami prostych $y = 0, y = 1, x = 1, x = 2$
- Zad. 59. Oblicz całkę krzywoliniową $\int_L (x^2 + y^2)dl$, gdzie L jest krzywą zadaną równaniami parametrycznymi:

$$x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

4. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

4.1. Równania różniczkowe zwyczajne I rzędu.

Zad. 1. Rozwiązać równania

- (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$,
- (b) $x^2 \frac{dy}{dx} - y = x^2 e^{\frac{x-1}{x}}$,
- (c) $2 \frac{dy}{dt} \ln t + \frac{y}{t} = \frac{1}{y} \cos^2 t$,

(d) $y' + \frac{1}{x}y = \cos 2x,$

(e) $2y' + y \operatorname{ctg} x = \frac{8 \cos^4 x}{y},$

(f) $3xy' - y = 3x^2y^4 \ln x,$

(g) $\frac{dy}{dx}e^x = y,$

(h) $x(1 + e^y) - e^y \frac{dy}{dx} = 0,$

(i) $2yy' - y^2 - x = 0,$

(j) $y' + \frac{y}{x} = x,$

(k) $y' + y = \frac{x^2}{y},$

(l) $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x},$

(m) $y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{x^2 + 1},$

(n) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0,$

(o) $yy' + y^2 = e^x.$

Zad. 2. Znaleźć całkę szczególną równania $\sin x \cos 2y dx + \cos x \sin 2y dy = 0$ spełniającą warunek początkowy $y(0) = \frac{\pi}{6}$.

Zad. 3. Rozwiązać następujące zagadnienie:

$$\begin{cases} xy' + 2y - e^{2x} = 0, & x \neq 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

Zad. 4. Rozwiązać następujące zagadnienie:

$$\begin{cases} 2y' - y \operatorname{tg} x = \frac{-y^3}{\cos x}, & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Zad. 5. Rozwiązać następujące zagadnienie:

$$\begin{cases} y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)\sqrt[3]{y^2} \\ y(1) = 8 \end{cases}.$$

Zad. 6. Rozwiązać następujące zagadnienie:

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = -3x \ln x, & x > 0 \\ y(e) = 2 \end{cases}.$$

Zad. 7. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $xy' - y = x^2e^{-2x}$ przy warunku $y(1) = 1$.

Zad. 8. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $y' = y \cos t$ przy warunku $y(0) = 1$.

Zad. 9. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $y' + y = \frac{x^2}{y^2}$ przy warunku $y(0) = 1$.

Zad. 10. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $y' + y = xy^{-6}$ przy warunku $y(0) = 2$.

Zad. 11. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $y' + y = \frac{x}{y}$ przy warunku $y(0) = 1$.

Zad. 12. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $(x + y^2)dx + 2xydy = 0$ przy warunku początkowym $y(1) = 2$.

Zad. 13. Rozwiązać równanie $y' + \frac{2y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}$ z warunkiem początkowym $y(1) = 4$.

Zad. 14. Rozwiązać równanie $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$ z warunkiem początkowym $y(1) = 1$.

Zad. 15. Rozwiązać równanie $y' + xy = \frac{x}{y^3}$ przy warunku $y(0) = 2$.

Zad. 16. Rozwiązać równanie liniowe niejednorodne $\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = t \cos t, t \neq 0$.

Zad. 17. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania zupełnego $\left(\frac{t}{\sin x} + 2\right) dt + \frac{(t^2+1)\cos(x)}{\cos 2x-1} dx = 0$.

Zad. 18. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania Bernoullego $x' + 2x = x^2e^t$.

4.2. Równania różniczkowe zwyczajne II rzędu.

Zad. 1. Rozwiązać równania

- (a) $y'' + y' = x^2 - e^{-x}$,
- (b) $y'' + y = \sin x$,
- (c) $y'' - 4y = x^2 + x$,
- (d) $y'' - y' - 2y = \sin 2x$,
- (e) $y'' - 6y' + 13y = 25 \sin(2t)$,
- (f) $y'' - 3y' + 2y = x^2$,
- (g) $y'' + 9y = x^2 + 3$,
- (h) $y'' + 4y = 2 \cos 3x$,
- (i) $y'' + 4y' = 1 + x$,
- (j) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$,
- (k) $y'' + 2y' + 2y = e^{2x} + 1$,
- (l) $y'' + 5y' + 6y = e^x$,
- (m) $y'' + 3y' = e^{-3x}$,
- (n) $y'' - 6y' + 10y = \cos 2x$,
- (o) $y'' + 4y' + 5y = 2 \sin 2x$,
- (p) $y'' + 3y' = 3^{-3x}$,
- (q) $y'' - 5y' - 7y = \sin x$,
- (r) $y'' - 4y' + 3y = x^2 + 1$,
- (s) $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$,
- (t) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$,
- (u) $x'' - 5x' = 3t^2$,
- (v) $xy'' - y' = 0$.

Zad. 2. Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać równanie $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 1$ z warunkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4.3. Równania różniczkowe cząstkowe.

Zad. 1. Rozwiązać w $\Omega = \mathbb{R}^2$ równanie $u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{yy} = 0$ z warunkami początkowymi $u(x, 0) = x$, $u_y(x, 0) = x^2$.

Zad. 2. Określić typ i rozwiązać w $\Omega = \mathbb{R}^2$ równanie $u_{xy} - u_x = 0$ z warunkiem początkowym $u(x, 0) = \sin x$.

Zad. 3. Określić typ i sprowadzić równanie $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ do postaci kanonicznej.

Zad. 4. Rozwiązać równanie cząstkowe $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 = 2$ z warunkiem początkowym $u(1, y) = e^y$.

5. LICZBY ZESPOLONE, MACIERZE I UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

5.1. Liczby zespolone.

Zad. 1. Wykonaj działania: $(1 - 4i) + (4 + 7i)$, $(\sqrt{5} - \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3}i)$, $\frac{2+5i}{1-i}$.

Zad. 2. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki

- (a) $\operatorname{Re}(iz + 3) \geq 0$,
- (b) $\frac{z}{z} = \bar{z}$,
- (c) $z\bar{z} + (5 + i)z + (5 - i)\bar{z} + 1 = 0$,
- (d) $\frac{z}{z - i} = z - 1$.

Zad. 3. Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej

- (a) $9 + 9i$,
- (b) $\sqrt{3} + i$,
- (c) $5 + 5\sqrt{3}i$,
- (d) $\sin \alpha - i \cos \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Zad. 4. Oblicz wartość wyrażenia, wynik podaj w postaci algebraicznej

- (a) $(1 + i)^{12}$,
- (b) $(1 - \sqrt{3}i)^8$,

(c) $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{10}$,

(d) $\frac{(1-i)^{22}}{(1+i\sqrt{3})^6}$.

Zad. 5. Obliczyć $\sqrt[3]{i}$.Zad. 6. Obliczyć $\sqrt[3]{-1}$.Zad. 7. Obliczyć $\sqrt[3]{1}$.Zad. 8. Obliczyć $\sqrt[4]{16}$.Zad. 9. Obliczyć $\sqrt[5]{2+2i}$.Zad. 10. Rozwiązać równanie $z^2 - 6z + 11 = 0$.Zad. 11. Rozwiązać równanie $z^2 - (1+2i)z + 1 + 7i = 0$.Zad. 12. Obliczyć i doprowadzić do postaci algebraicznej $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{i-1}\right)^8$.Zad. 13. Rozwiązać równanie $z^2 - 3z + 3 + i = 0$.Zad. 14. Obliczyć $\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$, gdzie obraz krzywej γ jest dodatnio skierowanym okręgiem $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$.

Zad. 15. Obliczyć metodą residuów całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

Zad. 16. Określić typy osobliwości funkcji $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ oraz $g(z) = e^{1/z}$ w punkcie $z = 0$. Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 17. Obliczyć całkę

$$\int_{\Gamma} \frac{z^3 dz}{z^2 + 1},$$

gdzie Γ jest okręgiem $|z - i| = 1$ zorientowanym dodatnio.Zad. 18. Znaleźć funkcję holomorficzną w \mathbb{C} , której część rzeczywista jest równa $u(x, y) = x^2 - y^2$.

Zad. 19. Obliczyć metodą residuów całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

Zad. 20. Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{z-1}{(1+z)z^2}$ w szereg Laurenta w pierścieniu $0 < |z| < 1$.

Zad. 21. Obliczyć całkę

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-i)}$$

gdzie $\Gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto 2e^{it}$.Zad. 22. Wykazać, że jeżeli f jest funkcją holomorficzną na obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$ taką, że $\operatorname{Re} f = (\operatorname{Im} f)^2$, to $f \equiv \text{const}$ na Ω .

5.2. Macierze i układy równań liniowych.

Zad. 1. Obliczyć $B^T + 4A^{-1}$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zad. 2. Obliczyć rząd macierzy $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Zad. 3. Obliczyć wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

Zad. 4. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Zad. 5. Obliczyć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zad. 6. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z + 2t + 3u = 1 \\ 3x + 2y + 4z + t + 2u = 3 \\ 3x + 2y - 2z + t = -7 \\ 9x + 6y + z + 3t + 2u = 2 \end{cases}$$

Zad. 7. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t + w = 2 \\ 4x - y + z - 2t + w = 1 \\ 6x + 3y - z + 4t + 3w = 5 \\ -2x + 5y - 3z + 8t + w = 3 \end{cases}$$

Zad. 8. Czy poniższy układ równań posiada jakiegokolwiek rozwiązanie?

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Zad. 9. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Zad. 10. Zbadać warunki rozwiązalności układu w zależności od parametru a

$$\begin{cases} x + (a + 1)y = 5 \\ 3x + (2a + 1)y = 12 \\ (a + 1)x + 4y = 10 \end{cases}$$

Zad. 11. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \\ 4x + y - z = 8 \end{cases}$$

Zad. 12. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

(a) metodą Cramera;

(b) metodą macierzy odwrotnej.

Zad. 13. Zbadać warunki rozwiązalności poniższego układu równań w zależności od parametru a

$$\begin{cases} ax + (2a + 3)y + 2az = 3a + 9 \\ (2a - 2)x + (3a + 1)y + (4a - 4)z = 7a + 1 \end{cases}$$

6.1. Szeregi liczbowe.

Zad. 1. Zbadać zbieżność szeregów:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \sin \frac{\pi}{4^n}$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 4^n}$
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!}$
 (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{3}{\sqrt{n}}$
 (e) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$
 (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{100^n}{n!}$
 (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+3)^{2n+3}}{2n+3}$
 (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$
 (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{6}{\sqrt{n}}$
 (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$
 (k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{1}{n}}{n!}$
 (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{4^n}$
 (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
 (n) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} n}{3} \right)^n$
 (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{4}{n^2} \operatorname{tg} \frac{5}{n\sqrt{n}}$

6.2. Szeregi funkcyjne.

Zad. 1. Rozwinąć w szereg potęgowy o środku w $x_0 = 0$ funkcję $f(x) = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$.

Zad. 2. Zbadać zbieżność szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-5)^{2n+1}}{2n+3}.$$

Zad. 3. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{n^2 + 3n}.$$

Zad. 4. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zad. 5. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!2^n}.$$

Zad. 6. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arc\,tg} \left[\left(\frac{3n+1}{3n} \right)^{3n} \cdot \frac{1}{e} \right] \cdot x^n.$$

Zad. 7. Korzystając z wzorów na całkowanie i różniczkowanie szeregów potęgowych wyraz po wyrazie obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$.

Zad. 8. Za pomocą rozwinięcia funkcji $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ w szereg Fouriera obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Zad. 9. Wyznaczyć rozwinięcie funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \\ 1 & \text{dla } x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

w szereg Fouriera. Wyznaczyć sumę otrzymanego szeregu dla $x = 0$.

Zad. 10. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = |x|$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

Zad. 11. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

Zad. 12. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \\ 2 & \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{dla } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

oraz narysować wykres sumy szeregu.

Zad. 13. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \\ 1 & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

Zad. 14. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x^2$ w przedziale $[-\pi, \pi]$.

Zad. 15. Rozwinąć w szereg Fouriera według sinusów funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{4}) \\ 2 & \text{dla } x \in (\frac{\pi}{4}, \pi) \end{cases}$$

i naszkicować wykres sumy szeregu.

Zad. 16. Rozwinąć w szereg Fouriera według cosinusów funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 2 & \text{dla } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

i naszkicować wykres sumy szeregu.

Zad. 17. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [-\pi, 0) \\ x & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

Zad. 18. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in [-\pi, 0) \\ -x & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

6.3. Geometria analityczna i elementy algebry liniowej.

Zad. 1. Obliczyć kąt przecięcia się prostych l : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ i k : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$.

Zad. 2. Wiedząc, że $\vec{a} \times \vec{b} = 2$, korzystając z własności iloczynu wektorowego obliczyć

$$(4\vec{a}) \times (\vec{a} + \vec{b}).$$

Zad. 3. Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(2, -1, 1)$ i prostopadłej do prostej l danej równaniem krawędziowym:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Zad. 4. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 6)$, $D(2, 3, 8)$.

Zad. 5. Wyznaczyć prostą równoległą do wektora $\vec{u} = [1, 0, 1]$, przechodzącą przez punkt $P(0, 1, 0)$.

Zad. 6. Czy prosta zawierająca punkt $P(1, 1, 1)$ może leżeć w płaszczyźnie $2x - y + z = 0$?

Zad. 7. Czy istnieją proste $l \parallel \vec{u}$ i $k \parallel \vec{v}$ takie, że $l \parallel k$, ale $\vec{u} \perp \vec{v}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 8. Dany jest czworościan o wierzchołkach $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(0, 0, 0)$, $D(1, 1, 2)$.

(a) Obliczyć długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka D na podstawę ABC .

(b) Obliczyć odległość wierzchołka D od prostej zawierającej bok AC .

(c) Obliczyć cosinus kąta między ścianą DAB a podstawą ABC .

Zad. 9. Dany jest czworościan o wierzchołkach $A(1, 1, 1)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-2, 4, 6)$ oraz $D(-1, 1, 2)$.

(a) obliczyć objętość tego czworościanu,

(b) napisać równanie prostej zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka D .

Zad. 10. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $A(2, 2, 0)$ względem prostej

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z}{4}.$$

Zad. 11. Dane są: punkt $A(2, 0, 1)$, płaszczyzna Π : $x + y + z = 0$ i prosta

$$l : \begin{cases} x + z = 0 \\ -y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Wyznaczyć równanie płaszczyzny zawierającą prostą l i przechodzącą przez punkt B , symetryczny do punktu A względem płaszczyzny Π .

Zad. 12. Znaleźć rzut prostej $2x + y = 1$ na płaszczyznę, w której leży prosta binormalna do krzywej

$$K : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{t} \\ z(t) = t^2 \end{cases}$$

dla $t = 1$ oraz prosta

$$l : \begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 1 + 2t \\ z(t) = 1 - t \end{cases}.$$

Zad. 13. Naszkicować krzywą daną równaniem $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2y + 1 = 0$.

Zad. 14. Dane są współrzędne wektora $\vec{x} = [5, 1, -4]$ w bazie kanonicznej. Znaleźć współrzędne wektora \vec{x} w bazie $\vec{e}_1 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$, $\vec{e}_2 = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$, $\vec{e}_3 = [0, 0, 1]$.

Zad. 15. Wykazać, że przyporządkowanie każdemu wektorowi (x, y) przestrzeni \mathbb{R}^2 wektora (u, v, w) przestrzeni \mathbb{R}^3 określone wzorami $u = x + y$, $v = x$, $w = x + 2y$ jest przekształceniem liniowym \mathbb{R}^2 w \mathbb{R}^3 .

6.4. Granice funkcji.

Zad. 1. Obliczyć granice:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

6.5. Granice ciągów.

Zad. 1. Obliczyć granice:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2 + n} - n)}{n + 1}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln(5 + n) - \ln n \right)$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}$$

Zad. 2. Niech $a_n = \left(\frac{n^3 + 6n^2 + 5n - 8}{n^3 + 6n^2 - 4n + 7} \right)^{6n^2 + 5}$ oraz $b_n = \sqrt[3]{3^n \cdot n^6 + 5^n \cdot n^2}$. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$.

6.6. Badanie przebiegu zmienności funkcji.

Zad. 1. Wyznaczyć asymptoty ukośne funkcji $f(x) = (x + 5)e^{\frac{1}{x}}$.

Zad. 2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{x^3 + 2}{(x + 1)^2}$ i naszkicować jej wykres.

Zad. 3. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + \arcsin \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ i naszkicować jej wykres.

Zad. 4. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = (x + 6)e^{\frac{1}{x}}$ i naszkicować jej wykres.

Zad. 5. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = (x + 13)e^{\frac{x}{x+13}}$.