1. Funkcje wielu zmiennych i funkcje uwikłane

Zad. 1. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $(1,04)^{(2,02)}$.

Zad. 2. Wykazać, że każda funkcja $z(x,y) = x^2 f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, gdzie f jest funkcją różniczkowalną jednej zmiennej, spełnia równanie

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

Zad. 3. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x,y) = \frac{\ln(x^{3y})}{\sqrt{y-x}}.$$

Zad. 4. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$.

Zad. 5. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 + 6y + 8 - x$.

Zad. 6. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$ w zbiorze $D = (0,\pi) \times (0,\pi)$.

Zad. 7. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji
(a) $f(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12-x-y)$
(b) $f(x,y) = e^x(x^2+y^2)$
(c) $f(x,y) = \ln(xy) + 2x^2 - 2y^2 + 3$
(d) $f(x,y) = (x-y^2)\cdot\ln x$
(e) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2-3y^2)$
(f) $f(x,y) = (y+2)^2 + (y-x)^2$
(g) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 12xy$
(h) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
(i) $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - 2y^2 - xy + 6y$
(j) $f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$ dla $(x,y) \in [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}]$.

Zad. 8. Obliczyć pochodne pierwszego i drugiego rzędu dla funkcji uwikłanej y określonej równaniem $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$.

2. Całka oznaczona i całki wielokrotne

2.1. Całka oznaczona - zadania podstawowe.

Zad. 1. Zbadać zbieżność całki $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{2x^2+4}$.

Zad. 2. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_0^{\ln 3} 3xe^{-x}dx$.

Zad. 3. Obliczyć całkę $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

2.2. Pole między krzywymi.

Zad. 1. Obliczyć pole ograniczone krzywymi $y = x^2$, $y = x$.

Zad. 2. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu $y = \frac{1}{1+x^2}$ oraz osią OX.

Zad. 3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1,1]$, oraz osią OX.

Zad. 4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $x \in [0,a]$, oraz osią OX.

Zad. 5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = x^3 + x^2 - 2x$, $x \in [-2,2]$, oraz osią OX.

Zad. 6. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = x\sqrt{1-x^2}$ oraz osią OX.

Zad. 7. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \sin^3 x$, $y = \cos^3 x$, $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$.

Zad. 8. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \frac{1}{1+x^4}$, $x \in [0,\infty)$, oraz osią OX.

Zad. 9. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = x\ln x$, $x \in (0,1]$ i osią OX.

Zad. 10. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą $y = 2x - x^2$ i prostą $y = -x$, $x \in [-1,0]$.

Zad. 11. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach $y = 2x^3$, $y^2 = 4x$.
Zad. 12. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$, $2x - y + 3 = 0$.
Zad. 13. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \ln x$ i $y = \ln^2 x$.
Zad. 14. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^3$ i $y = x^5$.
Zad. 15. Obliczyć pole obszaru zawartego między krzywymi $y = \frac{1}{x^2+2x+10}$ i $y = 0$.
Zad. 16. Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami $y = \frac{1}{x^2+4x+8}$, $y = 0$, dla $x \in [0, 1]$.
Zad. 17. Obliczyć pole obszaru ograniczonego linią $y = \frac{1}{x^2+4x+5}$ oraz jej asymptotą, dla $x \in [0, 1]$.
Zad. 18. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu parametrycznym

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{1}{3}t^3 \end{cases}, \quad t \in [0, \sqrt{3}].$$

Zad. 19. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą

$$\begin{cases} x(t) = 2r\sin^2 t \\ y(t) = 2r\sin^2 t \operatorname{tg} t \end{cases}, \quad t \in [\pi/12, \pi/6], \quad r > 0.$$

Zad. 20. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą

$$\begin{cases} x(t) = 3r\cos^2 t \\ y(t) = 3r\cos^2 t \operatorname{ctg} t \end{cases}, \quad t \in [\pi/12, \pi/6], \quad r > 0.$$

Zad. 21. Obliczyć pola powierzchni ograniczonych krzywymi
(a) $y = \cos(x),\ y = \sin(x),\ x = -\frac{\pi}{4},\ x = \frac{\pi}{4}$
(b) $xy = 1,\ y = x,\ y = 2x\ (x, y > 0)$
(c) $y = \sqrt{|x|},\ y = x^2$
(d) $x^2 + (y-2)^2 = 4,\ y = x\ (y \leqslant x)$
(e) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$
(f) $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$

2.3. **Długość łuku krzywej.**

Zad. 1. Obliczyć długość łuku krzywej

$$\begin{cases} x(t) = e^t \sin t \\ y(t) = e^t \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

Zad. 2. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.
Zad. 3. Obliczyć długość łuku krzywej $y = 1 - \ln(\cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
Zad. 4. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.
Zad. 5. Obliczyć długość łuku krzywej

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{1}{3}t^3 \end{cases}, \quad t \in [0, \sqrt{3}].$$

Zad. 6. Obliczyć długość łuku krzywej

$$l : \begin{cases} x(t) = e^{2t}\cos t \\ y(t) = e^{2t}\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \tfrac{\ln 2}{2}].$$

Zad. 7. Obliczyć długość łuku krzywej

$$k : \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

2.4. **Objętość i pole powierzchni bocznej bryły obrotowej.**

Zad. 1. Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót wokół osi OX krzywej $y = \frac{1}{3}x^3$, $x \in [0, 1]$.

Zad. 2. Obliczyć pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót wokół osi OX krzywej $y = \sqrt{x+2}$, $x \in [1, 2]$.

Zad. 3. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OX łuku asteroidy

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

Zad. 4. Obliczyć pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót krzywej $y = x\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, wokół osi OX.

Zad. 5. Zbadaj, czy istnieje objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX krzywej danej równaniem $y = e^{-x}\sqrt{x}$, $x \leqslant 0$.

Zad. 6. Obliczyć objętość bryły, która powstała przez obrót wokół osi OX elipsy

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Zad. 7. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = \operatorname{tg} x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, wokół osi OX.

Zad. 8. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = e^{-x}\sqrt{|\sin x|}$, $x \in [0, \infty)$, wokół osi OX.

Zad. 9. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = \sqrt{\frac{1}{x^2+2x+2}}$, $x \in (-\infty, \infty)$, wokół osi OX.

Zad. 10. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $x \in [0\infty)$, wokół osi OX.

Zad. 11. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = \frac{1}{\sqrt{x \ln^2 x}}$, $x \in (0, \frac{1}{e}]$, wokół osi OX.

Zad. 12. Obliczyć objętość bryły nieograniczonej powstałej przez obrót krzywej $y = \sqrt{x-1} \cdot e^{-x}$ wokół osi OX.

Zad. 13. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = xe^{-x}$, $x \geqslant 0$, wokół osi OX.

Zad. 14. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX krzywej $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, dla $2 \leqslant x \leqslant y$.

Zad. 15. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = \sqrt{\operatorname{arc\,tg} x}$, $x \in [0, 1]$, wokół osi OX.

2.5. **Całka podwójna.**

Zad. 1. Obliczyć całkę $\iint_D F(x, y)\, dxdy$, jeżeli

(a) $F(x, y) = xy,\ D = \{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

(b) $F(x, y) = x^2ye^{xy},\ D = \{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

(c) $F(x, y) = e^{x+y},\ D = \{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

(d) $F(x, y) = x\sin(y),\ D = \left\{(x, y)\colon\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ \ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$

(e) $F(x, y) = \dfrac{x^2}{1+y^2},\ D = \{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

(f) $F(x, y) = \dfrac{1}{(x+y+1)^2},\ D = \{(x, y)\colon\ 3 \leqslant x \leqslant 4,\ \ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

(g) $F(x, y) = \sqrt{xy},\ D = \{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ \ 0 \leqslant y \leqslant b\}$

(h) $F(x, y) = x^2y\cos(xy^2),\ D = \left\{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ \ 0 \leqslant y \leqslant 2\right\}$

(i) $F(x, y) = x^3y^2,$ obszar D jest kołem $x^2 + y^2 \leqslant R^2$

(j) $F(x, y) = x^2 + y,$ obszar D jest ograniczony parabolami $y = x^2,\ y^2 = x$

(k) $F(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2}$, obszar D jest ograniczony krzywymi $x=2,\ x=y,\ xy=1$

(l) $F(x,y)=\cos(x+y)$, obszar D jest trójkątem ograniczonym prostymi $x=0,\ y=\pi,\ x=y$

Zad. 2. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć następujące całki po obszarach ograniczonych wskazanymi krzywymi

(a) $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, obszar $D:\ x^2+y^2=2$

(b) $\iint_D y\,dxdy$, obszar $D:\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=1,\ x=y,\ y=0\ (y\geqslant 0)$

(c) $\iint_D \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$, obszar $D:\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=1\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 1)$

(d) $\iint_D x\,dxdy$, obszar $D:\ x^2+(y-1)^2=1,\ y=x,\ (x\geqslant y)$

(e) $\iint_D \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, obszar $D:\ (x^2+y^2)^2-4x(x^2+y^2)=4y^2,\ x^2+y^2=4\ (x\geqslant 0)$

(f) $\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, obszar $D:\ (x^2+y^2)^2=x^2-y^2,\ x=0\ (x\geqslant 0)$

Zad. 3. Obliczyć całkę $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2+y^2=6x$.

Zad. 4. Obliczyć

$$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dz\Big)dy\right)dx.$$

Zad. 5. Obliczyć $\iint_D (x+y)dxdy$, gdzie $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x\leqslant 0\}$.

Zad. 6. Obliczyć $\iint_D \dfrac{xy\cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, gdzie $D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 4,\ y\geqslant |x|\}$.

Zad. 7. Obliczyć $\iint_D xydxdy$, gdzie $D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

Zad. 8. Obliczyć $\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy$, gdzie $D=\{(x,y): r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2\}$, $r,R>0$.

Zad. 9. Obliczyć $\iint_D \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}dxdy$, gdzie $D=\{(x,y): 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 16,\ -x\leqslant y,\ y\geqslant x\}$.

2.6. **Całka potrójna.**

Zad. 1. Obliczyć objętości brył ograniczonych wskazanymi powierzchniami

(a) $x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=1$

(b) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z=0,\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9$

(c) $z=4-x^2-y^2,\ z=0$

(d) $z=e^{y-x},\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (x+y\leqslant 1)$

(e) $z=9-x^2,\ z=0,\ y^2=3x$

(f) $z=x^2+y^2,\ z=x+y,\ z=0.$

Zad. 2. Obliczyć całkę $\iiint_V (2xy+x)dxdydz$, gdzie obszar V jest czworościanem o wierzchołkach $A(-2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,-3)$, $D(0,0,0)$.

Zad. 3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z^2=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$ dla $z\geqslant 0$.

Zad. 4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z=8-\sqrt{x^2-y^2+z^2}$, $z=2+x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$, dla $x^2+y^2\geqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

Zad. 5. Obliczyć objętość bryły określonej warunkami $x^2+y^2+z^2\leqslant 9$, $x^2+y^2\leqslant 4$, $z\geqslant 0$.

Zad. 6. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z=\sqrt{x^2+y^2}+4$, $z=6-\sqrt{x^2+y^2}$.

Zad. 7. Obliczyć objętość bryły $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ x^2+y^2 \leqslant 3z\}$.
Zad. 8. Obliczyć objętość bryły $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant 8,\ z^2 \leqslant x^2+y^2\}$.
Zad. 9. Obliczyć objętość bryły

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^2+y^2}\}$$

.

Zad. 10. Obliczyć objętość bryły określonej warunkami $z \leqslant 9 - x^2 - y^2$, $4x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z \geqslant -1$.
Zad. 11. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = 1 + x^2 + y^2$, $z = 9 - x^2 - y^2$.
Zad. 12. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, dla $z \geqslant 0$.
Zad. 13. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ i $x^2 + y^2 = z^2$.
Zad. 14. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$.
Zad. 15. Obliczyć objętość bryły

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 \leqslant z^2,\ 9 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25\}.$$

Zad. 16. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = 6 - x^2 - y^2$.
Zad. 17. Obliczyć całki $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$, gdzie:
(a) $f(x,y,z) = exp(x+y+z)$, $\quad V:\ x \leqslant 0,\ -x \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant -x$
(b) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$, $\quad V:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y$
(c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, $\quad V:\ x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 1 - x \leqslant z \leqslant 2 - x$;
(d) $f(x,y,z) = xyz$, $\quad V$: bryła ograniczona powierzchniami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$
(e) $f(x,y,z) = x$, $\quad V$: bryła ograniczona płaszczyznami układu współrzędnych i płaszczyzną przechodzącą przez punkty $(2,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,3)$
Zad. 18. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całki:
(a) $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)^2 dxdydz$, $\quad V:\ x^2+y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$
(b) $\iiint_V xyz\,dxdydz$, $\quad V:\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$
(c) $\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, $\quad V:\ x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$
(d) $\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, $\quad V:\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1$.

Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całki:
(a) $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, $\quad V:\ -\sqrt{4-x^2-y^2} \leqslant z \leqslant 0$;
(b) $\iiint_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\quad V:\ 4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$;
(c) $\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, $\quad V:\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;
(d) $\iiint \_V\, z^2\,dxdydz$, $\quad V:\ x^2+y^2+(z-R)^2 \leqslant R^2$;
(e) $\iiint_V x^2\,dxdydz$, $\quad V:\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4x$;
(f) $\iiint_V (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dxdydz$, $\quad V:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.
Zad. 19. Obliczyć całki:
(a) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c (x+y+z)\,dz$

(b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \dfrac{dz}{\sqrt{1+x+y+z}}$

(c) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyz\, dz;$

(d) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz$

(e) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz$

(f) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz$

(g) $\int\limits_0^{e-1} dx \int\limits_0^{e-x-1} dy \int\limits_e^{x+y+e} \dfrac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\, dz$

Zad. 20. Obliczyć objętość obszarów ograniczonych podanymi powierzchniami:
(a) $x^2+y^2=9,\ x+y+z=1,\ x+y+z=5$
(b) $x=-1,\ x=2,\ z=4-y^2,\ z=2+y^2;$
(c) $z=\dfrac{1}{1+x^2+y^2},\ z=0,\ x^2+y^2=1$
(d) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2},\ z=c$
(e) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z,\ (a>0)$

Zad. 21. Dana jest bryła wycięta walcem $x^2+y^2=Rx$ z kuli $x^2+y^2+z^2=R^2$ *(bryła Vivianiego).* Obliczyć:
(a) objętość,
(b) pole górnej i dolnej podstawy,
(c) pole powierzchni bocznej,
(d) położenie środka ciężkości (jednorodnej) bryły Vivianiego.

Zad. 22. Obliczyć masę i objętość bryły ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2-z^2=a^2$, $z=0$ i $z=a>0$, jeżeli jej gęstość w każdym punkcie jest wprost proporcjonalna do trzeciej współrzędnej tego punktu i równa jest $\frac{4}{3}$ na płaszczyżnie $z=a$.

Zad. 23. Obliczyć masę bryły zadanej nierównościami $x^2+y^2\leqslant 16$ i $0\leqslant z\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$, jeżeli jej gęstość w każdym punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od osi OZ.

Zad. 24. Obliczyć masę bryły ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2+z^2=2z$ i $z=\sqrt{x^2+y^2}$, jeżeli jej gęstość w każdym punkcie jest odwrotnie proporcjonalna do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

Zad. 25. Obliczyć masę i średnią gęstość bryły ograniczonej powierzchniami $x^2-y^2=az$, $x^2+y^2=a^2$ i $z=0$ $(z>0)$, jeżeli jej gęstość w każdym punkcie jest wprost proporcjonalna do trzeciej współrzędnej tego punktu i największa wartość gęstości równa jest 3.

Zad. 26. Wyznaczyć środek masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchnią $y^2+2z^2=4x$ i płaszczyzną $x=2$.

Zad. 27. Wyznaczyć środek masy jednorodnej bryły ograniczonej paraboloidą $z=x^2+y^2$ i płaszczyzną $z=4$.

Zad. 28. Obliczyć moment statyczny jednorodnej bryły ograniczonej powierzchnią $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i płaszczyzną $z=0$ $(z>0)$ względem tej płaszczyzny.

Zad. 29. Obliczyć biegunowy moment bezwładności bryły ograniczonej powierzchnią $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ względem punktu $(0,0,0)$.

3. Całka powierzchniowa i krzywoliniowa

Zad. 1. Obliczyć $\iint_S xy^2dydz+yz^2dxdz+zx^2dxdy$, gdzie S jest wewenętrzną stroną powierzchni bryły określonej nierównościami $1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Zad. 2. Obliczyć $\iint_S (xz+yz)Ş$, gdzie S jest częścią powierzchni stożkowej $z=\sqrt{x^2+y^2}$ wyciętej walcem $x^2+y^2=4x$.

Zad. 3. Obliczyć $\iint_S (x^2+y^2)dxdz$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni $y=a^2-x^2-z^2$ odciętej płaszczyzną $y=\frac{1}{2}a^2$.

Zad. 4. Obliczyć pola części powierzchni o równaniu $z=f(x,y)$ odciętych wskazanymi powierzchniami:

(a) $f(x,y)=8-2(x+y), \quad x=0,\ y=0,\ z=0$

(b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2=2x$

(c) $f(x,y)=\sqrt{16-(x^2+y^2)}, \quad z=1,\ z=2$

(d) $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2), \quad x^2+y^2=8$

(e) $f(x,y)=1-(x^2+y^2), \quad z=0$

(f) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=1,\ z=2;$

(g) $f(x,y)=xy, \quad x^2+y^2=R^2$

(h) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}, \quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=c^2.$

Zad. 5. Obliczyć całkę $\iint\limits_S z\,dS$, gdzie S jest

(a) górną częścią sfery $x^2+y^2+z^2=R^2$, $R>0$;

(b) częścią powierzchni stożka $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0$ dla $x\in[a,b],\ b>a>0$;

(c) częścią płata powierzchniowego danego równaniami parametrycznymi $x(u,v)=u\cos v$, $y(u,v)=u\sin v$, $z(u,v)=v$ dla $u\in[0,a]$, $v\in[0,2\pi]$.

Zad. 6. Obliczyć $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dS$, gdzie S jest częścią powierzchni bocznej walca $x^2+y^2\leqslant 1$ dla $0\leqslant z\leqslant 2$ i leżącą w I oktancie.

Zad. 7. Obliczyć $\iint\limits_S x(y+z)\,dS$, gdzie S jest częścią powierzchni bocznej walca $x^2+y^2\leqslant 1$ dla $0\leqslant z\leqslant 2$.

Zad. 8. Obliczyć $\iint\limits_S xz\,dS$, gdzie S jest częścią płata powierzchniowego danego równaniami $x(u,v)=v\cos u$, $y(u,v)=v\sin u$, $z(u,v)=v$ dla $u\in[0,\pi]$, $v\in[3,4]$.

Zad. 9. Obliczyć $\iint\limits_S z\,dS$, gdzie S jest częścią powierzchni torusa powstałego w wyniku obrotu wokół osi OZ okręgu $(x-3)^2+z^2=4$ i leżącą w I oktancie na zewnątrz walca $x^2+y^2=16$.

Zad. 10. Obliczyć pole części powierzchni stożka $z^2=x^2+y^2$ wyciętej walcem parabolicznym $z^2=2py,\ p>0$.

Zad. 11. Obliczyć pole części płata powierzchniowego $az=x\cdot y$ leżącego w I oktancie między powierzchniami $x^2+y^2=a^2$ i $x^2+y^2=b^2,\ 0<a<b$.

Zad. 12. Obliczyć pole części płaszczyzny $x+y+z=2$ wyciętej powierzchniami $x^2+y^2=x$, $x=y$ i $y=0$.

Zad. 13. Obliczyć pole części sfery $x^2+y^2+z^2=25$ zawartej między płaszczyznami $z=3$ i $z=4$.

Zad. 14. Obliczyć pole części płata powierzchniowego opisanego równaniami parametrycznymi $x(u,v)=(10+3\cos v)\cos u$, $y(u,v)=(10+3\cos v)\sin u$, $z(u,v)=3\sin v$ dla $u\in[0,\pi]$, $v\in[\pi,2\pi]$

Zad. 15. Obliczyć przybliżone pole części powierzchni Ziemi zawartej między południkami 60° i 80° **W** oraz równoleżnikami 45° i 60° **N**. W zadaniu przyjąć, że Ziemia jest kulą o promieniu $R=6370\,\mathrm{km}$.

Zad. 16. Obliczyć masę sfery o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, jeśli powierzchniowa gęstość masy w każdym jej punkcie jest wprost proporcjonalna do kwadratu pierwszej współrzędnej tego punktu.

Zad. 17. Wyznaczyć masę płata powierzchniowego $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y^2 + z^2 - 3, \ -2 \leqslant x \leqslant 1\}$, jeżeli gęstość w każdym jego punkcie jest odwrotnie proporcjonalna do odległości tego punktu od osi Ox.

Zad. 18. Wyznaczyć masę płata powierzchniowego $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4x, \ x \geqslant 2\}$, jeżeli gęstość masy w każdym jego punkcie jest wprost proporcjonalna do odległości tego punktu od płaszczyzny Oyz.

Zad. 19. Obliczyć masę części płata powierzchniowego $z = \sqrt{9 - y^2}$ odciętego płaszczyznami $x = 0$ i $x = 2$, jeżeli powierzchniowa gęstość masy w każdym jej punkcie dana jest wzorem $\rho(x, y, z) = z(x + y)$.

Zad. 20. Obliczyć masę części płata powierzchniowego wyciętego walcem $x^2+y^2 = 4$ z powierzchni danej równaniem $z = xy$, jeżeli gęstość w każdym punkcie tej powierzchni jest równa odległości tego punktu od osi Oz.

Zad. 21. Obliczyć masę, moment statyczny M_{xy} oraz moment bezwładności względem osi OZ górnej półsfery $x^2+y^2+z^2 = R^2$, jeżeli powierzchniowa gęstość masy w każdym punkcie równa jest kwadratowi odległości tego punktu od wertykalnej średnicy sfery.

Zad. 22. Obliczyć następujące całki:

(a) $\iint_S xy\,dydz + yz\,dzdx + xz\,dxdy$, gdzie S jest trójkątem o wierzchołkach $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(1, -1, 1)$ zorientowanym tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz;

(b) $\iint_S x^2y^2z\,dxdy$, gdzie S jest górną półsferą $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ zorientowaną tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz;

(c) $\iint_S xz\,dydz + x^2y\,dzdx + y^2z\,dxdy$, gdzie S jest częścią powierzchni opisanej równaniami $x(u, v) = v\cos u$, $y(u, v) = v\sin u$, $z(u, v) = v$ dla $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $v \in (0, 1)$ oraz zorientowaną tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz;

(d) $\iint_S xz\,dydz + x^2y\,dzdx + y^2z\,dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną części walca $x^2 + y^2 = 1$ położoną w pierwszym oktancie i odciętą płaszczyznami $z = 0$, $z = 1$;

(e) $\iint_S z\,dydz - x\,dzdx + y\,dxdy$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $3x + 6y - 2z = 6$ odciętej płaszczyznami układu współrzędnych i zorientowaną tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz.

Zad. 23. Obliczyć całkę $\iint\limits_S xz\,dxdy$, gdzie S jest częścią powierzchni torusa powstałego w wyniku obrotu wokół osi Oz okręgu $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, leżącą w obszarze $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$ oraz zorientowaną tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz.

Zad. 24. Obliczyć całkę $\iint\limits_S yz\,dxdy$, gdzie S jest częścią powierzchni torusa powstałego w wyniku obrotu wokół osi Oz okręgu $(y - 2)^2 + z^2 = 1$, leżącą w obszarze $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \geqslant 4$ oraz zorientowaną tak, że wektor normalny tworzy kąt ostry z osią Oz.

Zad. 25. Obliczyć następujące całki:

(a) $\iint_S x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

(b) $\iint_S xz\,dydz + x^2y\,dzdx + y^2z\,dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni bryły ograniczonej przez $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, gdzie $x, y \geqslant 0$;

(c) $\iint_S dydz + 2\,dzdx + z^2\,dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni bryły ograniczonej przez $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4z - 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, gdzie $x, y \geqslant 0$;

(d) $\iint_S 3x\,dydz - \,dzdx + 2\,dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni bryły ograniczonej przez $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2=1$;

(e) $\iint_S (\operatorname{tg} z + xyz)\,dydz + 2y\,dzdx + (z^2+2xy)\,dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni bryły ograniczonej przez $x^2+z^2=4$, $y=0$, $y=8$;

(f) $\iint_S x^2y\,dydz - xy^2\,dzdx + (x^2+y^2)z\,dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni walca $x^2+y^2 \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant 5$;

(g) $\iint_S (x^2+yz)\,dydz + (xz+y^2)\,dzdx + xy^2\,dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni walca $x^2+y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 2$;

(h) $\iint_S x^2y\,dydz + xy^2\,dzdx + xyz\,dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną części sfery $x^2+y^2+z^2=R^2$ położoną w pierwszym oktancie;

(i) $\iint_S xy\,dydz + yz\,dzdx + xz\,dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną czworościanu ograniczonego płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=3$.

Zad. 26. Korzystając ze wzoru Greena obliczyć $\oint_K e^x(1-\cos y)dx - e^x(y-\sin y)dy$, gdzie K jest krzywą ograniczającą obszar D: $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \cos x$, zorientowaną dodatnio.

Zad. 27. Obliczyć $\oint_K -xy^2dy + x^2ydx$, gdzie krzywa K jest okręgiem o równaniu $x^2+y^2=1$ dodatnio zorientowanym.

Zad. 28. Obliczyć $\oint_K (2x^3-11y)dx + (4x+\sin y)dy$, gdzie K jest dodatnio zorientowanym okręgiem o równaniu $x^2+y^2=16$.

Zad. 29. Obliczyć $\oint_K -xydx + (y^2+1)dy$, gdzie krzywa K jest dodatnio skierowanym brzegiem zbioru $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

Zad. 30. Obliczyć $\oint_K e^x(1-\cos y)dx - e^x(1-\sin y)dy$, gdzie krzywa K jest krzywą zamkniętą składającą się z $y=\sin x$, $x \in [0,\pi]$, $y=0$, skierowaną dodatnio.

Zad. 31. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int\limits_{(0,0)}^{(2,4)} 2xydx + x^2dy$ wzdłuż drogi $y=x^2$.

Zad. 32. Korzystając z wzoru Greena obliczyć $\oint_L (1-x^2)dx + x(1+y^2)dy$, gdzie L jest krzywą zamkniętą zorientowaną dodatnio składającą się z linii $y=\sqrt{x+4}$, $y=0$, $x=0$.

Zad. 33. Obliczyć $\int_L x(y+z)dl$, gdzie

$$L : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{3}{4}t \end{cases},\ t \in [0,\pi].$$

Zad. 34. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć $\oint_L xydx - xdy$, gdzie L jest krzywą zamkniętą zorientowaną dodatnio składającą się z linii $y=\sqrt{x}$, $y=0$, dla $x \in [1,2]$.

Zad. 35. Obliczyć $\oint_K xdx - x^2dy$, gdzie K jest okręgiem $x^2+y^2=8x$ zorientowanym dodatnio.

Zad. 36. Obliczyć $\int_K y(x-y)dx + xdy$, gdzie K jest częścią krzywej $y^2=4x$ skierowanej od $A(1,-2)$ do $B(0,0)$.

Zad. 37. Obliczyć $\oint_K y(x-y)dx + xdy$, gdzie K jest dodatnio zorienotwanym brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

Zad. 38. Obliczyć $\int_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, gdzie

$$L: \begin{cases} x=\cos t + t\sin t \\ y=\sin t - t\cos t \\ z=\ln 5 \end{cases},\ t\in[0,\pi].$$

Zad. 39. Obliczyć $\int_K \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} y}{1+x^2}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx+\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+y^2}+\sqrt{\frac{x}{y}}+2y\right)dy$, gdzie krzywa K jest linią $y=x$ od punktu $A(1,1)$ do $B(2,2)$.

Zad. 40. Obliczyć $\oint_C \ln(1+y)dx-\frac{xy}{1+y}dy$, gdzie krzywa C jest dodatnio zorientowanym trójkątem o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(0,4)$.

Zad. 41. Obliczyć $\oint_C x^2ydy-x^2dx$, gdzie krzywa C jest dodatnio zorientowanym kwadratem o wierzchołkach $A(1,1)$, $B(1,-1)$, $C(3,-1)$, $D(3,1)$.

Zad. 42. Obliczyć $\int_L yzdx+zxdy+xydz$, gdzie L jest fragmentem krzywej

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \\ z=\frac{at}{2\pi} \end{cases}$$

zawartym między płaszczynami $z=0$ i $z=a$, $a,r>0$.

Zad. 43. Obliczyć $\oint_K (y^2+2y)dx-(e^y+2x)dy$, gdzie krzywa K jest okręgiem $(x-1)^2+y^2=1$ skierowanym dodatnio.

Zad. 44. Obliczyć masę krzywej $C:\ x^2+y^2=4x$, gdzie gęstość w każdym jej punkcie jest wprost proporcjonalna do kwadratu odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

Zad. 45. Obliczyć masę łuku krzywej $K:\ y=2\ln x$, $1\leqslant x\leqslant 2$, gdzie gęstość krzywej w każdym jej punkcie równa jest kwadratowi odciętej tego punktu.

Zad. 46. Obliczyć masę części krzywej $y=\ln(1-x^2)$ dla $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, jeżeli gęstość liniowa krzywej w każdym punkcie równa jest $\rho(x,y)=1+x$.

Zad. 47. Obliczyć masę odcinka $\overline{AB}$, gdzie $A=(0,1)$ i $B=(3,0)$, o liniowej gęstości masy $\sigma(x,y)=x^2+y^2$.

Zad. 48. Obliczyć masę łuku cykloidy $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$, $t\in(0,2\pi)$, $a>0$, jeśli gęstość liniowa krzywej w każdym punkcie równa jest rzędnej tego punktu.

Zad. 49. Obliczyć masę części krzywej $\vec{r}(t)=[a(\cos t+t\sin t),\ a(\sin t-t\cos t)]$ dla $t\in[0,\pi]$, $a>0$, jeżeli gęstość liniowa krzywej w każdym punkcie jest równa kwadratowi promienia wodzącego.

Zad. 50. Obliczyć masę części krzywej $\begin{cases} x(t) = 2\int_0^t \frac{z}{1+z^2}\,dz \\ y(t) = \int_0^t \frac{1-z^2}{1+z^2}\,dz \end{cases}$ dla $t\in[0,1]$, jeżeli gęstość liniowa krzywej w każdym punkcie równa jest $\rho(x,y)=\frac{y}{e^x}$.

Zad. 51. Obliczyć masę części elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $0<b<a$ leżącej w pierwszej ćwiartce, jeżeli gęstość liniowa krzywej w każdym punkcie jest równa rzędnej tego punktu.

Zad. 52. Obliczyć masę łuku krzywej $x(t)=ae^t\cos t$, $y(t)=ae^t\sin t$, $z(t)=ae^t$ od punktu $O=(0,0,0)$ do punktu $A=(a,0,a)$, $a>0$, jeśli gęstość krzywej wyraża się wzorem $\gamma(t)=2\,e^t$.

Zad. 53. Obliczyć masę łuku $\overset{\frown}{OA}$, gdzie $O=(0,0)$ i $A=(4,\frac{16}{3})$, krzywej $3y=2x\sqrt{x}$, jeżeli gęstość liniowa w punkcie M łuku jest wprost proporcjonalna do długości łuku $\overset{\frown}{OM}$.

Zad. 54. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny Oxz jednorodnego łuku krzywej $\vec{r}(t)=[e^t\cos t, e^t\sin t, e^t]$ dla $t\in[0,2\pi]$.

Zad. 55. Obliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnego łuku linii łańcuchowej $y = a\cosh\frac{x}{a}$, gdzie $-a \leqslant x \leqslant a$ dla pewnego $a > 0$.

Zad. 56. Wyznaczyć położenie środka ciężkości tej części jednorodnego okręgu $x^2+y^2 = 4$, która jest położona powyżej prostej $y = x$.

4. Równania różniczkowe

4.1. **Równania różniczkowe zwyczajne I rzędu.**

Zad. 1. Rozwiązać równania

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

(b) $x^2\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 e^{\frac{x-1}{x}}$

(c) $2\dfrac{dy}{dt}\ln t + \dfrac{y}{t} = \dfrac{1}{y}\cos^2 t$

(d) $y' + \dfrac{1}{x}y = \cos 2x$

(e) $2y' + y\operatorname{ctg}x = \dfrac{8\cos^4 x}{y}$

(f) $3xy' - y = 3x^2y^4\ln x$

(g) $\dfrac{dy}{dx}e^x = y$

(h) $x(1+e^y) - e^y\dfrac{dy}{dx} = 0$

(i) $2yy' - y^2 - x = 0$

(j) $y' + \dfrac{y}{x} = x$

(k) $y' + y = \dfrac{x^2}{y}$

(l) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x}$

(m) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{x^2+1}$

(n) $yx^{y-1}dx + x^y\ln x dy = 0$

(o) $yy' + y^2 = e^x$

Zad. 2. Znaleźć całkę szczególną równania $\sin x\cos 2y dx + \cos x\sin 2y dy = 0$ spełniającą warunek początkowy $y(0) = \frac{\pi}{6}$.

Zad. 3. Rozwiązać następujące zagadnienie:

$$\begin{cases} xy' + 2y - e^{2x} = 0, \ x \neq 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

Zad. 4. Rozwiązać następujące zagadnienie:

$$\begin{cases} 2y' - y\operatorname{tg}x = \frac{-y^3}{\cos x}, \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Zad. 5. Rozwiązać następujące zagadnienie:

$$\begin{cases} y' - 9x^2y = (x^5+x^2)\sqrt[3]{y^2} \\ y(1) = 8 \end{cases}.$$

Zad. 6. Rozwiązać następujące zagadnienie:

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = -3x\ln x, \ x > 0 \\ y(e) = 2 \end{cases}.$$

Zad. 7. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $xy' - y = x^2e^{-2x}$ przy warunku $y(1) = 1$.

Zad. 8. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $y' + y = \frac{x^2}{y^2}$ przy warunku $y(0) = 1$.

Zad. 9. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $y' + y = xy^{-6}$ przy warunku $y(0) = 2$.

Zad. 10. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $y' + y = \frac{x}{y}$ przy warunku $y(0) = 1$.

Zad. 11. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $(x + y^2)dx + 2xydy = 0$ przy warunku początkowym $y(1) = 2$.

Zad. 12. Rozwiązać równanie $y' + \frac{2y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}$ z warunkiem początkowym $y(1) = 4$.

Zad. 13. Rozwiązać równanie $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$ z warunkiem początkowym $y(1) = 1$.

Zad. 14. Rozwiązać równanie $y' + xy = \frac{x}{y^3}$ przy warunku $y(0) = 2$.

4.2. **Równania różniczkowe zwyczajne II rzędu.**

Zad. 1. Rozwiązać równania

(a) $y'' + y' = x^2 - e^{-x}$
(b) $y'' + y = \sin x$
(c) $y'' - 4y = x^2 + x$
(d) $y'' - y' - 2y = \sin 2x$
(e) $y'' - 6y' + 13y = 25\sin(2t)$
(f) $y'' - 3y' + 2y = x^2$
(g) $y'' + 9y = x^2 + 3$
(h) $y'' + 4y = 2\cos 3x$
(i) $y'' + 4y' = 1 + x$
(j) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$
(k) $y'' + 2y' + 2y = e^{2x} + 1$
(l) $y'' + 5y' + 6y = e^{x}$
(m) $y'' + 3y' = e^{-3x}$
(n) $y'' - 6y' + 10y = \cos 2x$
(o) $y'' + 4y' + 5y = 2\sin 2x$
(p) $y'' + 3y' = 3^{-3x}$
(q) $y'' - 5y' - 7y = \sin x$
(r) $y'' - 4y' + 3y = x^2 + 1$
(s) $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$
(t) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

Zad. 2. Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać równanie $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 1$ z warunkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4.3. **Równania różniczkowe cząstkowe.**

Zad. 1. Rozwiązać w $\Omega = \mathbb{R}^2$równanie $u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{yy} = 0$ z warunkami początkowymi $u(x, 0) = x$, $u_y(x, 0) = x^2$.

Zad. 2. Określić typ i rozwiązać w $\Omega = \mathbb{R}^2$ równanie $u_{xy} - u_x = 0$ z warunkiem początkowym $u(x, 0) = \sin x$.

Zad. 3. Określić typ i sprowadzić równanie $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ do postaci kanonicznej.

Zad. 4. Rozwiązać równanie cząstkowe $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 = 2$ z warunkiem początkowym $u(1, y) = e^y$.

5. Liczby zespolone, macierze i układy równań liniowych

5.1. **Liczby zespolone.**

Zad. 1. Obliczyć $\sqrt[3]{-1}$.

Zad. 2. Rozwiązać równanie $z^2 - 6z + 11 = 0$.

Zad. 3. Rozwiązać równanie $z^2 - (1 + 2i)z + 1 + 7i = 0$.

Zad. 4. Obliczyć i doprowadzić do postaci algebraicznej $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{i-1}\right)^8$.

Zad. 5. Rozwiązać równanie $z^2 - 3z + 3 + i = 0$.

Zad. 6. Obliczyć $\int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$, gdzie obraz krzywej γ jest dodatnio skierowanym okręgiem $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$.

Zad. 7. Obliczyć metodą residuów całkę

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+5x^2+4} dx \ .$$

Zad. 8. Określić typy osobliwości funkcji $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ oraz $g(z) = e^{1/z}$ w punkcie $z = 0$. Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 9. Obliczyć całkę

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{z^3 dz}{z^2+1},$$

gdzie Γ jest okręgiem $|z - i| = 1$ zorientowanym dodatnio.

Zad. 10. Znaleźć funkcję holomorficzną w $\mathbb{C}$, której część rzeczywista jest równa $u(x, y) = x^2 - y^2$.

Zad. 11. Obliczyć metodą residuów całkę

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+5x^2+4} dx \ .$$

Zad. 12. Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{z-1}{(1+z)z^2}$ w szereg Laurenta w pierścieniu $0 < |z| < 1$.

Zad. 13. Obliczyć całkę

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-i)}$$

gdzie $\Gamma : \ [0, 2\pi] \ni t \mapsto 2e^{it}$.

Zad. 14. Wykazać, że jeżeli f jest funkcją holomorficzną na obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$ taką, że $\mathrm{Re}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^2$, to $f \equiv const$ na Ω.

5.2. **Macierze i układy równań liniowych.**

Zad. 1. Obliczyć $B^T + 4A^{-1}$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zad. 2. Obliczyć rząd macierzy $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Zad. 3. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Zad. 4. Obliczyć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zad. 5. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 6x+4y+5z+2t+3u=1 \\ 3x+2y+4z+t+2u=3 \\ 3x+2y-2z+t=-7 \\ 9x+6y+z+3t+2u=2 \end{cases}$$

Zad. 6. Czy poniższy układ równań posiada jakiekolwiek rozwiązanie?

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+y+3z=1 \\ x+2y+3z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Zad. 7. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}.$$

Zad. 8. Zbadać warunki rozwiązalności układu w zależności od parametru a

$$\begin{cases} x+(a+1)y=5 \\ 3x+(2a+1)y=12 \\ (a+1)x+4y=10 \end{cases}.$$

Zad. 9. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ x+y-z=3 \\ 4x+y-z=8 \end{cases}.$$

Zad. 10. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 3x+y=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$$

(a) metodą Cramera;
(b) metodą macierzy odwrotnej.

Zad. 11. Zbadać warunki rozwiązalności poniższego układu równań w zależności od parametru a

$$\begin{cases} ax+(2a+3)y+2az=3a+9 \\ (2a-2)x+(3a+1)y+(4a-4)z=7a+1 \end{cases}.$$

6. Zadania różne

6.1. **Szeregi liczbowe.**

Zad. 1. Zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n \sin\frac{\pi}{4^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+4^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\operatorname{tg}\frac{3}{\sqrt{n}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{100^n}{n!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+3)^{2n+3}}{2n+3}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{6}{\sqrt{n}}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin \frac{1}{n}}{n!}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n}{4^n}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} n}{3}\right)^n$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{4}{n^2} \operatorname{tg} \frac{5}{n\sqrt{n}}$

6.2. **Szeregi funkcyjne.**

Zad. 1. Rozwinąć w szereg potęgowy o środku w $x_0 = 0$ funkcję $f(x) = x \operatorname{arc\,tg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$.

Zad. 2. Zbadać zbieżność szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-5)^{2n+1}}{2n+3}.$$

Zad. 3. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{n^2+3n}.$$

Zad. 4. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Zad. 5. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n! 2^n}.$$

Zad. 6. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arc\,tg}\left[\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{3n} \cdot \frac{1}{e}\right] \cdot x^n.$$

Zad. 7. Korzystając z wzorów na całkowanie i różniczkowanie szeregów potęgowych wyraz po wyrazie obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$.

Zad. 8. Za pomocą rozwinięcia funkcji $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ w szereg Fouriera obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Zad. 9. Wyznaczyć rozwinięcie funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla} \quad x \in (-\pi, 0) \\ 1 & \text{dla} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

w szereg Fouriera. Wyznaczyć sumę otrzymanego szeregu dla $x = 0$.

Zad. 10. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = |x|$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

Zad. 11. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

Zad. 12. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x\in(-\pi,0)\\ 2 & \text{dla} \quad x\in(0,\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{dla} \quad x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$$
oraz narysować wykres sumy szeregu.

Zad. 13. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x\in(-\pi,0)\\ 1 & \text{dla} \quad x\in[0,\pi)\end{cases}.$$

Zad. 14. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x)=x^2$ w przedziale $[-\pi,\pi]$.

Zad. 15. Rozwinąć w szereg Fouriera według sinusów funkcję
$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{dla} \quad x\in(0,\frac{\pi}{4})\\ 2 & \text{dla} \quad x\in(\frac{\pi}{4},\pi)\end{cases}$$
i naszkicować wykres sumy szeregu.

Zad. 16. Rozwinąć w szereg Fouriera według cosinusów funkcję
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ 2 & \text{dla} \quad x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$$
i naszkicować wykres sumy szeregu.

Zad. 17. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję
$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{dla} \quad x\in[-\pi,0)\\ x & \text{dla} \quad x\in[0,\pi)\end{cases}.$$

Zad. 18. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję
$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{dla} \quad x\in[-\pi,0)\\ -x & \text{dla} \quad x\in[0,\pi)\end{cases}.$$

6.3. **Geometria analityczna i elementy algebry liniowej.**

Zad. 1. Obliczyć kąt przecięcia się prostych $l:\begin{cases}x=2+3t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}$ i $k:\begin{cases}x=2+t\\ y=t\\ z=1+4t\end{cases}$.

Zad. 2. Wiedząc, że $\vec{a}\times\vec{b}=2$, korzystając z własności iloczynu wektorowego obliczyć
$$(4\vec{a})\times(\vec{a}+\vec{b}).$$

Zad. 3. Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(2,-1,1)$ i prostopadłej do prostej l danej równaniem krawędziowym:
$$\begin{cases}x-2y+z-3=0\\ x+y-z+2=0\end{cases}.$$

Zad. 4. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$, $D(2,3,8)$.

Zad. 5. Wyznaczyć prostą równoległą do wektora $\vec{u}=[1,0,1]$, przechodzącą przez punkt $P(0,1,0)$.

Zad. 6. Czy prosta zawierająca punkt $P(1,1,1)$ może leżeć w płaszczyźnie $2x-y+z=0$?

Zad. 7. Czy istnieją proste $l\parallel\vec{u}$ i $k\parallel\vec{v}$ takie, że $l\parallel k$, ale $\vec{u}\perp\vec{v}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 8. Dany jest czworościan o wierzchołkach $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$, $C(0,0,0)$, $D(1,1,2)$.
(a) Obliczyć długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka D na podstawę ABC.
(b) Obliczyć odległość wierzchołka D od prostej zawierającej bok AC.
(c) Obliczyć cosinus kąta między ścianą DAB a podstawą ABC.

Zad. 9. Dany jest czworościan o wierzchołkach $A(1,1,1)$, $B(2,-1,1)$, $C(-2,4,6)$ oraz $D(-1,1,2)$.
(a) obliczyć objętość tego czworościanu,
(b) napisać równanie prostej zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka D.

Zad. 10. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $A(2,2,0)$ względem prostej

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{4}.$$

Zad. 11. Dane są: punkt $A(2,0,1)$, płaszczyzna Π: $x+y+z=0$ i prosta

$$l:\begin{cases} x+z=0\\ -y+1=0\end{cases}.$$

Wyznaczyć równanie płaszczyzny zawierającą prostą l i przechodzącą przez punkt B, symetryczny do punktu A względem płaszczyzny Π.

Zad. 12. Znaleźć rzut prostej $2x+y=1$ na płaszczyznę, w której leży prosta binormalna do krzywej

$$K:\begin{cases} x(t)=t\\ y(t)=\sqrt{t}\\ z(t)=t^2\end{cases}$$

dla $t=1$ oraz prosta

$$l:\begin{cases} x(t)=1+t\\ y(t)=1+2t\\ z(t)=1-t\end{cases}.$$

Zad. 13. Naszkicować krzywą daną równaniem $x^2+4xy+4y^2-2y+1=0$.

Zad. 14. Dane są współrzędne wektora $\vec{x}=[5,1,-4]$ w bazie kanonicznej. Znaleźć współrzędne wektora $\vec{x}$ w bazie $\vec{e}_1=[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0]$, $\vec{e}_2=[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0]$, $\vec{e}_3=[0,0,1]$.

Zad. 15. Wykazać, że przyporządkowanie każdemu wektorowi (x,y) przestrzeni $\mathbb{R}^2$ wektora (u,v,w) przestrzeni $\mathbb{R}^3$ określone wzorami $u=x+y$, $v=x$, $w=x+2y$ jest przekształceniem liniowym $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^3$.

6.4. Granice funkcji.

Zad. 1. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$

(g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

6.5. Granice ciągów.

Zad. 1. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+n}-n)}{n+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\ln(5+n)-\ln n\Big)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$

Zad. 2. Niech $a_n=\left(\frac{n^3+6n^2+5n-8}{n^3+6n^2-4n+7}\right)^{6n^2+5}$ oraz $b_n=\sqrt[n]{3^n\cdot n^6+5^n\cdot n^2}$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

6.6. **Badanie przebiegu zmienności funkcji.**

Zad. 1. Wyznaczyć asymptoty ukośne funkcji $f(x) = (x+5)e^{\frac{1}{x}}$.
Zad. 2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{x^3+2}{(x+1)^2}$ i naszkicować jej wykres.
Zad. 3. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ i naszkicować jej wykres.
Zad. 4. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = (x+6)e^{\frac{1}{x}}$ i naszkicować jej wykres.
Zad. 5. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = (x+13)e^{\frac{x}{x+13}}$.