1. Funkcje wielu zmiennych i funkcje uwikłane

Zadanie 1.1. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $(1,04)^{(2,02)}$.

Rozwiązanie. Korzystamy z przybliżenia $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \triangle x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \triangle y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, gdzie $\triangle x = x - x_0$ a $\triangle y = y - y_0$. Przybliżenie będzie tym lepsze im mniejsze będą przyrosty $\triangle x$, $\triangle y$ a błąd, jaki popełnimy, dąży do zera szybciej niż $\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$.
Rozważmy funkcję $f(x,y) = x^y$, gdzie $x, y > 0$, oraz $x = 1,04$, $y = 2,02$. Jako x_0 i y_0 weźmy zaokrąglenia x i y do liczby całkowitej, czyli $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Wtedy $\triangle x = 0,04$, $\triangle y = 0,02$ oraz $f(x_0,y_0) = 1$.
Obliczamy $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x$. Stąd mamy $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.
Zatem $(1,04)^{(2,02)} = f(1,04,\ 2,02) \approx 1 + 0,04 \cdot 2 + 0,02 \cdot 0 = 1,08$.
Odpowiedź: Przybliżona watość wyrażenia $(1,04)^{(2,02)}$ wynosi $1,08$.

Zadanie 1.2. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt{2,03 \cdot 7,96}$.

Rozwiązanie. Korzystamy z przybliżenia $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \triangle x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \triangle y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, gdzie $\triangle x = x - x_0$ a $\triangle y = y - y_0$.
Rozważmy funkcję $f(x,y) = \sqrt{xy}$, gdzie iloczyn $xy \geqslant 0$, oraz $x = 2,03$, $y = 7,96$. Jako x_0 i y_0 weźmy zaokrąglenia x i y do liczby całkowitej, czyli $x_0 = 2$, $y_0 = 8$. Wtedy $\triangle x = 0,03$, $\triangle y = -0,04$ oraz $f(x_0,y_0) = 4$.
Obliczamy $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$. Stąd $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0,25$. Zatem $\sqrt{3,03 \cdot 26,96} = f(2,03,\ 7,96) \approx 4 + 0,03 \cdot 1 - 0,04 \cdot 0,25 = 4,02$.
Odpowiedź: Przybliżona watość wyrażenia $\sqrt{2,03 \cdot 7,96}$ wynosi $4,02$.

Zadanie 1.3. Wykazać, że każda funkcja $z(x,y) = x^2 f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, gdzie f jest funkcją różniczkowalną jednej zmiennej, spełnia równanie

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

Rozwiązanie. Niech f będzie funkcją różniczkowalną jednej zmiennej t.
Obliczamy pochodne cząstkowe i wstawiamy je do równania

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 2xf\left(\frac{y}{x^2}\right) - 2\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y}{x^2}\right),\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y}{x^2}\right),$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 f\left(\frac{y}{x^2}\right) - 2y\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y}{x^2}\right) + 2y\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y}{x^2}\right) = 2z.$$

Zadanie 1.4. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x,y) = \frac{\ln(x^{3y})}{\sqrt{y-x}}.$$

Rozwiązanie. Z postaci funkcji otrzymujemy następujące założenia: $y - x > 0$, $x^{3y} > 0$, $x > 0$, $y > 0$,. Rozwiązeniem pierwszej nierówności jest $y > x$, natomiast przy założeniach $x > 0$ i $y > 0$ nierówność $x^{3y} > 0$ jest zawsze spełniona. Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór

$$D_f = \{(x,y) :\ x > 0,\ y > 0,\ y > x,\ x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Zadanie 1.5. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = -x^2 - 6y^2$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R}^2$. Pierwsze pochodne cząstkowe to $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -12y$. Dziedzina obydwu pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -12y = 0 \end{cases}$$

otrzymujemy jedyny punkt podejrzany o istnienie ekstremum o współrzędnych $(0, 0)$. Macierz drugich pochodnych cząstkowych to

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix},$$

jej wyznacznik w punkcie $(0, 0)$ wynosi 24 jest dodatni, więc funkcja ma w tym punkcie ekstremum lokalne. Jest to minimum ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -2 < 0$. Mimimum to wynosi $f(0, 0) = 0$.

Odpowiedź: Funkcja osiąga minimum lokalne w punkcie $(0, 0)$ o wartości $f(0, 0) = 0$.

Zadanie 1.6. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = -5x^2 + 7y^2$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R}^2$. Pierwsze pochodne cząstkowe to $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -10x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 14y$. Dziedzina obydwu pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Jedynym punktem, w którym obydwie pochodne cząstkowe się zerują jest punkt $(0, 0)$, a zatem jest to jedyny punkt podejrzany o ekstremum. Macierz drugich pochodnych cząstkowych to

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix},$$

jej wyznacznik w punkcie $(0, 0)$ wynosi -140. Zatem w punkcie $(0, 0)$ funkcja nie ma ekstremum.

Odpowiedź: Funkcja nie posiada ekstremów lokalnych.

Zadanie 1.7. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^3 + \frac{1}{27}y^3 - xy$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R}^2$. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{9}y^2 - x.$$

Dziedzina obydwu pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

$$\begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ \frac{1}{9}y^2 - x = 0 \end{cases},\ \begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ x^4 - x = 0 \end{cases},\ \begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \end{cases},$$

zatem punkty podejrzane o istnienie ekstremum to $(0, 0)$, $(1, 3)$.
Warunek wystarczajacy istnienia ekstremum w punkcie podejrzanym (x_0, y_0) :

$$W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rządu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{9}y.$$

W punkcie $(0, 0)$, mamy

$$W(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

więc w punkcie $(0, 0)$ funkcja f nie ma ekstremum lokalnego.
W punkcie $(1, 3)$, mamy

$$W(0, 0) = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

więc w punkcie $(1, 3)$ funkcja f ma ekstremum lokalne, które wynosi $f(1, 3) = -1$. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 3) = 6 > 0$ zatem jest to minimum lokalne.
Odpowiedź: Funkcja posiada minimum lokalne w punkcie $(1, 3)$, o wartości $f(1, 3) = -1$.

Zadanie 1.8. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R}^2$. Obliczamy pierwsze pochodne cząstkowe: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Dziedziną obydwu pochodnych cząstkowych jest $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, a zatem w punkcie $(0,0)$, który należy do dziedziny funkcji, będziemy badać z definicji istnienie ekstremum lokalnego. Ponieważ układ równań $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ nie posiada rozwiązań, nie mamy punktów podejrzanych.

Przystępujemy do badania istnienia ekstremum w punkcie $(0,0)$. Ponieważ $f(0,0) = 1$ oraz dla każdego punktu $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mamy $f(x,y) < 1$, a zatem w punkcie $(0,0)$ funkcja osiąga maksimum globalne.

Odpowiedź: Funkcja osiąga maksimum globalne w punkcie $(0,0)$ o wartości $f(0,0) = 1$.

Zadanie 1.9. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 + 6y + 8 - x$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór $\{(x,y) : x \geqslant 0, \ y \in \mathbb{R}\}$. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x} - 2y + 6.$$

. Dziedzina pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f}{\partial y}$ jest równa dziedzinie funkcji, ale dziedziną pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest zbiór $\{(x,y) : x > 0, \ y \in \mathbb{R}\}$. Zatem w każdym punkcie zbioru $\{(x,y) : x = 0, \ y \in \mathbb{R}\}$ będziemy badać istnienie ekstremum z definicji. Dla pozostałych punktów sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

$$\begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \sqrt{x} - 2y + 6 = 0 \end{cases}, \ \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} - 2y = -6 \end{cases}, \ \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y}{2} \\ -\frac{3}{2}y = -6 \end{cases}, \ \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases},$$

zatem punkt podejrzany to $(4,4)$.
Warunek wystarczajacy istnienia ekstremum w punkcie (x_0, y_0) :

$$W(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rządu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{y}{4\sqrt{x^3}}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2.$$

W punkcie $(4,4)$, mamy

$$W(4,4) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -2 \end{vmatrix} = \frac{3}{16} > 0,$$

więc w punkcie $(4,4)$ funkcja f posiada ekstremum lokalne. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,4) < 0$, więc jest to maksimum lokalne o wartości $f(4,4) = 20$.
Przystępujemy do badania ekstremów funkcji na zbiorze $\{(x,y) : x = 0, \ y \in \mathbb{R}\}$. Przy założeniu $x = 0$ funkcja przyjmuje wzór $f(x,y) = -y^2+6y+8$. Wtedy $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(y) = -2y+6$ i jedynym punktem podejrzanym o istnienie ekstremum jest punkt $y = 3$. Ponieważ $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(y) = -2$, więc byłoby to maksimum lokalne. Sprawdzamy, czy faktycznie jest tam maksimum. Obliczamy $f(0,3) = 17$. Weźmy punkty postaci $(\frac{1}{n}, 3)$. Wtedy $f(\frac{1}{n}, 3) = 17 + \frac{3n - \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} > 17$, a zatem funkcja f nie ma w punkcie $(0,3)$ ekstremum lokalnego.

Odpowiedź: Funkcja ma maksimum lokalne w punkcie $(4,4)$ o wartości $f(4,4) = 20$.

Zadanie 1.10. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = \frac{1}{y}e^{y^2+y+x^2}$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór $\{(x,y) : y \neq 0,\ x,y \in \mathbb{R}\}$. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{y}e^{y^2+y+x^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^2+y-1}{y^2}e^{y^2+y+x^2}.$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$

$$\begin{cases} \frac{2x}{y}e^{y^2+y+x^2} = 0 \\ \frac{2y^2+y-1}{y^2}e^{y^2+y+x^2} = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2+y-1 = 0 \end{cases},$$

zatem punkty podejrzane to $(0,-1)$, $(0,\frac{1}{2})$.
Warunek wystarczajacy istnienia ekstremum w punkcie podejrzanym (x_0,y_0) :

$$W(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rządu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4x^2+2}{y}e^{y^2+y+x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{4xy^2+2xy-2x}{y^2}e^{y^2+y+x^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4y^4+4y^3-y^2-2y+2}{y^3}e^{y^2+y+x^2}.$$

W punkcie $(0,-1)$, mamy

$$W(0,-1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

więc w punkcie $(0,-1)$ funkcja f ma ekstremum lokalne, które wynosi $f(0,-1) = -1$. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) = -2 < 0$ zatem jest to maksimum lokalne.
W punkcie $(0,\frac{1}{2})$, mamy

$$W(0,\frac{1}{2}) = \begin{vmatrix} 4e^{\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & 2e^{\frac{3}{4}} \end{vmatrix} = 8e^{\frac{3}{2}} > 0,$$

więc w punkcie $(0,\frac{1}{2})$ funkcja f ma ekstremum lokalne, które wynosi $f(0,\frac{1}{2}) = 2e^{\frac{3}{4}}$. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\frac{1}{2}) = 4e^{\frac{3}{4}} > 0$ zatem jest to minimum lokalne.

Odpowiedź: Funkcja ma w punkcie $(0,-1)$ maksimum lokalne o wartości $f(0,-1) = -1$ a w punkcie $(0,\frac{1}{2})$ minimum o wartości $f(0,\frac{1}{2}) = 2e^{\frac{3}{4}}$.

Zadanie 1.11. Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$, w zbiorze $D = (0,\pi) \times (0,\pi)$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, jednak badamy funkcję tylko na zbiorze $(0,\pi) \times (0,\pi)$. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y) + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) = \sin y \sin(2x+y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin x \cdot \cos y \cdot \sin(x+y) + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) = \sin x \sin(x+2y).$$

Dziedzina pierwszych pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$

$$\begin{cases} \sin y \sin(2x+y) = 0 \\ \sin x \sin(x+2y) = 0 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy, że $y = k\pi$ lub $2x + y = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Z drugiego równania, analogicznie, $x = k\pi$ lub $x + 2y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Po uwzględnieniu założenia, że $(x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$ mamy

$$\begin{cases} 2x + y = \pi \\ x + 2y = \pi \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pi - 2x \\ 3x = \pi \end{cases}$$

Otrzymujemy jeden punkt podejrzany $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Warunek wystarczajacy istnienia ekstremum w punkcie podejrzanym (x_0, y_0) :

$$W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \sin y \cos(2x+y), \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \sin x \cos(x+2y), \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \sin(2x+2y).$$

W punkcie $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ mamy

$$W(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{9}{4} > 0,$$

zatem w punkcie $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ funkcja ma ekstremum lokalne o wartości $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) < 0$, zatem jest to maksimum lokalne.

Odpowiedź: Funkcja ma w punkcie $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ maksimum lokalne o wartości $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Zadanie 1.12. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = 3 \ln \dfrac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór $\{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 12, x, y \in \mathbb{R}\}$. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3}{x} - \frac{1}{12 - x - y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{y} - \frac{1}{12 - x - y}.$$

Dziedzina pierwszych pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{1}{12-x-y} = 0 \\ \frac{2}{y} - \frac{1}{12-x-y} = 0 \end{cases}, \ \begin{cases} 12 - x - y = \frac{1}{3}x \\ 12 - x - y = \frac{1}{2}y \end{cases} \ \begin{cases} 12 - x - y = \frac{1}{3}x \\ \frac{2}{3}x = y \end{cases}$$

zatem punkt podejrzany to $(6, 4)$. Zauważmy, że należy on do dziedziny funkcji f.
Warunek wystarczajacy istnienia ekstremum w punkcie $(6, 4)$:

$$W(6, 4) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6, 4) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(6, 4) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(6, 4) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(6, 4) \end{vmatrix} > 0.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rządu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -3\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(12 - x - y)^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{1}{(12 - x - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2\frac{1}{y^2} - \frac{1}{(12 - x - y)^2}.$$

W punkcie $(6, 4)$, mamy

$$W(6, 4) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} > 0,$$

więc w punkcie $(6,4)$ funkcja f ma ekstremum lokalne, które wynosi $f(6,4) = \ln 32$. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,4) < 0$ zatem jest to maksimum lokalne.

Odpowiedź: Funkcja ma w punkcie $(6,4)$ maksimum lokalne o wartości $f(6,4) = \ln 32$.

Zadanie 1.13. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = e^x(x^2+y^2)$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}^2$. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x(x^2+y^2+2x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x(x^2+y^2+2y).$$

Dziedzina pierwszych pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

$$\begin{cases} e^x(x^2+y^2+2x) = 0 \\ e^x(x^2+y^2+2y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2+2x = 0 \\ x^2+y^2+2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ x(x+1) = 0 \end{cases}$$

Otrzymujemy dwa punkty podejrzane o istnienie ekstremum: $(0,0)$ oraz $(-1,-1)$.

Warunek wystarczajacy istnienia ekstremum w punkcie podejrzanym (x_0,y_0) :

$$W(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x(x^2+y^2+4x+2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^x(x^2+y^2+4y+2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = e^x(x^2+y^2+2x+2y).$$

W punkcie $(0,0)$ mamy

$$W(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

więc w punkcie $(0,0)$ funkcja f ma ekstremum lokalne, które wynosi $f(0,0) = 0$. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0$ zatem jest to minimum lokalne. Zauważmy, że ponieważ dla dowolnych $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(x,y) \geqslant 0$, zatem jest to minimum globalne.

W punkcie $(-1,-1)$ mamy

$$W(-1,-1) = \begin{vmatrix} 0 & -2e^{-1} \\ -2e^{-1} & 0 \end{vmatrix} = -4e^{-2} < 0,$$

zatem w punkcie $(-1,-1)$ funkcja nie ma ekstremum.

Odpowiedź: Funkcja osiąga w punkcie $(0,0)$ minimum lokalne (globalne) o wartości $f(0,0) = 0$.

Zadanie 1.14. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = \ln(xy) + 2x^2 - 2y^2 + 3$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$, czyli I i III ćwiartka układu współrzędnych (bez osi). Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} + 4x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} - 4y.$$

Dziedzina pierwszych pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+4x=0 \\ \frac{1}{y}-4y \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2=-1 \\ 4y^2=1 \end{cases}$$

Ponieważ pierwsze równanie nie posiada rozwiązań, zatem nie istnieją punkty podejrzane i funkcja nie posiada ekstremów lokalnych.

Odpowiedź: Funkcja nie posiada ekstremów lokalnych.

Zadanie 1.15. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=(x-y^2)\cdot\ln x$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\ln x+1-\frac{y^2}{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y\ln x.$$

Dziedzina pierwszych pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

$$\begin{cases} \ln x+1-\frac{y^2}{x}=0 \\ -2y\ln x=0 \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy dwa przypadki I. $y=0$ lub II. $x=1$.

$$\text{I.}\begin{cases} y=0 \\ \ln x+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{1}{e} \end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases} x=1 \\ 1-y^2=0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \ \vee\ y=-1 \end{cases}$$

Otrzymujemy punkty podejrzane $(\frac{1}{e},0)$, $(1,1)$ i $(1,-1)$. Warunek wystarczajacy istnienia ekstremum w punkcie podejrzanym (x_0,y_0) :

$$W(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}>0.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-2\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{-2y}{x}.$$

W punkcie $(\frac{1}{e},0)$ mamy

$$W(\frac{1}{e},0)=\begin{vmatrix} e & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2e,$$

więc w punkcie $(\frac{1}{e},0)$ funkcja f ma ekstremum lokalne, które wynosi $f(\frac{1}{e},0)=-\frac{1}{e}$ Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{e},0)>0$ zatem jest to minimum lokalne.

W punkcie $(1,1)$ mamy

$$W(1,1)=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-4,$$

więc w punkcie $(1,1)$ funkcja f nie posiada ekstremum.

W punkcie $(1,-1)$ mamy

$$W(1,-1)=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4,$$

więc w punkcie $(1,-1)$ funkcja f również nie posiada ekstremum. .

Odpowiedź: Funkcja f ma w punkcie $(\frac{1}{e},0)$ minimum lokalne o wartości $f(\frac{1}{e},0)=-\frac{1}{e}$.

Zadanie 1.16. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=e^{x-y}(x^2-3y^2)$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}^2$. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{x-y}(x^2-3y^2+2x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{x-y}(-x^2+3y^2-6y).$$

Dziedzina pierwszych pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

$$\begin{cases} e^{x-y}(x^2-3y^2+2x)=0\\ e^{x-y}(-x^2+3y^2-6y)=0\end{cases}$$

Możemy obydwa równania podzielić przez zawsze dodatnie (a zatem w szczególności różne od zera) e^{x-y}.

$$\begin{cases} x^2-3y^2+2x=0\\ -x^2+3y^2-6y=0\end{cases}$$

Dodajemy równania stronami i otrzymujemy układ

$$\begin{cases} 2x-6y=0\\ x^2-3y^2+2x=0\end{cases}\qquad \begin{cases} x=3y\\ y(y+1)=0\end{cases}$$

Otrzymujemy punkty podejrzane $(0,0)$ i $(-3,-1)$.

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=e^{x-y}(x^2-3y^2+4x+2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=e^{x-y}(x^2-3y^2+12y-6),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=e^{x-y}(-x^2+3y^2-2x-6y).$$

W punkcie $(0,0)$ mamy

$$W(0,0)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}=-12<0,$$

więc w punkcie $(0,0)$ funkcja nie posiada ekstremum lokalnego.

W punkcie $(-3,-1)$ mamy

$$W(-3,-1)=\begin{vmatrix}-4e^{-2} & 6e^{-2}\\ 6e^{-2} & -12e^{-2}\end{vmatrix}=12e^{-4}>0,$$

więc w punkcie $(-3,-1)$ funkcja f ma maksimum lokalne o wartości $f(-3,-1)=6e^{-2}$.

Odpowiedź: Funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie $(-3,-1)$ o wartości $f(-3,-1)=6e^{-2}$.

Zadanie 1.17. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = (y+2)^2 + (y-x)^2$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest płaszczyzna $\mathbb{R}^2$. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2(y-x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(2y-x+2).$$

Dziedzina pierwszych pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

$$\begin{cases} y-x=0 \\ 2y-x+2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x \\ x+2=0 \end{cases}$$

Otrzymujemy punkt podejrzany $(-2,-2)$.

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(y-x),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2.$$

W punkcie $(-2,-2)$ mamy

$$W(-2,-2) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

więc funkcja f nie posiada ekstremów lokalnych.

Odpowiedź: Funkcja f nie posiada ekstremów lokalnych.

Zadanie 1.18. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 12xy$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest płaszczyzna $\mathbb{R}^2$. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 12y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy + 12x.$$

Dziedzina pierwszych pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2+12y=0 \\ 6xy+12x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2+4y=0 \\ x(y+2)=0 \end{cases}$$

Z drugiego równania I. $x=0$ lub II. $y=-2$.

$$\text{I.} \begin{cases} x=0 \\ y(y+4)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \ \vee \ y=-4 \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} y=-2 \\ x^2=4 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=2 \ \vee \ x=-2 \end{cases}$$

Otrzymujemy cztery punkty podejrzane: $(0,0)$, $(0,-4)$, $(2,-2)$ i $(-2,-2)$.

Warunek wystarczajacy istnienia ekstremum w punkcie podejrzanym (x_0, y_0) :

$$W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6y + 12.$$

W punkcie $(0, 0)$ mamy

$$W(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0,$$

więc w punkcie $(0, 0)$ funkcja f nie posiada ekstremum.

W punkcie $(0, -4)$ mamy

$$W(0, -4) = \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0,$$

więc w punkcie $(0, -4)$ funkcja f również nie ma ekstremum.

W punkcie $(2, -2)$ mamy

$$W(2, -2) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 144,$$

więc w punkcie $(2, -2)$ funkcja f ma ekstremum lokalne, które wynosi $f(2, -2) = -16$. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, -2) > 0$ zatem jest to minimum lokalne.

W punkcie $(2, 2)$ mamy

$$W(2, 2) = \begin{vmatrix} 12 & 24 \\ 24 & 12 \end{vmatrix} = -432 < 0,$$

więc w punkcie $(2, 2)$ funkcja f nie posiada ekstremum.

Odpowiedź: Funkcja f ma minimum lokalne w punkcie $(2, -2)$ o wartości $f(2, -2) = -16$.

Zadanie 1.19. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0\}$, czyli prawa półpłaszczyzna wraz z osią OY. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x} - 2y + 6.$$

Zauważmy, że oś OY, która należy do dziedziny funkcji, nie należy do dziedziny pochodnej $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, a zatem każdy punkt postaci $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$ jest punktem podejrzanym o istnienie ekstremum. Ponieważ funkcja nie jest różniczkowalna w tym punkcie, zatem istnienie ekstremum będziemy badać inną metodą. Dla pozostałych punktów sprawdzamy warunek konieczny $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

$$\begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \sqrt{x} - 2y + 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ y = 4 \end{cases}$$

Otrzymujemy kolejny punkt podejrzany $(4, 4)$.

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{y}{4x\sqrt{x}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

W punkcie $(4,4)$ mamy

$$W() = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -2 \end{vmatrix} = \frac{3}{16} > 0,$$

więc w punkcie $(4,4)$ funkcja f ma ekstremum lokalne, które wynosi $f(4,4) = 12$. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,4) < 0$ zatem jest to maksimum lokalne.

Badamy punkty postaci $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Na osi OY funkcja przyjmuje postać $f(y) = -y^2 + 6y$. Obliczamy pochodną $f'(y) = -2y + 6$. Pochodna zmienia znak z dodatniej na ujemną w punkcie $y = 3$, czyli $f(y)$ ma tam maksimum jako funkcja jednej zmiennej. Punkt $(0,3)$ jest zatem jedynym punktem na osi OY podejrzanym o istnienie ekstremum dla funkcji $f(x,y)$ i musiałoby to być maksimum. Obliczamy wartość $f(0,3) = 9$. Zauważmy, że dla punktów postaci $(\frac{1}{n}, 3)$ mamy $f(\frac{1}{n}, 3) = 9 + \frac{3n - \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} > 9$ dla $n > 1$, a zatem funkcja f nie może mieć w punkcie $(0,3)$ maksimum lokalnego, czyli nie ma w tym punkcie żadnego ekstremum.

Odpowiedź: Funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie $(4,4)$ o wartości $f(4,4) = 12$.

Zadanie 1.20. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - 2y^2 - xy + 6y$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest płaszczyzna $\mathbb{R}^2$. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x - y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2 - 4y - x + 6.$$

Dziedzina pierwszych pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 - 4y - x + 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem równania kwadratowego jest $x = 2$ lub $x = 3$, a zatem otrzymujemy dwa punkty podejrzane: $(2,2)$ i $(3,3)$.

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2y - 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -1.$$

W punkcie $(2,2)$ mamy

$$W(2,2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

więc w punkcie $(2,2)$ funkcja nie posiada ekstremum.

W punkcie $(3,3)$ mamy

$$W(3,3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

więc w punkcie $(3,3)$ funkcja f ma ekstremum lokalne, które wynosi $f(3,3) = -\frac{3}{2}$. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,3) > 0$ zatem jest to minimum lokalne.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga minimum lokalne w punkcie $(3,3)$, o wartości $f(3,3) = -\frac{3}{2}$.

Zadanie 1.21. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$ dla $(x,y) \in (0, \dfrac{\pi}{2}) \times (0, \dfrac{\pi}{2})$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$, ale zgodnie z treścią zadania zawężamy ją do zbioru $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x - \sin(x-y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin y + \sin(x-y).$$

Dziedzina pierwszych pochodnych cząstkowych jest równa dziedzinie funkcji. Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

$$\begin{cases} \cos x - \sin(x-y) = 0 \\ -\sin y + \sin(x-y) = 0 \end{cases}$$

Dodając równania stronami otrzymujemy

$$\begin{cases} \cos x = \sin y \\ \cos x - \sin(x-y) = 0 \end{cases}$$

Z własności funkcji trygonometrycznych wiemy, że $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ oraz $\sin y = \sin(x + \frac{pi}{2})$ wtedy, gdy $y = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $y = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Uwzględniając ograniczenie $(x,y) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$ otrzymujemy $y = \frac{\pi}{2} - x$.

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{2} - x \\ \cos x = \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = -\cos(2x) \end{cases}$$

Korzystając ze wzoru $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ z ostatniego równania otrzymujemy równanie $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. Podstawiamy $t = \cos x$ i otrzymujemy rozwiązania $t = -1$ lub $t = \frac{1}{2}$. W pierwszym przypadku równanie $\cos x = -1$ nie posiada rozwiązań w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$, a z drugiego przypadku $\cos x = \frac{1}{2}$ otrzymujemy $x = \frac{\pi}{3}$, skąd $y = \frac{\pi}{6}$.

Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin x - \cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos y - cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(x-y).$$

W punkcie $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ mamy

$$W(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{9}{4} > 0,$$

więc w punkcie $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ funkcja f ma ekstremum lokalne, które wynosi $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) < 0$ zatem jest to maksimum lokalne.

Odpowiedź: Funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ o wartości $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. Całka oznaczona i całki wielokrotne

2.1. **Całka oznaczona - zadania podstawowe.**

Zadanie 2.1. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$.

Rozwiązanie.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-\cos\tfrac{\pi}{2}) - (-\cos 0) = 1.$$

Zadanie 2.2. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_0^{\ln 3} 3xe^{-x}\, dx$.

Rozwiązanie.

$$\int\limits_0^{\ln 3} 3xe^{-x}\, dx = [3x(-e^{-x})]_0^{\ln 3} - \int\limits_0^{\ln 3} 3(-e^{-x})\, dx = -\ln 3 - \int\limits_0^{\ln 3} -3e^{-x}\, dx =$$

$$[-\ln 3 - 3e^{-x}]_0^{\ln 3} = -\ln 3 + 2$$

Zadanie 2.3. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$.

Rozwiązanie.

$$\int\limits_0^9 \tfrac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx = \left| \begin{array}{c} t = 1+\sqrt{x} \\ 2(t-1)dt = dx \end{array} \right| = 2\int\limits_1^4 \tfrac{1}{t}(t-1)\, dt = 2\int\limits_1^4 1 - \tfrac{1}{t}\, dt = [2(t - \ln|t|)]_1^4 =$$

$$(2(4-\ln 4)) - (2(1-\ln 1)) = 6 - 2\ln 4.$$

Zadanie 2.4. Obliczyć całkę $\int\limits_0^{\ln 5} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Rozwiązanie.

$$\int\limits_0^{\ln 5} \sqrt{e^x-1}\, dx = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{e^x-1} \\ \frac{2t}{t^2+1}dt = dx \end{array} \right| = \int\limits_0^2 \frac{2t^2}{t^2+1} dt = \int\limits_0^2 2\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$[2t - 2\,\mathrm{arc\,tg}\, t]_0^2 = 4 - 2\,\mathrm{arc\,tg}\, 2.$$

Zadanie 2.5. Zbadać zbieżność całki $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{2x^2+4}$.

Rozwiązanie.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{2x^2+4} = \lim_{\alpha\to\infty}\int_1^\alpha \frac{dx}{2x^2+4} = \left| \begin{array}{c} t = \frac{1}{\sqrt{2}x} \\ \sqrt{2}dt = dx \end{array} \right| = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg} t\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} = \lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Zadanie 2.6. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Rozwiązanie.

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^9 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\alpha\to 0}[2x^{\frac{1}{2}}]_\alpha^9 = \lim_{\alpha\to 0}(6 - 2\alpha^{\frac{1}{2}}) = 6.$$

Zadanie 2.7. Obliczyć całkę $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{\alpha\to\infty}\int_1^{\alpha+1}\frac{dx}{t^2+1} =$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}[\operatorname{arc\,tg} x]_1^{\alpha+1} = \lim_{\alpha\to\infty}(\operatorname{arc\,tg}(\alpha+1) - \operatorname{arc\,tg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

2.2. **Pole między krzywymi.**

Zadanie 2.8. Obliczyć pole ograniczone krzywymi $y = x^2$, $y = x$.

Rozwiązanie.

$$\int_0^1 x - x^2 dx = [\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}.$$

Zadanie 2.9. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu $y = \frac{1}{1+x^2}$ oraz osią OX.

Rozwiązanie.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{\beta\to\infty\\ \alpha\to-\infty}}\int_\alpha^\beta \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{\beta\to\infty\\ \alpha\to-\infty}}[\operatorname{arc\,tg} x]_\alpha^\beta = \lim_{\substack{\beta\to\infty\\ \alpha\to-\infty}}(\operatorname{arc\,tg}\beta - \operatorname{arc\,tg}\alpha) = \tfrac{\pi}{2} - (-\tfrac{\pi}{2}) = \pi.$$

Zadanie 2.10. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$, oraz osią OX.

Rozwiązanie.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arc\,tg} x]_{-1}^1 = \operatorname{arc\,tg}(1) - \operatorname{arc\,tg}(-1) = \tfrac{\pi}{4} - (-\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\pi}{2}.$$

Zadanie 2.11. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$, oraz osią OX.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $a > 0$.

$$\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = \frac{x}{a} \\ adt = dx \end{array} \right| = ab\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}dt =$$

$$= ab\Big[\tfrac{t}{2}\sqrt{1 - t^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin t\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}ab\arcsin 1 = \tfrac{\pi}{4}ab.$$

Zadanie 2.12. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = x^3 + x^2 - 2x$, $x \in [-2, 2]$, oraz osią OX.

Rozwiązanie.

$$\int_{-2}^{2} x^3 + x^2 - 2x \, dx = [\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - x^2]_{-2}^{2} = \tfrac{16}{3}.$$

Zadanie 2.13. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = x\sqrt{1 - x^2}$ oraz osią OX.

Rozwiązanie. Szukane pole to podwojone pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = x\sqrt{1 - x^2}$ oraz osią OX w przedziale $[0, 1]$, wynosi ono:

$$2\int_{0}^{1} x\sqrt{1 - x^2} \, dx = \left| \begin{array}{c} t = 1 - x^2 \\ -\frac{1}{2}dt = xdx \end{array} \right| = 2\int_{1-0^2}^{1-1^2} (-\tfrac{1}{2})t^{\frac{1}{2}} dt = -\int_{1}^{0} t^{\frac{1}{2}} dt = \int_{0}^{1} t^{\frac{1}{2}} dt = \left[\tfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}.$$

Zadanie 2.14. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \sin^3 x$, $y = \cos^3 x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Rozwiązanie.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x - \sin^3 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x(1 - \sin^2 x) - \sin x(1 - \cos^2 x) \, dx =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x - \cos x \sin^2 x + \sin x \cos^2 x \, dx = \left[\sin x + \cos x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \tfrac{5}{6}\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}.$$

Zadanie 2.15. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \frac{1}{1+x^4}$, $x \in [0, \infty)$, oraz osią OX.

Rozwiązanie.

$$\int_{0}^{\infty} \tfrac{1}{1+x^4} \, dx = \lim_{\alpha \to \infty} \left[\tfrac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\ln \tfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + 2\,\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{2}x + 1) + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,(\sqrt{2}x - 1)\Big)\right]_0^{\alpha} = \tfrac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

$$=$$

Zadanie 2.16. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = x \ln x$, $x \in (0, 1]$ i osią OX.

Rozwiązanie. Wykres funkcji znajduje się poniżej osi OX, zatem szukane pole wynosi

$$-\int_{0}^{1} x \ln x \, dx = -\lim_{\alpha \to 0}[\tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2]_{\alpha}^{1} = \tfrac{1}{4} = -\lim_{\alpha \to 0}[(\tfrac{1}{2}\ln 1 - \tfrac{1}{4}) - (\tfrac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha - \tfrac{1}{4}\alpha^2)] = \tfrac{1}{4}.$$

Zadanie 2.17. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą $y = 2x - x^2$ i prostą $y = -x$, $x \in [-1, 0]$.

Rozwiązanie.

$$\int_{-1}^{0} -x - (2x - x^2) \, dx = \int_{-1}^{0} x^2 - 3x \, dx = [\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} = \tfrac{11}{6}.$$

Zadanie 2.18. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach $y = 2x^3$, $y^2 = 4x$.

Rozwiązanie. Obszar opisany w zadaniu, jest ograniczony krzywymi o równaniach $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}y^{\frac{1}{3}}$, $x = \frac{1}{4}y^2$ gdzie $y \in [0, 2]$. Jego pole wynosi

$$\int_{0}^{2} \tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}y^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{4}y^2 \, dy = [\tfrac{3}{4\sqrt[3]{2}}y^{\frac{4}{3}} - \tfrac{1}{12}y^3]_0^2 = \tfrac{5}{6}.$$

Zadanie 2.19. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$, $2x - y + 3 = 0$.

Rozwiązanie.

$$\int_{-1}^{3} 2x + 3 - x^2\, dx = [x^2 + 3x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-1}^{3} = \tfrac{32}{3}.$$

Zadanie 2.20. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \ln x$ i $y = \ln^2 x$.

Rozwiązanie.

$$\int\limits_{1}^{e} \ln x - \ln^2 x\, dx = [3x \ln x - 3x - x \ln^2 x]_1^e = 3 - e.$$

Zadanie 2.21. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^3$ i $y = x^5$.

Rozwiązanie.

$$\int\limits_{0}^{1} x^3 - x^5\, dx = [\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{6}x^6]_0^1 = \tfrac{1}{12}.$$

Zadanie 2.22. Obliczyć pole obszaru zawartego między krzywymi $y = \frac{1}{x^2+2x+10}$ i $y = 0$.

Rozwiązanie.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 10}\, dx = \lim_{\substack{\beta\to\infty\\ \alpha\to-\infty}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2 + 2x + 10}\, dx = \lim_{\substack{\beta\to\infty\\ \alpha\to-\infty}} [\tfrac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \tfrac{x+1}{3}]_\alpha^\beta =$$

$$= \lim_{\substack{\beta\to\infty\\ \alpha\to-\infty}} (\tfrac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \tfrac{\beta+1}{3} - \tfrac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \tfrac{\alpha+1}{3}) = \tfrac{\pi}{6} - (-\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\pi}{3}.$$

Zadanie 2.23. Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami $y = \frac{1}{x^2+4x+8}$, $y = 0$, dla $x \in [0, 1]$.

Rozwiązanie.

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2 + 4x + 8}\, dx = [\tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \tfrac{x+2}{2}]_0^1 = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \tfrac{3}{2} - \tfrac{\pi}{8}.$$

Zadanie 2.24. Obliczyć pole obszaru ograniczonego linią $y = \frac{1}{x^2+4x+5}$ oraz jej asymptotą, dla $x \in [0, 1]$.

Rozwiązanie. Asyptota wykresu funkcji $y = \frac{1}{x^2+4x+5}$ dla $x \to \pm\infty$ to prosta $y = 0$. Szukane pole wynosi:

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\, dx = [\operatorname{arc\,tg}(x + 2)]_0^1 = \operatorname{arc\,tg} 3 - \operatorname{arc\,tg} 2.$$

Zadanie 2.25. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu parametrycznym

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{1}{3}t^3 \end{cases},\ t \in [0, \sqrt{3}].$$

Rozwiązanie. Niech funkcja $x = g(t)$ będzie rosnąca i ma w przedziale $[a, b]$ pochodną ciągłą. Pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej zadanej w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases},\ t \in [a, b],$$

odcinkiem osi OX oraz dwiema prostymi $x = g(a)$, $x = g(b)$, wyraża się wzorem

$$\int\limits_{a}^{b} |f(t)| g'(t)\, dt.$$

Zatem pole szukane w zadaniu wynosi:

$$\int_0^{\sqrt{3}} 2t(t-\tfrac{1}{3}t^3)\,dt = \int_0^{\sqrt{3}} 2t^2-\tfrac{2}{3}t^4\,dt = [\tfrac{2}{3}t^3-\tfrac{2}{15}t^5]_0^{\sqrt{3}} = \tfrac{4\sqrt{3}}{5}.$$

Zadanie 2.26. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą

$$\begin{cases} x(t)=2r\sin^2 t \\ y(t)=2r\sin^2 t\operatorname{tg} t \end{cases},\ t\in[\tfrac{\pi}{12},\tfrac{\pi}{6}],\ r>0,$$

oraz odcinkiem osi OX.

Rozwiązanie.

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} 2r\sin^2 t\operatorname{tg} t(2r\sin^2 t)'\,dt = 8r^2\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 t\,dt =$$
$$= 8r^2\Big[\tfrac{1}{32}(12t-8\sin 2t+\sin 4t)\Big]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} =$$
$$= \tfrac{r^2}{4}(\pi-8(\sin\tfrac{\pi}{3}-\sin\tfrac{\pi}{6})+(\sin\tfrac{2\pi}{3}-\sin\tfrac{\pi}{3})) =$$
$$= r^2(\tfrac{1}{4}\pi+1-\sqrt{3}).$$

Zadanie 2.27. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą

$$\begin{cases} x(t)=3r\cos^2 t \\ y(t)=3r\cos^2 t\operatorname{ctg} t \end{cases},\ t\in[\tfrac{\pi}{12},\tfrac{\pi}{6}],\ r>0,$$

oraz odcinkiem osi OX.

Rozwiązanie. Niech funkcja $x=g(t)$ będzie malejąca i ma w przedziale $[a,b]$ pochodną ciągłą. Pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej zadanej w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases},\ t\in[a,b],$$

odcinkiem osi OX oraz dwiema prostymi $x=g(a)$, $x=g(b)$, wyraża się wzorem

$$-\int_a^b |f(t)|g'(t)\,dt.$$

Zatem pole szukane w zadaniu wynosi:

$$-\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} 3r\cos^2 t\operatorname{ctg} t(3r\cos^2 t)'\,dt = 18r^2\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 t\,dt =$$
$$= 18r^2\Big[\tfrac{1}{32}(12t+8\sin 2t+\sin 4t)\Big]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = r^2(\tfrac{9}{16}\pi+\tfrac{9}{4}(\sqrt{3}-1)).$$

Zadanie 2.28. Obliczyć pola powierzchni ograniczonych krzywymi

$$y=\cos(x),\ y=\sin(x),\ x=-\tfrac{\pi}{4},\ x=\tfrac{\pi}{4}.$$

Rozwiązanie.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x-\sin x\,dx = \Big[\sin x+\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

Zadanie 2.29. Obliczyć pola powierzchni ograniczonych krzywymi

$$xy=1,\ y=x,\ y=2x\ (x,y>0).$$

Rozwiązanie.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x - x\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \tfrac{1}{x} - x\,dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\ln|x| - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \ln\sqrt{2}.$$

Zadanie 2.30. Obliczyć pola powierzchni ograniczonych krzywymi $y = \sqrt{|x|},\ y = x^2$.

Rozwiązanie. Szukane pole wynosi

$$2\int_0^1 \sqrt{x} - x^2\,dx = 2[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \tfrac{2}{3}.$$

Zadanie 2.31. Obliczyć pola powierzchni ograniczonych krzywymi

$$x^2 + (y-2)^2 = 4,\ y = x\ (y \leqslant x).$$

Rozwiązanie. Szukane pole to pole obszaru ograniczonego krzywymi

$$y = 2 - \sqrt{4-x^2},\ y = x$$

w przedziale $[0,2]$. Zatem wynosi ono

$$\int_0^2 x - (2 - \sqrt{4-x^2})\,dx = \int_0^2 x - 2 + \sqrt{4-x^2}\,dx =$$

$$= [\tfrac{1}{2}x^2 - 2x + \tfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}x + 2\arcsin\tfrac{x}{2}]_0^2 = \pi - 2.$$

2.3. **Całka potrójna.**

Zadanie 2.32. Obliczyć objętość bryły

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 \leqslant z^2,\ 9 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25\}.$$

Rozwiązanie. W przypadku, gdy bryła, której objętość mamy policzyć jest ograniczona sferą (sferami) o środku w (a,b,c) i stożkiem (stożkami) o wierzchołku w środku sfery (ważne!), to najszybszą metodą rozwiązania zadania jest translacja o wektor $[-a,-b,-c]$ (przesunięcie środka sfery do punktu $(0,0,0)$) i zastosowanie współrzędnych sferycznych.

Ponieważ bryła z zadania jest symetryczna względem płaszczyzny OXOY, policzymy objętość jej połowy V_1 (dla $z \geqslant 0$) i wynik pomnożymy przez dwa:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 \leqslant z^2,\ 9 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25,\ z \geqslant 0\}.$$

Aby przedstawić V_1 we współrzędnych sferycznych musimy obliczyć kąt nachylenia tworzącej stożka (tzn. prostej, która obrócona wokół OZ tworzy stożek) do płaszczyzny OXOY. W płaszczyźnie OXOZ (czyli dla $y = 0$) tworząca ma równanie $z = \sqrt{3}x$. Współczynnik kierunkowy prostej jest tangensem kąta nachylenia do osi argumentów (czyli do OX), zatem ten kąt to $\frac{\pi}{3}$ (tabelka wartości funkcji trygonometrycznych dla podstawowych kątów). Możemy teraz wprowadzić współrzędne sferyczne:

$$V_1 = \{(r,\alpha,\varphi):\ 3 \leqslant r \leqslant 5,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi,\ \frac{\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\}.$$

Zamieniamy całkę na iterowaną (pamiętając o jakobianie zmiany zmiennych) i otrzymujemy:

$$\iiint_{V_1} d\lambda = \int_3^5 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\varphi\,d\varphi\right) d\alpha\right) dr = \frac{98\pi(2-\sqrt{3})}{3}.$$

Objętość całej bryły to $\dfrac{196\pi(2-\sqrt{3})}{3}$.

Zadanie 2.33. Obliczyć objętość bryły
$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\ x^2+y^2\leqslant 3z^2\leqslant 9x^2+9y^2\}.$$

Rozwiązanie.
$$\lambda(V)=2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} r^2\cos\varphi\,d\varphi\right)dr\right)d\alpha=\frac{4\pi(\sqrt{3}-1)}{3}.$$

Zadanie 2.34. Obliczyć objętość bryły $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2+y^2}\}$.

Rozwiązanie. To zadanie jest dość nietypowe, gdyż możemy je rozwiązać zupełnie bez rysunku (a nawet powinniśmy, gdyż w warunkach egzaminu czy kolokwium ciężko jest naszkicować powierzchnię $z=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2+y^2}$). Zauważmy, że bryła V jest domknięciem obszaru
$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y>0,\ x^2+y^2<1,\ 0<z<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2+y^2}\}$$
(jedyne, co się zmieniło, to nierówności - ze słabych na mocne[1]), który jest normalny względem płaszczyzny OXOY:
$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x,y)\in D,\ 0<z<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2+y^2}\},$$
gdzie D jest górną połową koła o środku w $(0,0)$ i promieniu $r=1$ (czyli, we współrzędnych biegunowych, $D=\{(r,\alpha):\ 0<r<1,\ 0<\alpha<\pi\}$). Korzystając wprost z twierdzenia o zamiane całki potrójnej na iterowaną otrzymujemy:
$$\iiint_V d\lambda=\iint_D \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2+y^2}d\lambda=\int_0^1\left(\int_0^\pi r\operatorname{arc\,tg} r d\alpha\right)dr=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}.$$
(Podpowiedź: całkę $\int r\operatorname{arc\,tg} r dr$ liczyć metodą „przez części" tak, aby z $\operatorname{arc\,tg} r$ liczyć pochodną.)

Zadanie 2.35. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach $x^2+y^2+z^2=2z$ i $x^2+y^2=z^2$.

Rozwiązanie. Podane powierzchnie ograniczają dwie bryły:
$$V_1=\{(x,y,z): x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1,\ z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\}$$
$$V_2=\{(x,y,z): x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1,\ z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\}.$$
Objętość drugiej bryły to objętość kuli o promieniu $r=1$ pomniejszona o objętość bryły V_1 (i odwrotnie), a zatem wystarczy obliczyć np. objętość V_1.

Metoda I: bryła V_1 to stożek o podstawie o promieniu $r=1$ z doklejoną do podstawy połową kuli o tym samym promieniu, czyli objętość V_1 to π. Zatem objętość V_2 to $\frac{1}{3}\pi$.

Metoda II: we współrzędnych sferycznych $V_1=\{(r,\alpha,\varphi): 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi,\ \frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 2\sin\varphi\}$. Obliczamy objętość
$$\iiint_{V_1} d\lambda=\int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\sin\varphi} r^2\cos\varphi dr\right)d\varphi\right)d\alpha=\pi.$$
Objętość V_2 to $\frac{1}{3}\pi$ (można też przedstawić V_2 we współrzędnych sferycznych $V_2=\{(r,\alpha,\varphi): 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant 2\sin\varphi\}$ i obliczyć objętość kolejną całką potrójną).

[1] Zmiana typów nierówności jest tylko po to, żeby nowe V było było obszarem - obszar to zbiór otwarty i spójny, a stare V nie było otwarte. Jest to czysto „kosmetyczna" zmiana, która nie ma wpływu na wynik.

3. Całka powierzchniowa i krzywoliniowa

3.1. Całka krzywoliniowa nieskierowana.

Zadanie 3.1. Obliczyć współrzędne środka ciężkości[2] jednorodnego łuku linii łańcuchowej $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, gdzie $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Rozwiązanie. Współrzędne (x_0, y_0) środka ciężkości linii wyrażają się wzorem $x_0 = \frac{M_y}{M}$, $y_0 = \frac{M_x}{M}$, gdzie M jest masą krzywej a M_x, M_y to momenty statyczne względem osi OX i OY, odpowiednio. Jeżeli $\rho(x, y)$ jest gęstością krzywej, to mamy następujące wzory:

$$M = \int_L \rho(x, y)ds$$
$$M_x = \int_L y\rho(x, y)ds$$
$$M_y = \int_L x\rho(x, y)ds$$

Krzywa z zadania jest jednorodna, a zatem $\rho(x, y) = 1$ w każdym punkcie krzywej. Parametryzacja dana jest wprost w nastepujący sposób:

$$L : \begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= \frac{e^t+e^{-t}}{2} \end{cases},\ t \in [-1, 1].$$

Obliczamy masę:

$$M = \int_L ds = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^t + e^{-t} dt = e - e^{-1}$$

oraz momenty statyczne:

$$M_y = \int_L x ds = \int_{-1}^{1} t\sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^t + te^{-t} dt = 0$$

$$M_x = \int_L y ds = \int_{-1}^{1} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} dt =$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(e^t + e^{-t}\right)^2 dt = \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2}) + 1$$

Odpowiedź: Współrzędne środka ciężkości to $x_0 = 0$, $y_0 = \dfrac{e^2 - e^{-2} + 4}{4e - 4e^{-1}}$.

Zadanie 3.2. Obliczyć współrzędne środka ciężkości tej części jednorodnego okręgu $x^2+y^2 = 4$, która jest położona powyżej prostej $y = x$.

Rozwiązanie. Parametryzujemy krzywą z zadania, stosując współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} x(t) &= 2\cos t \\ y(t) &= 2\sin t \end{cases},\ t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}].$$

[2] Uwaga: środkiem ciężkości krzywej płaskiej, tzn. leżącej na płaszczyźnie (np. na OXY) jest taki punkt, w którym należy podeprzeć całą płaszczyznę, aby obciążona naszą krzywą zachowała równowagę (nie jest to formalna definicja, więc proszę tego nie powtarzać na mechanice czy fizyce). W efekcie środek ciężkości krzywej znajduje się najczęściej gdzieś poza krzywą.

Stosując wzory podane w poprzednim zadaniu otrzymujemy:

$$M = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} dt = 2\pi$$

$$M_y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 2\cos t \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} dt = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos t dt = -4\sqrt{2}$$

$$M_x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 2\sin t \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} dt = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t dt = 4\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: Współrzędne środka ciężkości to $x_0 = \frac{-2\sqrt{2}}{\pi}$, $y_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

3.2. **Całka powierzchniowa niezorientowana.**

Zadanie 3.3. Obliczyć masę, moment statyczny M_{xy} oraz moment bezwładności względem osi OZ górnej półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, jeżeli powierzchniowa gęstość masy w każdym punkcie równa jest kwadratowi odległości tego punktu od wertykalnej średnicy sfery.

Rozwiązanie. Wertykalną (czyli pionową) średnicą sfery jest oś OZ. Odległość dowolnego punktu (x, y, z) w przestrzeni od osi OZ to odległość rzutu tego punktu na płaszczyznę OXY (czyli punktu (x, y)) od początku układu współrzędnych. Zatem gęstość wyraża się wzorem $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Obliczamy masę[3]:

$$M = \iint_S x^2 + y^2 ds =$$

$$= \int_{K((0,0),R)} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} d\lambda =$$

$$= R\int_{K((0,0),R)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d\lambda = R\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} d\alpha\right) dr =$$

$$= 2\pi R\int_0^R = 2\pi R\left(\frac{1}{3}(r^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - R^2\sqrt{R^2 - r^2}\right)_0^R = \frac{4}{3}\pi R^4,$$

moment statyczny:

$$M_{xy} = \iint_S z(x^2 + y^2) ds =$$

$$= \int_{K((0,0),R)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}(x^2 + y^2)\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} d\lambda =$$

$$= R\int_{K((0,0),R)} x^2 + y^2 d\lambda = R\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r^3 d\alpha\right) dr = \frac{\pi R^5}{2}$$

oraz moment bezwładności[4]:

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) ds = \iint_S (x^2 + y^2)^2 ds =$$

$$= R\int_{K((0,0),R)} \frac{(x^2 + y^2)^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d\lambda = 2\pi R\int_0^R \frac{r^5}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr =$$

$$= 2\pi R\left(-R^4\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{2}{3}R^2(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(R^2 - r^2)^{\frac{5}{2}}\right)_0^R = \frac{16}{15}\pi R^6.$$

---

[3] Aby obliczyć ostatnią całkę zastosować podstawienie $t = \sqrt{R^2 - r^2}$.

[4] W ostatniej całce to samo podstawienie, co poprzednio: $t = \sqrt{R^2 - r^2}$.

4. Równania różniczkowe

4.1. **Równania różniczkowe zwyczajne II rzędu.**

Zadanie 4.1. Rozwiązać równanie $y'' + y' = x^2 - e^{-x}$,

Rozwiązanie. Krok I. Równanie jednorodne ma postać $y'' + y' = 0$. Układamy i rozwiązujemy równanie charakterystyk

$$r^2 + r = 0$$

$$r_1 = 0,\ r_2 = -1,$$

zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci $y = C_1 + C_2 e^{-x}$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Krok II. Ponieważ $p(x) = x^2 - e^{-x}$ jest sumą funkcji dwóch różnych typów, rozwiązanie szczególne wyjściowego równania niejednorodnego będzie sumą rozwiązań szczególnych równań $y'' + y' = x^2$ i $y'' + y' = -e^{-x}$.

Dla $y'' + y' = x^2$ standardowo przewidywalibyśmy rozwiązanie szczególne postaci $y_1 = Ax^2 + Bx + C$, lecz doprowadziło by to do sprzeczności, gdyż jedno z rozwiązań równania charakterystyk, $r_1 = 0$, jest miejscem zerowym wielomianu $p(x)$ po prawej stronie. Przewidujemy zatem $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. Obliczamy

$$y_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_1'' = 6Ax + 2B$$

wstawiamy do równania $y'' + y' = x^2$ i otrzymujemy

$$3Ax^2 + (2B + 6A)x + 2B + C = x^2,$$

skąd $A = \frac{1}{3}$, $B = -1$, $C = 2$. Zatem $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$.

Dla $y'' + y' = -e^{-x}$ standardowo przewidywalibyśmy $y_2 = Ae^{-x}$, lecz ponieważ w funkcji po prawej stronie występuje $e^{(-1)\cdot x}$ a $-1 = r_2$ jest jednym z rozwiązań równania charakterystyk, przewidujemy $y_2 = Axe^{-x}$. Obliczamy

$$y_2' = Ae^{-x} - Axe^{-x}, \quad y_2'' = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$$

wstawiamy do równania $y'' + y' = -e^{-x}$ i otrzymujemy $-Ae^{-x} = -e^{-x}$ skąd $A = 1$. Zatem $y_2 = xe^{-x}$. Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego $y'' + y' = x^2 - e^{-x}$ jest sumą $y_0 = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + xe^{-x}$.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego ($y = C_1 + C_2 e^{-x}$) i rozwiązania szczególnego y_0.

Odpowiedź: Rozwiązaniem ogólnym równania jest $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + xe^{-x}$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.2. Rozwiązać równanie $y'' + y = \sin x$,

Rozwiązanie. Krok I. Równanie jednorodne ma postać $y'' + y = 0$. Układamy i rozwiązujemy równanie charakterystyk

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r_1 = i,\ r_2 = -i,$$

zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Krok II. Funkcja po prawej stronie równania niejednorodnego, $p(x) = \sin x$, jest postaci $p(x) = A \sin x + B \cos x$ i standardowo przewidywalibyśmy rozwiązanie szczególne wyjściowego równania niejednorodnego jako $y_0 = A \sin x + B \cos x$. Jednak ponieważ rozwiązanie równania jednorodnego jest identycznej postaci ($y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$), aby uniknąć sprzeczności przewidujemy $y_0 = Ax \sin x + Bx \cos x$. Obliczamy

$$y_0' = A \sin x + Ax \cos x + B \cos x - Bx \sin x$$

$$y_0'' = 2A\cos x - Ax\sin x - 2B\sin x - Bx\cos x.$$

Wstawiamy do naszego równania i otrzymujemy

$$2A\cos x - 2B\sin x = \sin x,$$

skąd $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$. Zatem $y_0 = -\frac{1}{2}x\cos x$.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego ($y = C_1\cos x + C_2\sin x$) i rozwiązania szczególnego y_0.

Odpowiedź: Rozwiązaniem ogólnym równania jest $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.3. Rozwiązać równanie $y'' - 4y = x^2 + x$,

Rozwiązanie. Krok I. Równanie jednorodne ma postać $y'' - 4y = 0$. Układamy i rozwiązujemy równanie charakterystyk

$$r^2 - 4 = 0$$

$$r_1 = 2,\ r_2 = -2,$$

zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Krok II. Ponieważ $p(x) = x^2 + x$ jest wielomianem drugiego stopnia, przewidujemy rozwiązanie szczególne wyjściowego równania niejednorodnego jako $y_0 = Ax^2 + Bx + C$. Obliczamy:

$$y_0' = 2Ax + B, \quad y_0'' = 2A.$$

Wstawiamy do wyjściowego równania niejednorodnego i otrzymujemy równanie

$$-4Ax^2 - 4Bx - 4C + 2A = x^2 + x,$$

skąd $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$ i $C = -\frac{1}{8}$. Zatem szukane rozwiązanie szczególne to $y_0 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego ($y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$) i rozwiązania szczególnego y_0.

Odpowiedź: Rozwiązaniem ogólnym równania jest $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.4. Rozwiązać równanie $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$,

Rozwiązanie. Krok I. Równanie jednorodne ma postać $y'' - 4y' + 4y = 0$. Układamy i rozwiązujemy równanie charakterystyk

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 2,$$

zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci$y = (C_1x + C_2)e^{2x}$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Krok II. Ponieważ $p(x) = xe^{2x}$ jest funkcją postaci $p(x) = (Ax + B)e^{rx}$, gdzie r jest podwójnym pierwiastkiem równania charakterystyk, przewidujemy rozwiązanie szczególne wyjściowego równania niejednorodnego jako $y_0 = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$ (podwójne podniesienie stopnia wielomianu). Obliczamy:

$$y_0' = (3Ax^2 + 2Bx + 2Ax^3 + 2Bx^2)e^{2x}$$

$$y_0'' = (6Ax + 2B + 12Ax^2 + 8Bx + 4Ax^3 + 4Bx^2)e^{2x}.$$

Po wstawieniu obliczonych pochodnych do wyjściowego równania niejednorodnego otrzymujemy

$$(6Ax + 2B)e^{2x} = xe^{2x},$$

skąd $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$. Szukane rozwiązanie szczególne to $y_0 = \frac{1}{6}x^3e^{2x}$.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego ($y = (C_1x + C_2)e^{2x}$) i rozwiązania szczególnego y_0.

Odpowiedź: Rozwiązaniem ogólnym równania jest $y = (C_1x+C_2)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}$, gdzie C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.5. Rozwiązać równanie $y'' - y' - 2y = \sin 2x$,

Rozwiązanie. Krok I. Równanie jednorodne ma postać $y'' - y' - 2y = 0$. Układamy i rozwiązujemy równanie charakterystyk

$$r^2 - r - 2 = 0$$
$$r_1 = -1, \; r_2 = 2,$$

zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci $y = C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$, gdzie C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Krok II. Ponieważ $p(x) = \sin(2x)$ jest funkcją postaci $p(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$, przewidujemy rozwiązanie szczególne wyjściowego równania niejednorodnego jako $y_0 = A\sin 2x + B\cos 2x$. Obliczamy:

$$y_0' = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$$
$$y_0'' = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x).$$

Obliczone pochodne wstawiamy do wyjściowego równania niejednorodnego i otrzymujemy

$$(2A + 2B)\sin(2x) - (6B + 2A)\cos(2x) = \sin(2x),$$

skąd $A = \frac{3}{4}$ i $B = -\frac{1}{4}$. Zatem rozwiązanie szczególne to $y_0 = \frac{3}{4}\sin(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x)$.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego ($y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$) i rozwiązania szczególnego y_0.

Odpowiedź: Rozwiązaniem ogólnym równania jest $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \frac{3}{4}\sin(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x)$, gdzie C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.6. Rozwiązać równanie $y'' - 6y' + 13y = 25\sin(2x)$,

Rozwiązanie. Krok I. Równanie jednorodne ma postać $y'' - 6y' + 13y = 0$. Układamy i rozwiązujemy równanie charakterystyk

$$r^2 - 6r + 13 = 0$$
$$\Delta = -16, \text{ zatem } \sqrt{\Delta} = \{-4i, 4i\}$$
$$r_1 = 3 - 2i, \; r_2 = 3 + 2i.$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci$y = e^{3x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))$, gdzie C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Krok II. Ponieważ $p(x) = 25\sin(2x)$ jest funkcją postaci $p(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$, przewidujemy rozwiązanie szczególne wyjściowego równania niejednorodnego jako $y_0 = A\sin(2x) + B\cos(2x)$. Obliczamy:

$$y_0' = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$$
$$y_0'' = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x).$$

Po wstawieniu do wyjściowego równania niejednorodnego otrzymujemy

$$(9A + 12B)\sin(2x) + (9B - 12A)\cos(2x) = 25\sin(2x),$$

skąd $A = 1$ i $B = \frac{4}{3}$. Szukane rozwiązanie szczególne to $y_0 = \sin(2x) + \frac{4}{3}\cos(2x)$.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego ($y = e^{3x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))$) i rozwiązania szczególnego y_0.

Odpowiedź: Rozwiązaniem ogólnym równania jest $y = e^{3x}(C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x))+\sin(2x)+\frac{4}{3}\cos(2x)$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.7. Rozwiązać równanie $y'' - 3y' + 2y = x^2$,

Rozwiązanie. Krok I. Równanie jednorodne ma postać $y'' - 3y' + 2y = 0$. Układamy i rozwiązujemy równanie charakterystyk

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r_1 = 1,\ r_2 = 2,$$

zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci$y = C_1e^x + C_2e^{2x}$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Krok II. Ponieważ $p(x) = x^2$ jest wielomianem drugiego stopnia, przewidujemy rozwiązanie szczególne wyjściowego równania niejednorodnego jako $y_0 = Ax^2 + Bx + C$. Obliczamy:

$$y_0' = 2Ax + B, \quad y_0'' = 2A.$$

Wstawiamy do wyjściowego równania niejednorodnego i otrzymujemy

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2A - 3B + C = x^2,$$

skąd $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$ i $C = \frac{7}{2}$. Szukane rozwiązanie szczególne to $y_0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego ($y = C_1e^x + C_2e^{2x}$) i rozwiązania szczególnego y_0.

Odpowiedź: Rozwiązaniem ogólnym równania jest $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.8. Rozwiązać równanie $y'' + 9y = x^2 + 3$,

Rozwiązanie. Krok I. Równanie jednorodne ma postać $y''+9y = 0$. Układamy i rozwiązujemy równanie charakterystyk

$$r^2 + 9 = 0$$

$$r_1 = -3i,\ r_2 = 3i,$$

zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci$y = C_1\sin(3x)+C_2\cos(3x)$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Krok II. Ponieważ $p(x) = x^2 + 3$ jest wielomianem drugiego stopnia, przewidujemy rozwiązanie szczególne wyjściowego równania niejednorodnego jako $y_0 = Ax^2 + Bx + C$. Obliczamy:

$$y_0' = 2Ax + B, \quad y_0'' = 2A.$$

Wstawiamy do wyjściowego równania niejednorodnego i otrzymujemy

$$9Ax^2 + 9Bx + 9C + 2A = x^2 + 3,$$

skąd $A = \frac{1}{9}$, $B = 0$, $C = \frac{25}{81}$. Zatem rozwiązanie szczególne to $y_0 = \frac{1}{9}x^2 + \frac{25}{81}$.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego ($y = C_1\sin(3x) + C_2\cos(3x)$) i rozwiązania szczególnego y_0.

Odpowiedź: Rozwiązaniem ogólnym równania jest $y = C_1\sin(3x) + C_2\cos(3x) + \frac{1}{9}x^2 + \frac{25}{81}$, gdzie $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.9. Rozwiązać równanie $y'' + 4y = 2\cos(3x)$,

Rozwiązanie. Krok I. Równanie jednorodne ma postać $y''+4y=0$. Układamy i rozwiązujemy równanie charakterystyk

$$r^2+4=0$$
$$r_1=2i,\ r_2=-2i$$

zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci$y=C_1\sin(2x)+C_2\cos(2x)$, gdzie $C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$.

Krok II. Ponieważ $p(x)=2\cos(3x)$ jest funkcją postaci $p(x)=A\sin(3x)+B\cos(3x)$, przewidujemy rozwiązanie szczególne wyjściowego równania niejednorodnego jako $y_0=A\sin(3x)+B\cos(3x)$. Obliczamy:

$$y_0'=3A\cos(3x)-3B\sin(3x)$$
$$y_0''=-9A\sin(3x)-9B\cos(3x).$$

Po wstawieniu do wyjściowego równania niejednorodnego otrzymujemy

$$-5A\sin(3x)-5B\cos(3x)=2\cos(3x),$$

skąd $A=0$ i $B=-\frac{2}{5}$. Szukane rozwiązanie szczególne to $y_0=-\frac{2}{5}\cos(3x)$

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego ($y=C_1\sin(2x)+C_2\cos(2x)$) i rozwiązania szczególnego y_0.

Odpowiedź: Rozwiązaniem ogólnym równania jest $y=C_1\sin(2x)+C_2\cos(2x)-\frac{2}{5}\cos(3x)$, gdzie $C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$.

Zadanie 4.10. Rozwiązać równanie $y''+6y'+9y=9x^2$,

Rozwiązanie. Krok I. Równanie jednorodne ma postać $y''+6y'+9y=0$. Układamy i rozwiązujemy równanie charakterystyk

$$r^2+6r+9=0$$
$$r_1=r_2=-3$$

zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci$y=(C_1x+C_2)e^{3x}$, gdzie $C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$.

Krok II. Ponieważ $p(x)=9x^2$ jest wielomianem stopnia drugiego, przewidujemy rozwiązanie szczególne wyjściowego równania niejednorodnego jako $y_0=Ax^2+Bx+C$. Obliczamy:

$$y_0'=2Ax+B,\ y_0''=2A.$$

Po wstawieniu do wyjściowego równania otrzymujemy

$$9Ax^2+(12A+9B)x+2A+6B+9C=9x^2,$$

skąd $A=1$, $B=-\frac{4}{3}$ i $C=\frac{2}{3}$. Zatem szukane rozwiązanie szczególne to $y_0=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego ($y=(C_1x+C_2)e^{3x}$) i rozwiązania szczególnego y_0.

Odpowiedź: Rozwiązaniem ogólnym równania jest $y=(C_1x+C_2)e^{3x}+x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$, gdzie $C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$.