Indukcja matematyczna, zasada minimum i maksimum

6 marca 2017

Liczby naturalne - Aksjomatyka Peano (bez zera)

Aksjomatyka liczb naturalnych

$\mathbb{N}$ jest nazwą zbioru liczb naturalnych,
1 jest nazwą elementu (jedynki),
$\star : \mathbb{N} \ni n \to n^\star \in \mathbb{N}$ jest funkcją (następnik).

Wzajemne związki między tymi pojęciami ustalają następujące aksjomaty:

A1. 1 należy do $\mathbb{N}$.

A2. Jeżeli n należy do $\mathbb{N}$ to $n^\star$ należy do $\mathbb{N}$.

A3. Jeżeli n należy do $\mathbb{N}$ to $n^\star \neq 1$.

A4. Jeżeli $n, m \in \mathbb{N}$ i $n^\star = m^\star$ to $n = m$.

A5. Jeżeli A jest podzbiorem $\mathbb{N}$ takim, że $1 \in A$ oraz dla dowolnego $n \in A$ także $n^\star \in A$ to $A = \mathbb{N}$.

Zasada Indukcji Matematycznej

Zasada 1

Niech A będzie podzbiorem liczb naturalnych. Jeśli:

baza indukcyjna	Liczba naturalna $n_0 \in A$.
krok indukcyjny	Dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$, jeśli $n \in A$ to $n + 1 \in A$.

Wtedy do zbioru A należą wszystkie liczby naturalne większe lub równe n_0.

Zasada Indukcji Matematycznej

Przykład 2

Udowodnij, że $n^2 \leq 2^n$ dla $n \geq 4$.

Dowód
Niech $A = \{n : n^2 \leq 2^n; n \in \mathbb{N}\}$.

Weźmy $n_0 = 4$, ponieważ $4^2 = 2^4$ zatem $4 \in A$ (baza indukcyjna).

Niech teraz $n \geq 4$,
załóżmy, że $n \in A$, (tzn. $n^2 \leq 2^n$, założenie indukcyjne) wtedy

$$(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

zatem $n + 1 \in A$ (krok indukcyjny).

Na mocy zasady indukcji matematycznej nierównosć $n^2 \leq 2^n$ spełniają wszystkie liczby naturalne $n \geq 4$.

Skorzystaliśmy tu z nierówności $(n+1)^2 \leq 2n^2$, czyli nierówności $(n-1)^2 \geq 2$ prawdziwej dla $n \geq 3$.

Zasada Indukcji Matematycznej

Zasada 3

Niech W będzie własnością dotyczącą liczb naturalnych. Jeśli:

- bi Liczba naturalna n_0 ma własność W.
- ki Dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ zachodzi implikacja jeśli n ma własność W, to $n+1$ też ma własność W.

Wtedy własność W zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych większych lub równych n_0.

Zasada Indukcji Matematycznej

Zasada 4

Niech W będzie własnością dotyczącą liczb naturalnych. Jeśli:

bi Liczba naturalna 1 ma własność W.

ki Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja
jeśli n ma własność W, to $n+1$ też ma własność W.

Wtedy własność W zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych.

Zasada Indukcji Matematycznej

Przykład 5 (Nierówność Bernoulliego)

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > -1$ i dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Dowód
Niech $x > -1$ liczba rzeczywista.
Nierówność $(1+x)^1 \geq 1 + 1x$ zachodzi.
Zakładając, że dla ustalonego $k \geq 1$ mamy $(1+x)^k \geq 1 + kx$ (założenie indukcyjne), pokażemy, że $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$.
Z założenia indukcyjnego mamy

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność Beroulliego jest prawdziwa.

Zasada Indukcji Matematycznej

Przykład 6

Udowodnij, że $m! < (\frac{m}{2})^m$ dla $m \geq 6$.

Dowód
Nierówność $6! < (\frac{6}{2})^6$ jest prawdziwa.
Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla ustalonego $k \geq 6$, tzn

$$k! < (\tfrac{k}{2})^k,$$

wtedy dla $k+1$ mamy z założenia indukcyjnego

$$(k+1)! = k!(k+1) < (\tfrac{k}{2})^k(k+1) < (\tfrac{k+1}{2})^{k+1}.$$

Co kończy dowód indukcyjny.

Skorzystaliśmy tu z nierówności $(\frac{k}{2})^k(k+1) < (\frac{k+1}{2})^{k+1}$, czyli nierówności, $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k > 2$ która wynika z nierówności Bernoulliego.

Zasada Indukcji Matematycznej

Przykład 7

Udowodnij, że $m! > (\frac{m}{3})^m$ dla $m \geq 1$.

Dowód
Nierówność $1! > (\frac{1}{3})^1$ jest prawdziwa.
Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla ustalonego $k \geq 1$, tzn.

$$k! > (\tfrac{k}{3})^k,$$

wtedy dla $k+1$ mamy z założenia indukcyjnego

$$(k+1)! = k!(k+1) > (\tfrac{k}{3})^k(k+1) > (\tfrac{k+1}{3})^{k+1}.$$

Co kończy dowód indukcyjny.

Skorzystaliśmy tu z nierówności $(\frac{k}{3})^k(k+1) > (\frac{k+1}{3})^{k+1}$, czyli nierówności, $3 > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ która wynika ze wzoru dwumianowego Newtona oraz ze znanego faktu z analizy matematycznej $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$:

$$\left(1+\tfrac{1}{k}\right)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{k}\right)^i = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{1}{k^i} < \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} < e < 3.$$

Przykład 8

Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Dowód

1°. Dla $n=1$ suma po lewej stronie równości składa się tylko z jednego składnika $\frac{1}{2}$, zatem teza $T(1)$ jest prawdziwa.

2°. Pokażemy, że jeśli prawdziwa jest równość $T(n)$ (to jest *założenie indukcyjne*)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

to zachodzi także $T(n+1)$ (to jest *teza indukcyjna*)

Rozpiszmy lewą stronę tezy indukcyjnej tak, by było widać, jak skorzystać z założenia.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\overset{\text{zał.}}{=}\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.$$

Stąd na mocy zasady indukcji dana równość jest prawdziwa dla każdego $n\in\mathbb{N}$.

Przykład 9

Udowodnij indukcyjnie, że dla $n \geqslant 2$ prawdziwa jest nierówność

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Dowód

Sprawdzimy najpierw słuszność nierówności $T(2)$. Jej lewa strona jest równa

$$\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}\cdot\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}=0,375,$$

czyli jest większa od $\frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,353$.
Załóżmy teraz, że

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Pokażemy, że

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2i} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}}.$$

Zasada Indukcji Matematycznej

Rozpiszmy lewą stronę tezy. Mamy

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2i} = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}\right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}\right) \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

Ponieważ z założenia mamy

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} > \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

a ułamek $\frac{2n+1}{2(n+1)}$ jest dla naturalnych n dodatni, możemy napisać

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}\right) \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} > \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

Zasada Indukcji Matematycznej

Pozostało nam do sprawdzenia, czy

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n+1}}.$$

Mamy dla naturalnych n

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{4\sqrt{n}(n+1)} = \frac{\sqrt{4n^2+4n+1}}{4\sqrt{n}(n+1)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}}{4\sqrt{n}(n+1)} > \frac{\sqrt{n^2+n}}{2\sqrt{n}(n+1)} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}(n+1)} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}},$$

zatem dana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$.

Przykład 10

(dwumian Newtona) Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, zachodzi równość

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

gdzie $\binom{n}{k}$ dla $k = 0, \ldots, n$ oznacza symbol Newtona, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dowód

Przeprowadzimy indukcję względem n. Tezą $T(n)$ jest równość

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^n.$$

Sprawdzimy prawdziwość $T(1)$. Mamy

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b,$$

Zasada Indukcji Matematycznej

Załóżmy teraz słuszność tezy $T(n)$. Wtedy

$$(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n \overset{\text{zał.}}{=} a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k =$$

$$= \tbinom{n}{0}a^{n+1} + \tbinom{n}{1}a^n b^1 + \ldots + \tbinom{n}{i}a^{n+1-i}b^i + \ldots + \tbinom{n}{n}a^1 b^n +$$

$$+\tbinom{n}{0}a^n b^1 + \ldots + \tbinom{n}{i-1}a^{n+1-i}b^i + \ldots + \tbinom{n}{n-1}a^1 b^n + \tbinom{n}{n}b^{n+1}.$$

Dla $i = 1, \ldots, n$ obliczymy współczynniki stojące przy $a^{n+1-i}b^i$ w powyższej sumie. Mamy

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \frac{n!}{i!(n-i)!} + \frac{n!}{(i-1)!(n-(i-1))!} =$$

$$= \frac{n!(n-i+1)}{i!(n-i+1)!} + \frac{n!i}{i!(n-i+1)!} = \frac{n!(n+1)}{i!(n+1-i)!} = \binom{n+1}{i}$$

oraz $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ i $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Stąd możemy napisać

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k,$$

więc teza $T(n+1)$ jest prawdziwa. Z zasady indukcji wynika słuszność tezy dla dowolnej liczby naturalnej n.

Uwaga 11

Korzystając z udowodnionej powyżej równości

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$$

możemy zbudować tzw. *trójkąt Pascala*, złożony ze współczynników kolejnych rozwinięć dwumianu Newtona

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Każda liczba wewnątrz tego trójkąta jest sumą dwóch sąsiednich liczb z poprzedniego wiersza. Wiersz i-ty zawiera współczynniki występujące we wzorze na $(a+b)^{i-1}$.

Zasada Indukcji Zupełnej

Zasada 12

Niech A będzie podzbiorem liczb naturalnych. Jeśli:

bi Liczba naturalna $n_0 \in A$.

ki Dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ zachodzi implikacja jeśli $\{n_0, n_0 + 1, \ldots, n\} \subseteq A$, to $n + 1 \in A$.

Wtedy do zbioru A należą wszystkie liczby naturalne większe lub równe n_0.

Zasada Minimum

Zasada 13

Każdy niepusty podzbiór A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ ma element najmniejszy.

Przykład 14

Udowodnij, że

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \tag{1}$$

Dowód

Zauważmy, że równość (1) jest spełniona dla $n = 1$, $n = 2$. Załóżmy nie wprost, że rozważana równość nie zachodzi dla wszystkich liczb naturlnych. Zatem zbiór $A = \{n : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) \neq n^2; n \in \mathbb{N}\}$.

byłby niepusty, i zgodnie z Zasadą Minimum miałby najmniejszą liczbę.
Oznaczmy, ją przez a_0, zatem $a_0 > 2$.
Skoro a_0 jest najmniejszym kontrprzykładem dla równości (1) zatem $a_0 - 1 > 1$ spełnia równość (1), czyli:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2(a_0 - 1) - 1) = (a_0 - 1)^2. \tag{2}$$

Dodając do obu stron $2a_0 - 1$ otrzymujemy

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2(a_0 - 1) - 1) + (2a_0 - 1) = (a_0 - 1)^2 + (2a_0 - 1) = a_0^2. \tag{3}$$

Zatem $a_0 \notin A$, otrzymana sprzeczność dowodzi, że nasze założenie nie było prawdziwe. Ostatecznie równość (1) zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych.

Zasada Maksimum

Definicja 15

Mówimy, że liczba naturalna m_0 ogranicza podzbiór A zbioru $\mathbb{N}$ z góry jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \leq m_0$.

Zasada 16

Każdy ograniczony z góry, niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ ma element największy.

Zasada Indukcji Matematycznej

Twierdzenie 17

Następujące zasady są równoważne:

Zasada Minimum,

Zasada Indukcji Zupełnej,

Zasada Indukcji Matematycznej,

Zasada Maksimum.

Przykład 18

Proponujemy teraz przeanalizować przykład **błędnego** rozumowania indukcyjnego.

Udowodnimy, że wszystkie konie są jednej maści!

Posłużymy się indukcją względem liczby koni.

1. Dowolny zbiór złożony z jednego konia jest zbiorem koni o jednej maści.
2. Rozpatrzmy dowolny $(k+1)$-elementowy zbiór koni. Wybierzmy dowolnego konia z tego zbioru i usuńmy go na chwilę. Na mocy założenia indukcyjnego k-elementowy zbiór pozostałych koni jest zbiorem koni o tej samej maści. Dodajmy z powrotem usuniętego konia i usuńmy dowolnego innego. Znów mamy k-elementowy zbiór koni, a więc są to konie tej samej maści. Ponadto usunięty koń był tej samej maści co większość koni w obecnym zbiorze. To oznacza, że wszystkie rozpatrywane $k+1$ konie są jednej maści.

Gdzie jest błąd?

Zasada Indukcji Matematycznej

Krok indukcyjny jest błędny dla $k = 1$ ($k + 1 = 2$). Rzeczywiście,

rozważamy dowolne dwa konie A i B,

usuwając konia A pozostały koń B stanowi oczywiście zbiór koni jednej maści,

dodając z powrotem konia A i usuwając konia B znów mamy jednoelementowy zbiór koni tej samej maści,

jednak powyższe zdania nie implikują, że A i B mają tę samą maść.

Zwróćmy uwagę, że dla dowolnego $k \geq 2$ rozumowanie jest poprawne. Rzeczywiście, gdyby dowolne dwa konie były tej samej maści to wszystkie byłyby tej samej maści.