Indukcja matematyczna, zasada minimum i maksimum

17 lutego 2017

Aksjomatyka liczb naturalnych

$\mathbb{N}$ jest nazwą zbioru liczb naturalnych,
1 jest nazwą elementu (jedynki),
$\star : \mathbb{N} \ni n \to n^\star \in \mathbb{N}$ jest funkcją (następnik).

Wzajemne związki między tymi pojęciami ustalają następujące aksjomaty:

A1. 1 należy do $\mathbb{N}$.

A2. Jeżeli n należy do $\mathbb{N}$ to $n^\star$ należy do $\mathbb{N}$.

A3. Jeżeli n należy do $\mathbb{N}$ to $n^\star \neq 1$.

A4. Jeżeli $n, m \in \mathbb{N}$ i $n^\star = m^\star$ to $n = m$.

A5. Jeżeli A jest podzbiorem $\mathbb{N}$ takim, że $1 \in A$ oraz dla dowolnego $n \in A$ także $n^\star \in A$ to $A = \mathbb{N}$.

Zasada Indukcji Matematycznej

Zasada 1

Niech A będzie podzbiorem liczb naturalnych. Jeśli:

baza indukcyjna	Liczba naturalna $n_0 \in A$.
krok indukcyjny	Dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$, jeśli $n \in A$ to $n + 1 \in A$.

Wtedy do zbioru A należą wszystkie liczby naturalne większe lub równe n_0.

Przykład 2

Udowodnij, że $n^2 \leq 2^n$ dla $n \geq 4$.

Dowód
Niech $A = \{n : n^2 \leq 2^n; n \in \mathbb{N}\}$.

Weźmy $n_0 = 4$, ponieważ $4^2 = 2^4$ zatem $4 \in A$ (baza indukcyjna).

Niech teraz $n \geq 4$,
załóżmy, że $n \in A$, (tzn. $n^2 \leq 2^n$, założenie indukcyjne) wtedy

$$(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

zatem $n+1 \in A$ (krok indukcyjny).

Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność $n^2 \leq 2^n$ spełniają wszystkie liczby naturalne $n \geq 4$.

Skorzystaliśmy tu z nierówności $(n+1)^2 \leq 2n^2$, czyli nierówności $(n-1)^2 \geq 2$ prawdziwej dla $n \geq 3$.

Zasada Indukcji Matematycznej

Zasada 3

Niech W będzie własnością dotyczącą liczb naturalnych. Jeśli:

bi Liczba naturalna n_0 ma własność W.

ki Dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ zachodzi implikacja
jeśli n ma własność W, to $n+1$ też ma własność W.

Wtedy własność W zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych większych lub równych n_0.

Zasada 4

Niech W będzie własnością dotyczącą liczb naturalnych. Jeśli:

bi Liczba naturalna 1 ma własność W.

ki Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja
jeśli n ma własność W, to $n+1$ też ma własność W.

Wtedy własność W zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych.

Przykład 5 (Nierówność Bernoulliego)

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > -1$ i dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Dowód
Niech $x > -1$ liczba rzeczywista.
Nierówność $(1+x)^1 \geq 1 + 1x$ zachodzi.
Zakładając, że dla ustalonego $k \geq 1$ mamy $(1+x)^k \geq 1 + kx$ (założenie indukcyjne), pokażemy, że $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$.
Z założenia indukcyjnego mamy

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność Beroulliego jest prawdziwa.

Zasada Indukcji Matematycznej

Przykład 6

Udowodnij, że $m! < (\frac{m}{2})^m$ dla $m \geq 6$.

Dowód
Nierówność $6! < (\frac{6}{2})^6$ jest prawdziwa.
Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla ustalonego $k \geq 6$, tzn

$$k! < (\tfrac{k}{2})^k,$$

wtedy dla $k + 1$ mamy z założenia indukcyjnego

$$(k+1)! = k!(k+1) < (\tfrac{k}{2})^k(k+1) < (\tfrac{k+1}{2})^{k+1}.$$

Co kończy dowód indukcyjny.

Skorzystaliśmy tu z nierówności $(\frac{k}{2})^k(k+1) < (\frac{k+1}{2})^{k+1}$, czyli nierówności, $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k > 2$ która wynika z nierówności Bernoulliego.

Przykład 7

Udowodnij, że $m! > (\frac{m}{3})^m$ dla $m \geq 1$.

Dowód

Nierówność $1! > (\frac{1}{2})^1$ jest prawdziwa.

Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla ustalonego $k \geq 1$, tzn.

$$k! > (\tfrac{k}{3})^k,$$

wtedy dla $k+1$ mamy z założenia indukcyjnego

$$(k+1)! = k!(k+1) > (\tfrac{k}{3})^k(k+1) > (\tfrac{k+1}{3})^{k+1}.$$

Co kończy dowód indukcyjny.

Skorzystaliśmy tu z nierówności $(\frac{k}{3})^k(k+1) > (\frac{k+1}{3})^{k+1}$, czyli nierówności, $3 > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ która wynika ze wzoru dwumianowego Newtona oraz ze znanego faktu z analizy matematycznej $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} = e$:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{k}\right)^i = \sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\,\frac{1}{k^i} < \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!} < e < 3.$$

Zasada Indukcji Zupełnej

Zasada 8

Niech A będzie podzbiorem liczb naturalnych. Jeśli:

bi Liczba naturalna $n_0 \in A$.

ki Dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ zachodzi implikacja
jeśli $\{n_0, n_0 + 1, \ldots, n\} \subseteq A$, to $n + 1 \in A$.

Wtedy do zbioru A należą wszystkie liczby naturalne większe lub równe n_0.

Zasada Minimum

Zasada 9

Każdy niepusty podzbiór A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ ma element najmniejszy.

Przykład 10

Udowodnij, że

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \tag{1}$$

Dowód

Zauważmy, że równość (3) jest spełniona dla $n = 1$, $n = 2$. Załóżmy nie wprost, że rozważana równość nie zachodzi dla wszystkich liczb naturlnych.
Zatem zbiór $A = \{n : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) \neq n^2; n \in \mathbb{N}\}$.

byłby niepusty, i zgodnie z Zasadą Minimum miałby najmniejszą liczbę.
Oznaczmy, ją przez a_0, zatem $a_0 > 2$.
Skoro a_0 jest najmniejszym kontrprzykładem dla równości (3) zatem $a_0 - 1 > 1$ spełnia równość (3), czyli:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2a + 0 - 1) = (a_0 - 1)^2. \tag{2}$$

Dodając do obu stron $2a_0 + 1$ otrzymujemy

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2a + 0 - 1) + (2a_0 + 1) = (a_0 - 1)^2 + (2a_0 + 1) = a_0^2. \tag{3}$$

Zatem $a_0 \notin A$, otrzymana ssprzeczność dowodzi, że nasze założenie nie było prawdziwe. Ostatecznie równość (3) zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych.

Definicja 11

Mówimy, że liczba naturalna m_0 ogranicza podzbiór A zbioru $\mathbb{N}$ z góry jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \leq m_0$.

Zasada 12

Każdy ograniczony z góry, niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ ma element największy.