Równania rekurencyjne, rozwiązywanie równań rekurencyjnych

12 marca 2017

Definicje rekurencyjne

Definicja rekurencyjna (indukcyjna):

- nieformalnie - taka definicja, która odwołuje się do samej siebie - ale trzeba tu uważać, by odwołanie było do instancji o mniejszej komplikacji,
- zwykle chodzi o ciąg $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, - dla którego przepis na element a_n wykorzystuje jakieś poprzednie elementy: $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ itp.,
- początkowy element (lub kilka początkowych) muszą być zadane,
- zwykle definicja rekurencyjna odwołuje się do jednego lub kilku poprzednich elementów, ale może też odwoływać się do wszystkich poprzednich.

Definicje rekurencyjne

Przykład 1

Silnia liczby n (zapisywana jako $n!$) to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n, czyli

$n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$ Przyjmuje się że $0! = 1$.

Ciąg $0!, 1!, 2!, 3!, 4!, \ldots$ aby mógł być precyzyjnie rozumiany np. przez komputer, powinien być zadany rekurencyjnie jako:

$$s_0 = 1$$
$$s_n = n \cdot s_{n-1} \quad dla \quad n \geq 1.$$

Ponieważ pierwszy wyraz jest zadany, to możemy kolejno obliczać:

$$s_0 = 1$$
$$s_1 = 1 \cdot s_0 = 1 \cdot 1 = 1$$
$$s_2 = 2 \cdot s_1 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$s_3 = 3 \cdot s_2 = 3 \cdot 2 = 6$$
$$s_4 = 4 \cdot s_3 = 4 \cdot 6 = 24$$
$$\ldots$$

Ciągi arytmetyczne i geometryczne

Przykład 2

Z najprostszymi równaniami rekurencyjnymi zetknęliśmy się już w szkole. Zacznijmy od przypomnienia definicji ciągu arytmetycznego. Niech będą dane dwie liczby rzeczywiste a i r. **Ciągiem arytmetycznym** nazywamy ciąg (a_n) liczb rzeczywistych określony wzorami

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n + r \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Ze szkoły znamy też **wzór ogólny** (lub **wzór jawny**) ciągu arytmetycznego (a_n):

$$a_n = a + nr$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

W podobny sposób definiujemy ciągi geometryczne. Załóżmy, że dane są liczby rzeczywiste a i q. **Ciągiem geometrycznym** nazywamy ciąg (a_n) liczb rzeczywistych zdefiniowany wzorami

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n q \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Znów wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) jest znany ze szkoły:

$$a_n = aq^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Wieże Hanoi

Przykład 3

Łamigłówka o nazwie „Wieże Hanoi” wygląda w następujący sposób. Mamy trzy pałeczki. Na jedną z nich nadziano 64 krążki w kolejności od największego na dole do najmniejszego na górze. Należy przenieść wszystkie krążki z jednej pałeczki na drugą, przy czym wolno za każdym razem przenosić tylko jeden krążek i nie wolno kłaść większego krążka na mniejszy. W czasie przenoszenia wolno kłaść krążki na wszystkich trzech pałeczkach. Ile najmniej ruchów (tzn. pojedynczych przeniesień krążków) potrzeba, by przenieść wszystkie 64 krążki?

Wieże Hanoi

Oznaczmy przez H_n najmniejszą liczbę ruchów, które należy wykonać by przenieść n krążków z jednej pałeczki na inną. Jest przy tym obojętne, z której pałeczki na którą przenosimy te krążki. Również jest obojętne, czy na tych pałeczkach już leżą jakieś krążki, byle były one większe od wszystkich krążków, które przenosimy. Oczywiście $H_0 = 0$. Przypuśćmy, że umiemy przenieść n krążków w minimalnej liczbie H_n ruchów. Chcemy teraz przenieść $n+1$ krążków z pierwszej pałeczki na drugą. W którymś momencie będziemy musieli przenieść największy krążek, leżący na samym dole na pierwszej pałeczce. Oczywiście musimy przedtem zdjąć z niego wszystkie mniejsze krążki. Nie mogą one też leżeć na drugiej pałeczce, bo tam mamy położyć największy krążek. Musimy zatem przenieść n krążków z pierwszej pałeczki na trzecią. Wykonamy w tym celu H_n ruchów. Następnie przenosimy największy krążek (to jest jeden ruch) i wreszcie przenosimy n krążków z trzeciej pałeczki na drugą (tu znów mamy H_n ruchów). Razem wykonamy więc $2 \cdot H_n + 1$ ruchów. Widzimy, że z jednej strony jest to minimalna liczba ruchów, które musimy wykonać, a z drugiej, że ta liczba ruchów jest też wystarczająca. Zatem otrzymujemy równanie rekurencyjne:

$$H_0 = 0, \quad H_{n+1} = 2 \cdot H_n + 1 \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Wieże Hanoi

Obliczmy kilka początkowych wyrazów ciągu (H_n):

$$\begin{aligned} H_0 &= 0, \\ H_1 &= 2H_0 + 1 = 1, \\ H_2 &= 2H_1 + 1 = 3, \\ H_3 &= 2H_2 + 1 = 7, \\ H_4 &= 2H_3 + 1 = 15 \end{aligned}$$

i tak dalej. Łatwo domyślamy się wzoru ogólnego:

$$H_n = 2^n - 1$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Możemy teraz sprawdzić przez indukcję, że ten odgadnięty wzór ogólny jest poprawny.

Przykład 4

Znajdź postać zwartą ciągu rozwijając równanie rekurencyjne:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, \\ a_{n+1} &= a_n^2. \end{aligned}$$

Dowód 5

$$a_n = a_{n-1}^2 = a_{n-2}^4 = a_{n-3}^8 = \ldots = a_0^{2^n} = 2^{2^n}.$$

Równania rekurencyjne liniowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

Niech będą dane liczby rzeczywiste a, b i c. Przypuśćmy następnie, że ciąg (a_n) został określony za pomocą równania rekurencyjnego

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = b \cdot a_n + c \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Przyjmijmy ponadto, że $b \neq 1$
(w przeciwnym razie mielibyśmy do czynienia z ciągiem arytmetycznym).

Obliczmy kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n):

$a_0 = a,$

$a_1 = ba_0 + c = ab + c,$

$a_2 = ba_1 + c = ab^2 + bc + c,$

$a_3 = ba_2 + c = ab^3 + b^2c + bc + c,$

$a_4 = ba_3 + c = ab^4 + b^3c + b^2c + bc + c,$

$a_5 = ba_4 + c = ab^5 + b^4c + b^3c + b^2c + bc + c,$

domyślamy się wzoru ogólnego:

$$a_n = ab^n + c(1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1}) = ab^n + c \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Sprawdzimy przez indukcję, że ten wzór jest poprawny.
Dla $n = 0$ mamy

$$a_0 = ab^0 + c \cdot \frac{b^0 - 1}{b - 1} = a.$$

Przypuśćmy następnie, że nasz wzór jest spełniony dla pewnego n i obliczmy a_{n+1}:

$$a_{n+1} = ba_n + c = b \cdot \left(ab^n + c \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} \right) + c = ab^{n+1} + c \cdot \frac{b^{n+1} - b}{b - 1} + c =$$
$$= ab^{n+1} + c \cdot \frac{b^{n+1} - b + b - 1}{b - 1} = ab^{n+1} + c \cdot \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1},$$

co kończy dowód indukcyjny.

Wzór ogólny tego ciągu można wyznaczyć też w inny sposób, wprowadzając ciąg pomocniczy (b_n) zdefiniowany wzorem

$$\boxed{b_n = a_{n+1} - a_n}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wówczas

$$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = (ba_{n+1} + c) - (ba_n + c) = b \cdot (a_{n+1} - a_n) = b \cdot b_n,$$

skąd dostajemy $b_n = b_0 \cdot b^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Zatem

$$a_{n+1} = a_n + b_0 \cdot b^n \ .$$

Po dodaniu stronami nierówności

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + b_0 \cdot b^0, \\ a_2 &= a_1 + b_0 \cdot b^1, \\ a_3 &= a_2 + b_0 \cdot b^2, \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + b_0 \cdot b^{n-2}, \\ a_n &= a_{n-1} + b_0 \cdot b^{n-1}. \end{aligned}$$

i skróceniu występujących po obu stronach wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, otrzymamy

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + b_0 \cdot (b^0 + b^1 + b^2 + \ldots + b^{n-1}) = a_0 + b_0 \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} = \\ &= a + (ab + c - a) \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} = a + a(b - 1) \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} + c \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} = \\ &= a + a(b^n - 1) + c \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} = ab^n + c \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1}. \end{aligned}$$

Równania rekurencyjne liniowe pierwszego rzędu o zmiennych współczynnikach

Ciąg liczb (P_n) jest zatem określony wzorami: rekurencyjnymi

$$P_0 = 0, \quad P_{n+1} = 2 \cdot P_n + 2^{n+1} - 1 \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Znów obliczmy kilka początkowych wyrazów ciągu (P_n):

$$P_0 = 0, \qquad P_3 = 2 \cdot 5 + 2^3 - 1 = 17,$$
$$P_1 = 2 \cdot 0 + 2^1 - 1 = 1, \quad P_4 = 2 \cdot 17 + 2^4 - 1 = 49,$$
$$P_2 = 2 \cdot 1 + 2^2 - 1 = 5, \quad P_5 = 2 \cdot 49 + 2^5 - 1 = 129,$$

Można zauważyć, że

$$P_0 - 1 = -1 = (-1) \cdot 2^0, \qquad P_3 - 1 = 16 = 2 \cdot 2^3,$$
$$P_1 - 1 = 0 = 0 \cdot 2^1, \qquad P_4 - 1 = 48 = 3 \cdot 2^4,$$
$$P_2 - 1 = 4 = 1 \cdot 2^2, \qquad P_5 - 1 = 128 = 4 \cdot 2^5,$$

Widzimy już wzór ogólny

$$P_n = (n-1) \cdot 2^n + 1 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Sprawdzenie poprawności tego wzoru przez indukcję

Przypuśćmy, że mamy dane trzy ciągi (a_n), (b_n) i (c_n) oraz, że ciąg (t_n) jest określony wzorami rekurancyjnymi

$$t_0 = t, \quad a_n t_{n+1} = b_n t_n + c_n \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Wybieramy następnie ciąg (s_n) (tzw. **czynnik sumacyjny**) o tej własności, że

$$a_n s_n = b_{n+1} s_{n+1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Następnie mnożymy obie strony równania $a_n t_{n+1} = b_n t_n + c_n$ przez s_n:

$$a_n s_n t_{n+1} = b_n s_n t_n + c_n s_n, \quad \text{czyli} \quad b_{n+1} s_{n+1} t_{n+1} = b_n s_n t_n + c_n s_n$$

Określamy teraz ciąg (u_n) wzorem $u_n = b_n s_n t_n$ i wypisujemy n początkowych równań:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + c_0 s_0, \\
u_2 &= u_1 + c_1 s_1, \\
u_3 &= u_2 + c_2 s_2, \\
\dots \quad & \dots \\
u_n &= u_{n-1} + c_{n-1} s_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Dodajemy stronami otrzymane równości i po skróceniu dostajemy

$$
u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k s_k,
$$

czyli

$$
t_n = \frac{1}{b_n s_n} \cdot \left(b_0 s_0 t + \sum_{k=0}^{n-1} c_k s_k \right)
$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$

Piszemy n listów i adresujemy n kopert. Na ile sposobów możemy włożyć te listy do kopert tak, by żaden list nie trafił do właściwej koperty?

Ponumerujmy listy i koperty liczbami od 1 do n; zakładamy przy tym, że list o numerze k powinien trafić do koperty o numerze k. Popatrzmy teraz na ciąg numerów listów włożonych do kopert: a_1 jest numerem listu włożonego do koperty z numerem 1, a_2 jest numerem listu w kopercie z numerem 2 i tak dalej. Ogólnie a_k jest numerem listu włożonego do koperty o numerze k. Oczywiście ciąg liczb $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest permutacją zbioru liczb od 1 do n. Będziemy używać znanego oznaczenia permutacji: permutację $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ oznaczamy symbolem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

wskazując w ten sposób w górnym wierszu numery kopert i pod nimi w dolnym wierszu numery listów, które trafiły do kolejnych kopert.

Liczba k jest **punktem stałym** permutacji $(a_1, \ldots, a_n)$, jeśli $a_k = k$, tzn. jeśli liczba a_k stoi na swoim, tzn. k-tym miejscu. Interesuje nas liczba **nieporządków**, czyli tych permutacji, które nie mają punktów stałych, tzn. permutacji $(a_1, \ldots, a_k)$ takich, że żadna liczba a_k nie stoi na swoim miejscu:

$$D_n = \left|\left\{(a_1, \ldots, a_n) : \ \forall k \ \left(a_k \neq k\right)\right\}\right|.$$

Przyjrzyjmy się, w jaki sposób możemy pogrupować nieporządki. Popatrzmy na n-tą kopertę. Mógł do niej trafić jeden z $n-1$ listów: każdy z wyjątkiem n-tego. Niech zatem będzie to list o numerze k. Mamy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1. List o numerze n trafił do koperty z numerem k. Inaczej mówiąc, listy z numerami n i k „zamieniły się” kopertami. Mamy więc sytuację:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & n & \dots & a_{n-1} & k \end{pmatrix}$$

Oczywiście wtedy pozostałe listy (a jest ich $n-2$) muszą też być „wymieszane”, czyli ich numery muszą tworzyć nieporządek zbioru pozostałych liczb:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n-1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{k-1} & a_{k+1} & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Tak włożyć te $n-2$ listy do kopert można na D_{n-2} sposobów. Inaczej mówiąc, istnieją D_{n-2} nieporządki n liczb, w których na n tym miejscu stoi dana liczba k i na k-tym miejscu stoi liczba n. Uwzględniając liczbę możliwych k (jest ich $n-1$) widzimy, że w tym przypadku mamy łącznie $(n-1)D_{n-2}$ sposobów włożenia listów do kopert.

Przypadek 2. List o numerze n trafił do koperty z numerem l, przy czym $k \neq l$. Mamy więc sytuację:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & l & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & n & \dots & a_{n-1} & k \end{pmatrix}.$$

Wtedy na chwilę przekładamy listy: list o numerze n wkładamy do właściwej (tzn. n-tej) koperty, a list o numerze k wkładamy do koperty z numerem l (czyli zamieniamy miejscami k-ty i n-ty list):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & l & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & k & \dots & a_{n-1} & n \end{pmatrix}.$$

Po tej zamianie mamy jeden list (o numerze n) we właściwej kopercie i pozostałe $n-1$ listów dokładnie wymieszanych, tzn. ich numery tworzą nieporządek $n-1$ liczb od 1 do $n-1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & l & \dots & n-1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & k & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Odwrotnie, jeśli mamy nieporządek liczb od 1 do $n-1$, to wkładamy list z numerem n do n-tej koperty, a następnie zamieniamy listy z numerami k i n, otrzymując nieporządek n numerów listów. Mamy D_{n-1} nieporządków liczb od 1 do $n-1$ i z każdego takiego nieporządku dostajemy jeden nieporządek n liczb, w którym na miejscu n-tym stoi liczba k. Uwzględniając liczbę możliwych k, dostajemy w tym przypadku $(n-1)D_{n-1}$ sposobów włożenia listów.

Łącznie mamy w obu przypadkach $(n-1)\cdot(D_{n-2}+D_{n-1})$ sposobów włożenia listów. Ponieważ $D_1 = 0$ oraz $D_2 = 1$, więc otrzymujemy równanie rekurencyjne:

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_n = (n-1)\cdot\big(D_{n-2}+D_{n-1}\big) \quad \text{dla } n > 2.$$

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_n = (n-1) \cdot \big(D_{n-2} + D_{n-1}\big) \quad \text{dla } n > 2.$$

Zwróćmy uwagę na to, że otrzymaliśmy równanie rekurencyjne **drugiego rzędu**: do obliczenia kolejnego wyrazu ciągu musimy znać dwa poprzednie wyrazy. Zajmiemy się teraz poszukiwaniem wzoru ogólnego na liczbę nieporządków.

Definiujemy nowy ciąg:

$$E_n = D_n - nD_{n-1}$$

dla $n \geq 2$. Wtedy mamy:

$$E_n = D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}) = -E_{n-1}.$$

Ciąg (E_n) jest więc ciągiem geometrycznym o ilorazie -1, którego początkowym wyrazem jest E_2. Mamy zatem

$$E_n = E_2 \cdot (-1)^{n-2}.$$

Ponieważ $E_2 = D_2 - 2D_1 = 1$, więc ostatecznie otrzymujemy

$$E_n = (-1)^n,$$

czyli $$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

Otrzymane nowe równanie rekurencyjne ciągu (D_n) umiemy już rozwiązać metodą czynnika sumacyjnego. Podzielmy obie strony ostatniego równania przez $n!$:

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{nD_{n-1}}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{D_n}{n!} = \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Definiujemy ciąg (G_n) wzorem $\quad G_n = \dfrac{D_n}{n!} \quad$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Wtedy $\quad G_n = G_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{n!}, \quad$ skąd wynika, że

$$G_n = G_1 + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

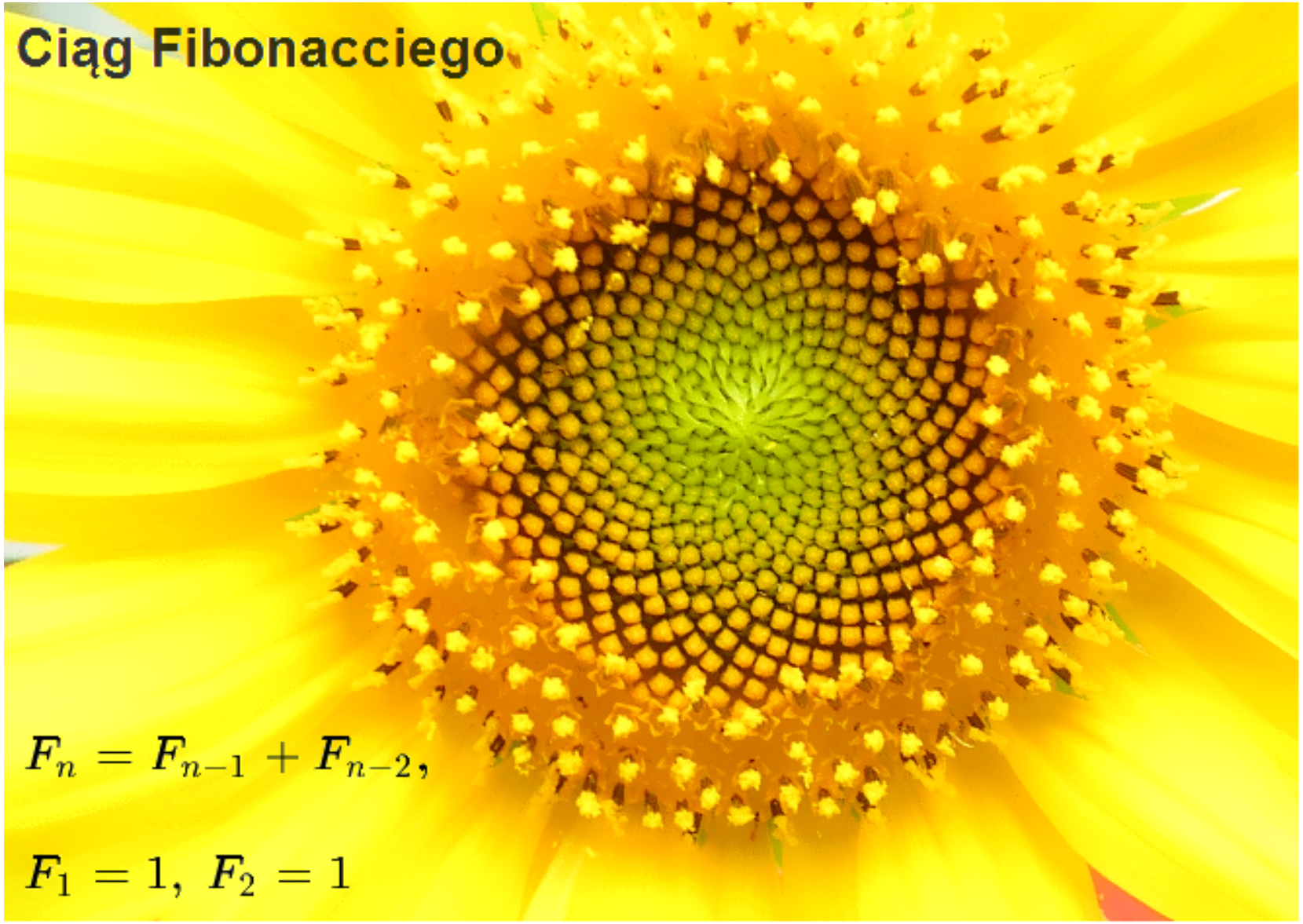
Ponieważ $G_1 = 0$, więc ostatni wzór możemy zapisać w postaci

$$G_n = 1 + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie

$$D_n = n!\left(1 + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

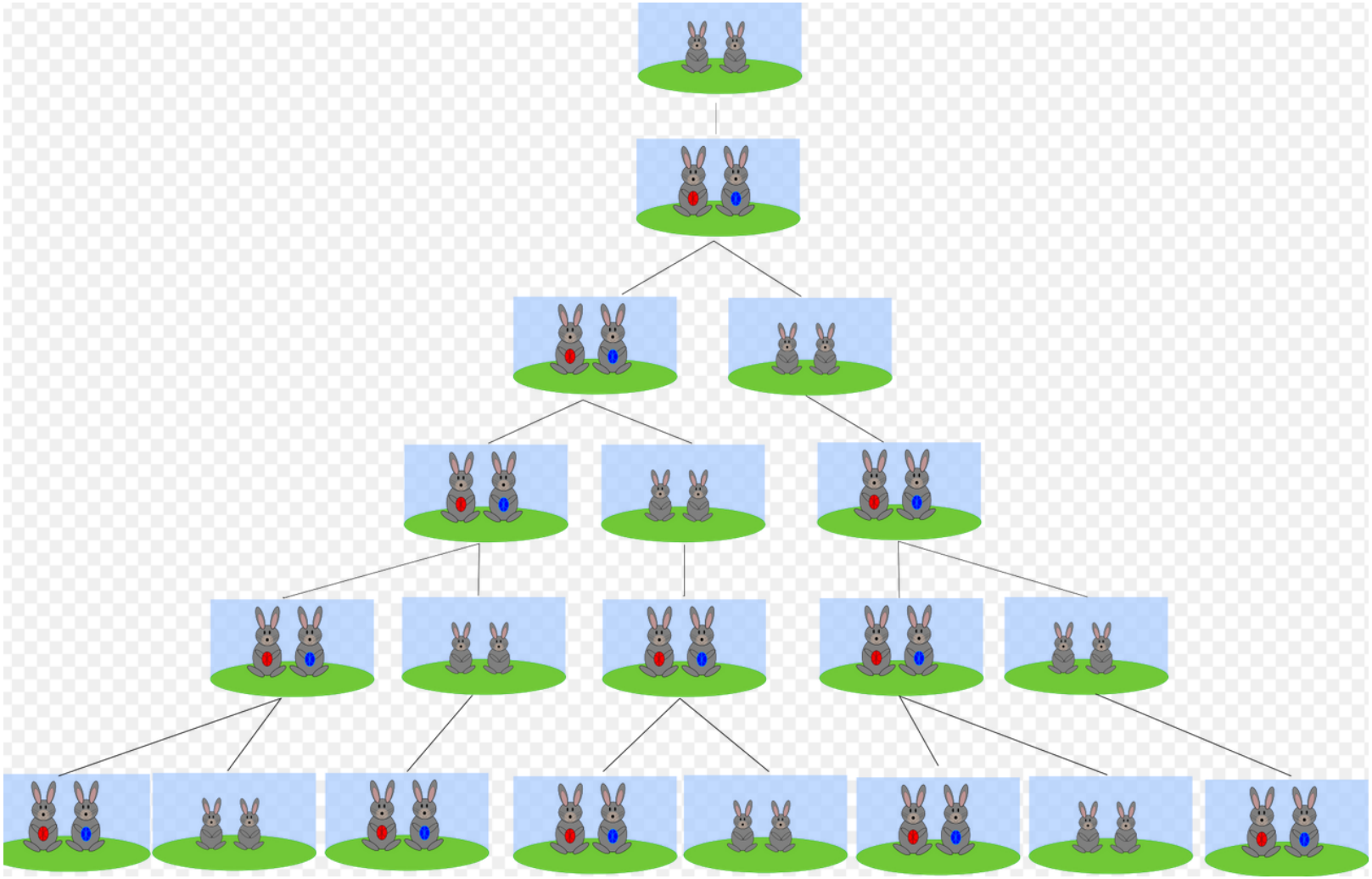
dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dla dużych n przybliżenie $D_n \approx n! \cdot \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}367879n$.

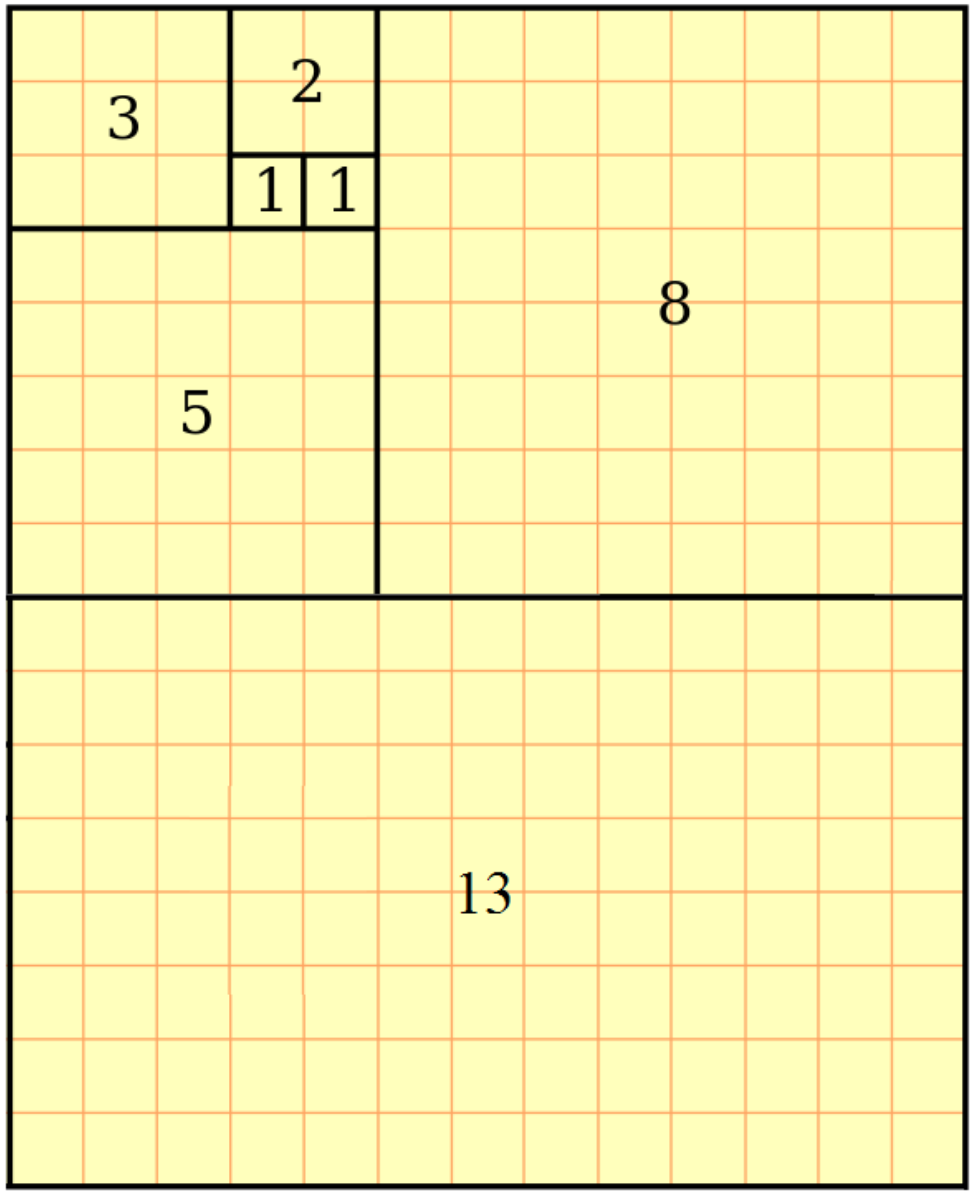


Ciąg Fibonacciego

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1$$





$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_{n+1} F_n$$

liczba ciągów o wyrazach równych 1 lub 2, które sumują się do liczby n jest równa F_{n+1};

liczba pokryć planszy $2 \times n$ kostkami domina 2×1 jest równa F_{n+1};

liczba ciągów binarnych bez kolejnych jedynek (równoważnie zer) jest równa F_{n+2};

liczba podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ bez kolejnych liczb jest równa F_{n+2};

liczba ciągów binarnych bez nieparzystej długości ciągów jedynek jest równa F_{n+1};

liczba ciągów binarnych bez parzystej długości ciągów zer lub jedynek jest równa $2F_n$.

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1} \qquad \frac{3}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} \qquad \frac{5}{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} \qquad \frac{8}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}$$

$$1.61803\,39887\ldots \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} iF_i = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^3 = (F_{3n+2} + (-1)^{n+1} 6F_{n-1} + 5)/10$$

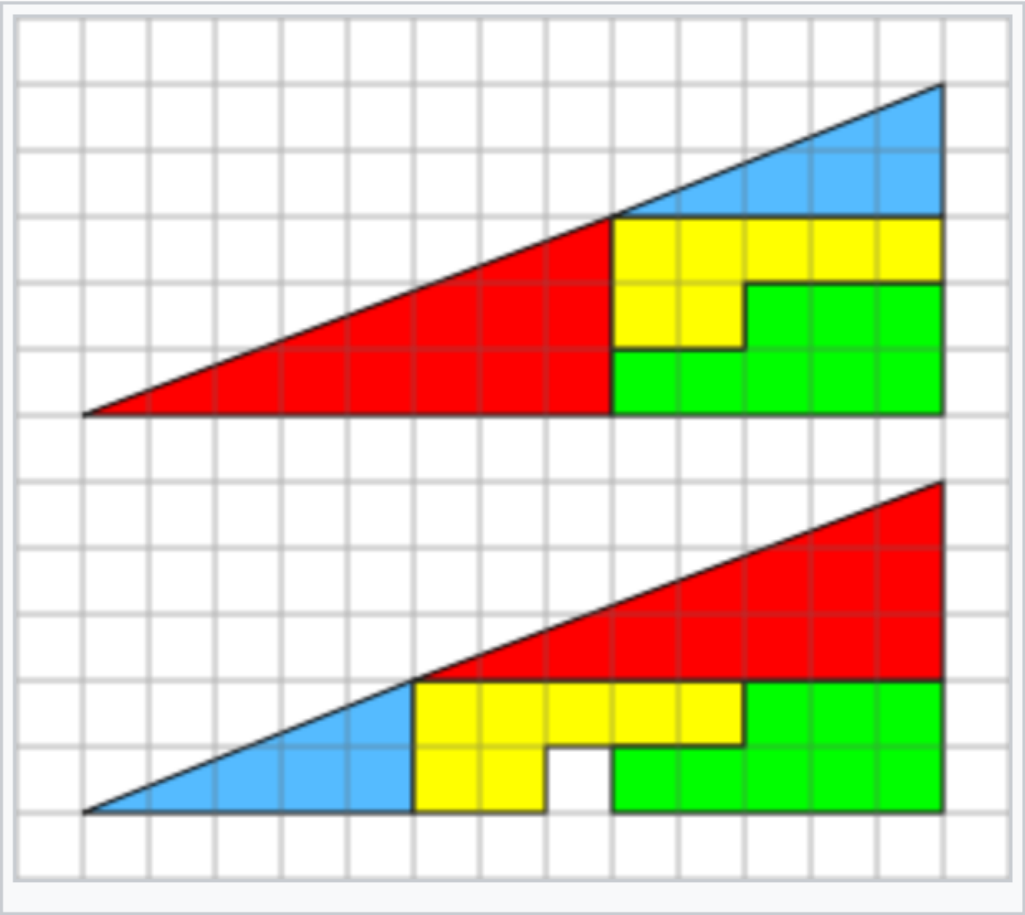
$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$$

$$F_{2n-1} = {F_n}^2 + {F_{n-1}}^2$$

$$F_n = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k-1}$$

												1
											1	1
										1	1	1
									1	1	2	1
								2	1	3	3	1
							3	1	4	6	4	1
						5	1	5	10	10	5	1
					8	1	6	15	20	15	6	1
				13	1	7	21	35	35	21	7	1
			21	1	8	28	56	70	56	28	8	1
		34	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
	55	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
89												

$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, tzw. zależność Cassiniego (1680), (1680)
która leży u podstaw zagadki brakującego kwadratu oraz uogólniona wersja

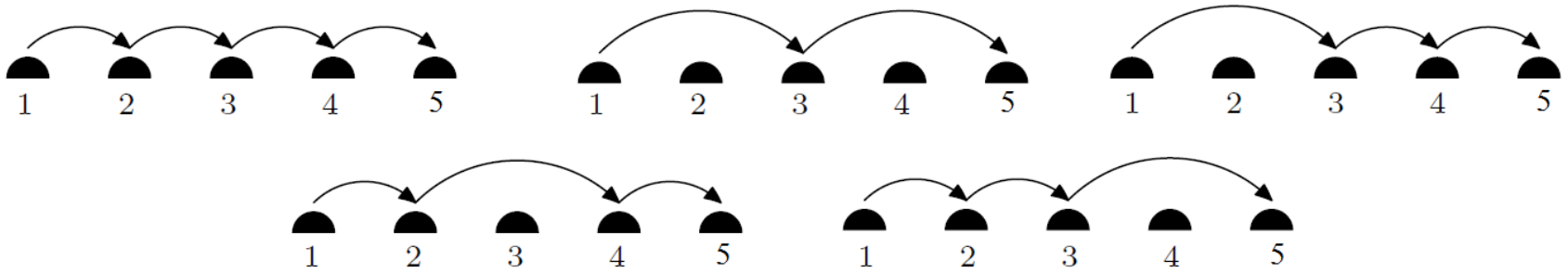


Ciąg Fibonacciego

Ciąg liczb Fibonacciego pojawił się po raz pierwszy w książce Leonarda z Pizy (zwanego Fibonaccim) *Liber abaci* przy okazji zadania o rozmnażaniu królików. Zobaczymy teraz inne zadanie kombinatoryczne prowadzące do tego samego ciągu.

Zadanie. Żaba skacze z kamienia na kamień. Kamienie leżą jeden za drugim i są ponumerowane liczbami naturalnymi.

W jednym skoku potrafi ona przeskoczyć z jednego kamienia na następny lub o dwa kamienie dalej.



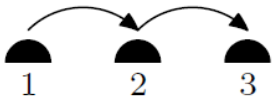
Oznaczmy przez F_n liczbę dróg żaby na n -ty kamień.

$$F_1 = 1.$$

Na kamień z numerem 2 żaba może dostać się tylko w jeden sposób – ma wykonać jeden pojedynczy skok:

$$F_2 = 1.$$

Na kamień z numerem 3 żaba może dostać się dwoma sposobami – wykonać dwa skoki pojedyncze lub jeden podwójny:



Zobaczmy teraz, na ile sposobów żaba może się dostać na kamień o numerze $n+2$. Ma ona:

F_n różnych dróg na kamień o numerze n

F_{n+1} różnych dróg na kamień o numerze $n+1$

Ponieważ ostatni skok żaby jest skokiem z kamienia o numerze n lub $n+1$, więc łącznie istnieje $F_n + F_{n+1}$ dróg żaby na kamień $n+2$

A więc $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla $n \geq 1$.

Przypuśćmy, że mamy dany ciąg liczb (t_n) spełniający równanie (współczynniki rzeczywiste)

$$t_{n+2} + a \cdot t_{n+1} + b \cdot t_n = 0.$$

Równanie

$$x^2 + ax + b = 0$$

jest nazywane **równaniem charakterystycznym** równania rekurencyjnego

Przypadek 1. Równanie charakterystyczne ma dwa różne pierwiastki (rzeczywiste) q_1 i q_2.

Rozwiązanie ogólne równania rekurencyjnego ma postać

$$t_n = c \cdot q_1^n + d \cdot q_2^n \qquad \text{dla } n = 1, 2, \ldots .$$

Współczynniki c i d wyznaczamy z układu równań otrzymanego przez wstawienie $n = 1$ i $n = 2$ do rozwiązania ogólnego.

Rozpatrujemy zatem przypadek, gdy równanie charakterystyczne ma współczynniki rzeczywiste, ale nie ma pierwiastków rzeczywistych.
Oznacza to, że w równaniu $x^2 + ax + b = 0$ mamy $a^2 < 4b$.

Stąd wynika, że $b > 0$. Niech $b = r^2$, mamy $\left|\frac{a}{2r}\right| < 1$.

Stąd wynika, że istnieje liczba φ taka, że $a = -2r\cos\varphi$.

Równanie rekurencyjne $t_{n+2} + a \cdot t_{n+1} + b \cdot t_n = 0$ przyjmuje teraz postać

$$t_{n+2} - 2r\cos\varphi \cdot t_{n+1} + r^2 t_n = 0.$$

Można teraz sprawdzić, że ciąg (t_n) określony wzorem

$$t_n = r^n(c \cdot \cos n\varphi + d \cdot \sin n\varphi)$$

(dla $n = 1, 2, \ldots$) jest rozwiązaniem ogólnym równania $t_{n+2} + a \cdot t_{n+1} + b \cdot t_n = 0$.

Przypadek 2. Równanie charakterystyczne $x^2 + ax + b = 0$.

ma jeden pierwiastek podwójny q.

Teraz mamy rozwiązanie ogólne:

$$t_n = (c + dn) \cdot q^n \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$