Funkcje tworzące

18 marca 2017

Naturalnym uogólnieniem wielomianu (sumy skończonej ilości jednomianów) jest ***szereg potęgowy***

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n &= a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 \\ &+ a_3 (x - x_0)^3 + \cdots + a_n (x - x_n)^n + \ldots\end{aligned}$$

o ***środku*** w punkcie x_0 i ***współczynnikach*** a_n.

Aby uprościć , zakładamy, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$ (tj. skończona lub równa ∞).

Twierdzenie 1

[twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda]

Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ jest zbieżny w przedziale otwartym

$(x_0 - R, x_0 + R)$, gdzie $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Liczbę R nazywamy ***promieniem zbieżności szeregu*** potęgowego.

Jeśli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, przyjmujemy $R = \infty$;

jeśli zaś $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, przyjmujemy $R = 0$.

Twierdzenie 2

Funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ jest różniczkowalna w każdym punkcie

przedziału otwartego $(x_0 - R, x_0 + R)$, gdzie R jest promieniem zbieżności szeregu

potęgowego. Pochodną tej funkcji wyraża szereg potęgowy

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad |x - x_0| < R.$$

FUNKCJE TWORZĄCE

1. Określenie funkcji tworzących za pomocą szeregów potęgowych

Przypuśćmy, że dany jest ciąg (a_n) liczb zespolonych. **Funkcją tworzącą** dla ciągu (a_n) nazywamy funkcję $A(z)$ określoną za pomocą wzoru

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Przyjmujemy przy tym, że szereg potęgowy po prawej stronie powyższej równości ma dodatni promień zbieżności r i wtedy funkcja $A(z)$ jest określona wewnątrz koła o środku w zerze i promieniu r. Nie będziemy teraz zajmować się ciągami, dla których rozważany szereg potęgowy ma zerowy promień zbieżności (np. ciągami takimi jak $a_n = n^n$). Z teorii funkcji analitycznych wiadomo, że dla danej funkcji analitycznej $A(z)$ współczynniki definiującego ją szeregu potęgowego są wyznaczone jednoznacznie.

Wykorzystanie funkcji tworzących do znajdowania wzorów ogólnych polega na wykonaniu następujących kroków:

1. zdefiniowanie funkcji tworzącej dla danego ciągu określonego rekurencyjnie,
2. wykorzystanie równań rekurencyjnych do utworzenia równania na funkcję tworzącą,
3. rozwiązanie równania i znalezienie wzoru funkcji tworzącej,
4. rozwinięcie znalezionej funkcji tworzącej w szereg potęgowy i porównanie współczynników.

Prześledzimy teraz tę metodę na przykładzie liczb Fibonacciego.

Funkcją tworzącą zmiennej rzeczywistej *x* ciągu nieskończonego złożonego z samych jedynek (1,1,1,...) jest funkcja:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Szereg *G(x)* jest zbieżny dla $|x|<1$.

Funkcją tworzącą zmiennej rzeczywistej *x* ciągu nieskończonego złożonego z liczb naturalnych (1,2,3,...) jest funkcja:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Szereg *G(x)* jest zbieżny dla $|x|<1$.

Zauważmy, bowiem, że

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Funkcją tworzącą $\binom{n}{k}$, ze względu na k, przy ustalonym n, jest

$$G_n(x) = (1+x)^n.$$

Ciąg Fibonacciego określony jest wzorem rekurencyjnym

$$F_0 = 0 \ , F_1 = 1 \ , F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ .$$

Niech $F(x)$ będzie funkcją tworzącą tego ciągu

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n =$$

$$= F_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-2} + F_{n-1}) x^n =$$

$$= F_1 x + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} =$$

$$= F_1 x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n =$$

$$= F_1 x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n =$$

$$= x + x^2 F(x) + x F(x) \ .$$

Zatem

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Wielomian $1 - x - x^2$ ma dwa pierwiastki $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, przyjmując

$$\lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \lambda_2 = \frac{2}{-\sqrt{5}-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

wtedy:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$$

otrzymujemy po rozkładzie na ułamki proste:

$$F(x) = \frac{x}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{1}{1-\lambda_1 x} - \frac{1}{1-\lambda_2 x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda_1^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda_2^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)\right) x^n.$$

Stąd szukany n-ty wyraz można zapisać :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Kombinacja liniowa: $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$

Przesunięcie: $x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^n$

Mnożenie przez liczbę: $\alpha \cdot G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\, a_n\ x^n$,

Mnożenie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, gdzie $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$,

Różniczkowanie: $(G(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$,

Całkowanie: $\int_0^x G(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$,

Potęgi we wsp.: $G(\alpha\, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n a_n\ x^n$,

Sumy wsp.: $\frac{G(x)}{1-x} = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \dots$.