Elementy Kombinatoryki

19 marca 2017

Zasada Szufladkowa Dirichleta.

Twierdzenie 1

Jeśli **n** obiektów jest rozmieszczonych w **m** szufladach i **n**>**m** to istnieje szuflada z przynajmniej dwoma obiektami.

Zasada Szufladkowa Dirichleta.

Wniosek 2

Wśród niełysych mieszkańców Krakowa w każdej chwili jest dwóch o tej samej liczbie włosów na głowie.

Zakładamy, że liczba włosów na głowie nie przekracza 500000.

Zasada Szufladkowa Dirichleta.

Wniosek 3

Malujemy każdy punkt jednostkowego okręgu czerwonym lub niebieskim kolorem udowodnij, że istnieje trójąt równoramienny wpisany w ten okrąg, którego wszystkie wierzchołki są tego samego koloru.

Zasada Szufladkowa Dirichleta.

Wniosek 4

Grupa 30 osób wita się podając sobie ręce.
Nikt nie wita się z samym sobą i żadna para osób nie wita się podwójnie.
Udowodnij że są dwie osoby, które przywitają taką samą liczbę osób.

Zasada Szufladkowa Dirichleta.

Wniosek 5

Udowodnij, że wśród dowolnych 2017 liczb (powtórzenia są dozwolone) można znaleźć takie, których suma dzieli się przez 2017. Pokaż, że dowolne 2016 liczby nie mają tej własności.

Uogólniona Zasada Szufladkowa Dirichleta.

Twierdzenie 6

Jeśli $\mathbf{n}$ obiektów jest rozmieszczonych w $\mathbf{m}$ szufladach i $\mathbf{n}>\mathbf{rm}$ to istnieje szuflada z przynajmniej $\mathbf{r}+\mathbf{1}$ obiektami.

Zasada włączeń i wyłączeń.

Twierdzenie 7

Niech A, B będą zbiorami skończonymi. Wtedy

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|,$$

czyli równoważnie

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|.$$

Zasada włączeń i wyłączeń.

Wniosek 8

Niech A, B, C będą zbiorami skończonymi. Wtedy

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Zasada włączeń i wyłączeń.

Twierdzenie 9

Przyjmiemy $[n] = \{1, \ldots, n\}$ dla $n > 0$,

$$P_k(n) = \{A \subseteq [n] : \ |A| = k\}.$$

$$P_{\geq k}(n) = \{A \subseteq [n] : \ |A| \geq k\}.$$

Zasada włączeń i wyłączeń.

Twierdzenie 10

Wzór włączeń i wyłączeń

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ są zbiorami skończonymi, to

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} \left| \bigcap_{j \in T} A_j \right|.$$

Zasada włączeń i wyłączeń.

Szkic dowodu

Wprowadźmy oznaczenie:

$$S_k(B_1, \ldots, B_m) = \sum_{T \in P_k(m)} \left| \bigcap_{j \in T} B_j \right|.$$

Teza twierdzenia przybiera wtedy postać:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1, \ldots, A_n).$$

Twierdzenia dowodzimy przez indukcję względem n.

Permutacje

Silnia. Silnią liczby naturalnej n nazywamy iloczyn wszystkich dodatnich liczb naturalnych nie większych niż n.

$$\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.\ 0! = 1}$$

Permutacją zbioru n-elementowego nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Liczba permutacji zbioru złożonego z $\boldsymbol{n}$ elementów jest równa $\boldsymbol{n}!$.

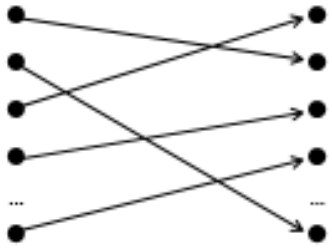
<u>Dowód:</u> na 1-szym miejscu możemy ustawić n elementów, na drugim n-1 elementów, wreszcie na n-tym 1 element. Zatem liczba ustawień wynosi $\boldsymbol{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!}$. Fakt ten zapisujemy: $\boldsymbol{P_n = n!}$

<u>Przykład:</u> Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć następujące permutacje: $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$. Liczba ich wynosi $3! = 6$.

Permutacje

Permutacją zbioru n-elementowego X nazywamy dowolną wzajemnie jednoznaczną funkcję f :

$$f : X \xrightarrow{X \to X} X$$



Przykład:

$X = \{ a, b, c, d \}$ $\qquad$ $f(a) = d,\ \ f(b) = a,\ \ f(c) = c,\ \ f(d) = b$

Permutacje

Definicja

- $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Wzajemnie-jednoznaczne odwzorowanie $\pi : \Omega_n \to \Omega_n$ nazywa się *permutacją*.
- Oznaczenie: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$
- Mnożenie permutacji: $\tau\sigma = \tau \circ \sigma$
  - przykład: $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
  - $\tau\sigma \neq \sigma\tau$

Grupa permutacji

- $(\tau\sigma)\omega = \tau(\sigma\omega)$
- permutacja jednostkowa $e = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$
- permutacja odwrotna $\tau\tau^{-1} = e$
- grupa permutacji: S_n

Permutacje

Istnieją jeszcze **permutacje z powtórzeniami** (n elementów przy czym niektóre się powtarzają).
Niech będzie k elementów, które powtarzają się odpowiednio
$n_1, n_2, \ldots, n_k$ razy. Liczba permutacji z powtórzeniami wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{n_1! \cdot n_2!, \ldots \cdot n_k!}}$$

Uogólnienie wzoru dwumianowego:

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_k \geqslant 0 \\ n_1 + \cdots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot x_k^{n_k}$$

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \overset{ozn}{=} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k}$$

Kombinacje

Kombinacją k-elementową utworzoną ze zbioru n-elementowego $(k \leq n)$ nazywamy każdy k-elementowy podzbiór tego zbioru. Kombinacja, to jedna z możliwości wyboru kilku elementów z większego zbioru, przy czym kolejność wyboru elementów nie ma znaczenia. Dwa podzbiory złożone z tych samych elementów, a różniące się tylko ich kolejnością, stanowią tę samą kombinację.

Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się tzw. symbolem Newtona $\binom{n}{k}$.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Przykład: Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć trzy następujące 2-elementowe kombinacje: $(a, b), (a, c), (b, c)$.

Kombinacje z powtórzeniami

Kombinacje z powtórzeniami (k-elementowe podzbiory zbioru n-elementowego z możliwością powtarzania się elementów), Wówczas liczba kombinacji z powtórzeniami wyraża się wzorem:

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Na przykład liczba 2-elementowych kombinacji z powtórzeniami zbioru 4-elementowego A = {a, b, c, d} wynosi $\frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = 10$.

Mamy tu 10 elementów: $\{a,a\},\{b,b\},\{c,c\},\{d,d\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{d,a\},\{c,d\},\{d,b\}$.

Multizbiór (także **wielozbiór**, *multiset*) uogólnienie pojęcia zbioru, w którym w odróżnieniu od klasycznych zbiorów jeden element może występować wiele razy.

Nie jest dana jednak żadna ich kolejność.

Kombinacje z powtórzeniami

Uwaga 11

Liczba wyborów k liczb z powtórzeniami ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ to liczba sposobów rozmieszczenia k identycznych przedmiotów w n rozróżnialnych pudełkach.
Jest $\binom{n+k-1}{k}$, czyli $\binom{k+n-1}{n-1}$, sposobów rozmieszczenia k identycznych przedmiotów w n rozróżnialnych pudełkach.
Dowód
Dla $k = 6$, $n = 4$ wskazówka schemat poniżej

$$ooo|o||oo \longrightarrow 000101100.$$

Wariacje bez powtórzeń

Wariacją k-elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n-elementowego ($k \leq n$) nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru. Z k-wyrazowymi wariacjami bez powtórzeń zbioru złożonego z n elementów mamy do czynienia, gdy k razy wybieramy bez zwracania po jednym elemencie z danego zbioru, przy czym ma znaczenie kolejność wyboru elementów. Oczywiście n-wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru n-elementowego to po prostu permutacje tego zbioru.
Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Przykład: Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć sześć następujących dwuelementowych wariacji bez powtórzeń: $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$.

Wariacje z powtórzeniami

Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami zbioru n-elementowego nazywa się każdy k-wyrazowy ciąg elementów tego zbioru (dowolny element może wystąpić wielokrotnie w ciągu). Z k-wyrazowymi wariacjami z powtórzeniami zbioru złożonego z n elementów mamy do czynienia, gdy k razy wybieramy ze zwracaniem po jednym elemencie z danego zbioru, przy czym ma znaczenie kolejność wyboru elementów.

Liczba wszystkich k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$W_n^k = n^k$$

Przykład: Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć osiem następujących 2-wyrazowych wariacji z powtórzeniami: $(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)$.

Podziały liczby

Podział liczby n na k składników to przedstawienie n w postaci sumy

$$a_0 + \ldots + a_{k-1} = n,$$

gdzie $1 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{k-1}$.

Liczbę podziałów n na k składników oznaczamy przez $P(n, k)$.

Podziały liczby

Lista podziałów 8 na 3 składniki

$$1+1+6,\ 1+2+5,\ 1+3+4,\ 2+2+4,\ 2+3+3.$$

Podziały liczby

Dla $n, k \in \mathbb{N}$ mamy kolejno:

$$P(n,1) = 1,$$

$$P(n,2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

$$P(n,n) = 1,$$

$$P(n,k) = 0, \text{ dla } n < k$$

$$\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \leqslant P(n,k) \leqslant \binom{n-1}{k-1}.$$

$$P(n,k) \leqslant \frac{1}{k!}\binom{n+\binom{k}{2}-1}{k-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n,k)}{n^{k-1}} = \frac{1}{k!(k-1)!}.$$