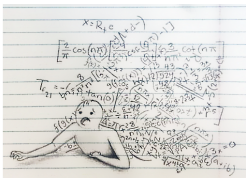
MATEMATYKA DYSKRETNA



LISTA 1,

Zadanie 1. Stosując metodę indukcji matematycznej pokaż, że

i) $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$,

ii) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$,

iii) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$,

iv) $\sum_{i=1}^{n} i\cdot i! = 1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n! = (n+1)!-1$,

v) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$,

vi) $\sum_{i=0}^{n} q^i = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, *dla* $q\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Zadanie 2. Stosując metodę indukcji matematycznej pokaż, że

i*) $\sum_{i=3}^{n} \frac{i^2}{2^i} = \frac{3^2}{2^3}+\frac{4^2}{2^4}+\frac{5^2}{2^5}+\ldots+\frac{n^2}{2^n} = \frac{9\cdot 2^n-2n^2-8n-12}{2^{n+1}}$,

ii*) $\sum_{i=1}^{n} iq^i = q+2q^2+3q^3+\ldots+nq^n = \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}$,
dla $q\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

iii*) $\prod_{i=0}^{n}(1+q^{2^i}) = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^8)\cdot\ldots\cdot(1+q^{2^n}) = \frac{1}{1-q^2}(1-q^{2^{n+1}})$,
dla $q\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Zadanie 3. Pokazać, że dla naturalnego n zachodzą nierówności

i) $2^n \geqslant n^2$ dla $n\geqslant 4$,

ii) $n! \geqslant 3^n$ dla $n\geqslant 7$,

iii) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$,

iv) $(1+p)^n \geqslant 1+np$ dla $p\in(-1,\infty)$.

Zadanie 4. Pokazać idukcyjnie, że dla naturalnego n zachodzą podzielności

i) $3|\, n^3-n$, $5|\, n^5-n$, $11|n^{11}-n$,

ii) $6|\, 7^n-1$,

iii) $3|\, 4^n+8$,

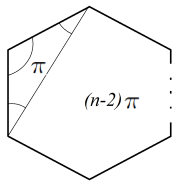
iv) $39|\, 3^n+3\cdot 2^{4n+2}$.

Uwaga. Dla $a,b\in\mathbb{N}$ zapis $b|a$ oznacza, że b dzieli a, czyli istnieje takie $c\in\mathbb{N}$, że $a=bc$.

Zadanie 5. Udowodnij, że n różnych prostych na płaszczyźnie przecinających się w ustalonym punkcie P dzieli płaszczyznę na $2n$ części.

Zadanie 6. Udowodnij, że suma miar kątów wewnętrznych dowolnego n-kąta wypukłego wynosi $(n-2)\pi$.

Wskazówka.

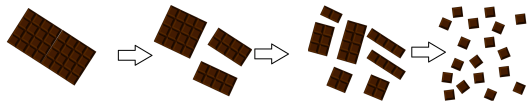


razem $((n+1)-2)\pi$

Zadanie 7. Udowodnij indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej n i $k=0,\ldots,n$ liczba wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi $\binom{n}{k}$.

Wskazówka. Wyróżnij ustalony element, i policz ile jest wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru $n+1$-elementowego z tym wyróżnionym elementem i bez niego. Następnie skorzystaj ze wzoru $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$ i założenia indukcyjnego.

Zadanie 8. Mamy prostokątną czekoladę złożona z n kwadratowych kawałków. Przez wykonanie cięcia (ułamanie czekolady) rozumiemy rozcięcie jej jakiejkolwiek spójnej części wzdłuż którejś z linii pomiędzy kawałkami, tak by dostać dwa znów prostokątne kawałki. Stosując **indukcję zupełną** względem liczby n (kwadracików w czekoladzie), udowodnij, że niezależnie od kolejności wykonywanych cięć potrzeba i wystarcza dokladnie $n-1$ cięć.



Zadanie 9. Udowodnij indukcyjnie, że każdą kwotę $n\geqslant 4$ można rozmienić na dwuzłotówki i pięciozłotówki.