Matematyka dyskretna 2016/2017

Zestaw 5 — Teoria grafów cz. 2 — Podstawowe definicje — Cykl Eulera — Cykl Hamiltona

1. Dla $n = 2, 3, , 4$ i 5 wyznacz liczbę grafów prostych rzędu n (rozróżnić przypadki grafów etykietowanych i nieetykietowanych tj. grafów w których wierzchołki są oznaczone-mają przypisane etykiety lub nie są oznaczone, czyli nie mają etykiet.)

2. Niech $n, m \in \mathbb{N}$.
   (a) Wyznacz liczbę krawędzi grafu K_n.
   (b) Wyznacz liczbę krawędzi grafu $K_{n,m}$, a następnie liczbę krawędzi grafu $K_{n_1,\ldots,n_s}$ dla $s \geqslant 1$ oraz $n_i \in \mathbb{N}$.

3. Ile jest różnych grafów prostych rzędu n?

4. Ile jest różnych spójnych grafów prostych rzędu n?

5. Niech $n, s \in \mathbb{N}$. Dla dowolnych n i s podaj przykład
   (a) s-spójnego grafu prostego rzędu n, który zwiera cykl Eulera
   (b) s-spójnego grafu prostego rzędu n, który zwiera drogę Eulera, która nie jest cyklem Eulera
   (c) s-krawędziowo spójnego grafu prostego rzędu n, który zwiera cykl Eulera
   (d) s-krawędziowo spójnego grafu prostego rzędu n, który zwiera drogę Eulera, która nie jest cyklem Eulera

   (Podaj ograniczenia wartości s.)

6. Niech $n, s \in \mathbb{N}$. Dla dowolnych n i s podaj przykład
   (a) s-spójnego grafu prostego rzędu n, który zwiera cykl Hamiltona
   (b) s-spójnego grafu prostego rzędu n, który zwiera ścieżkę Hamiltona i nie zawiera cykl Hamiltona
   (c) s-krawędziowo spójnego grafu prostego rzędu n, który zwiera cykl Hamiltona
   (d) s-krawędziowo spójnego grafu prostego rzędu n, który zwiera ścieżkę Hamiltona i nie zawiera cyklu Hamiltona

   (Podaj ograniczenia wartości s.)

7. Niech $n \in \mathbb{N}$. Dla dowolnego n podaj przykład
   (a) grafu rzędu n, który zwiera cykl Hamiltona i nie zawiera cyklu Eulera.
   (b) grafu rzędu n, który zwiera cykl Hamiltona i cykl Eulera.
   (c) grafu rzędu n, który zwiera cykl Eulera i nie zawiera cyklu Hamiltona.
   (d) grafu rzędu n, który zwiera cykl Hamiltona i nie zawiera drogi Eulera.
   (e) grafu rzędu n, który zwiera cykl Hamiltona i drogę Eulera.
   (f) grafu rzędu n, który zwiera drogę Eulera i nie zawiera cyklu Hamiltona.

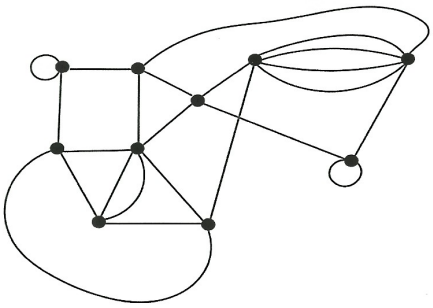
8. Czy istnieje graf eulerowski (jeśli istnieje to podaj przykład takiego grafu)
   (a) parzystego rzędu o nieparzystej liczbie krawędzi
   (b) nieparzystego rzędu o parzystej liczbie krawędzi

9. Niech $G = (V, G)$ będzie grafem hamiltonowskim, a $S \subset V$ jest dowolnym podzbiorem zbioru wierzchołków grafu G. Wykaż, że liczbę składowych spójnych grafu $G - S$ to co najwyżej $|S|$.
   Czy odwrotna własność jest prawdziwa?

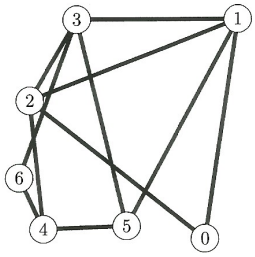
10. Niech $n \geqslant 3$ będzie nieparzystą liczbą naturalną. Wykazać, że graf pełny K_n zawiera $\frac{n-1}{2}$ krawędziowo rozłącznych cykli Hamiltona.

11. Niech $n \in \aleph$, $n \geqslant 3$. Grafem kołowym nazywamy graf oznaczany W_n zdefiniowany równością $C_n + K_1$, gdzie C_n jest cyklem długości n. Scharakteryzuj grafy W_n, które:
    (a) są eulerowskie
    (b) są hamiltonowskie.

12. Niech $n \in \aleph$, $n \geqslant 1$. Zdefiniujemy graf G_n, który jest kratą o $3n$ wierzchołkach ustawionych w trzech rzędach i n kolumnach tak, że każdy wierzchołek jest połączony pojedynczą krawędzią z wierzchołkiem po lewej stronie, po prawej stronie, nad i pod, o ile te wierzchołki istnieją. Scharakteryzuj grafy G_n, które:
    (a) są eulerowskie
    (b) są hamiltonowskie.



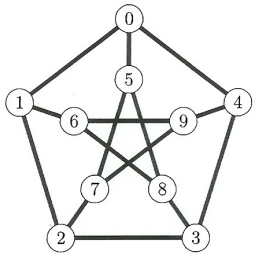
Rysunek 2: Graf $\mathbb{G}$.



Rysunek 3: Graf $\mathbb{G}$.

13. Wykazać, że jeżeli G jest 3-regularnym grafem prostym rzędu 10, w którym długość najkrótszego cyklu jest większa lub równa 5, to graf G nie zawiera cyklu Hamiltona.

14. Graf G zdefiniowany na Rysunku 1 jest tzw. grafem Petersena.
    (a) Zbadaj istnienie cyklu i drogi Eulera w grafie G
    (b) Zbadaj istnienie cyklu i ścieżki Hamiltona w grafie G
    (c) Wyznacz cykle długości 3, 4, 5, 6, 7, 8, i 9 w grafie G, o ile istnieją



Rysunek 1: Graf $\mathbb{G}$.

15. Niech $\mathbb{G}$ będzie grafem zdefiniowanym na Rysunku 2. Sprawdź czy graf $\mathbb{G}$ zawiera drogę lub cykl Eulera i jeśli tak, to wykorzystując algorytm Fleury'ego wyznacz tą drogę lub cykl.

16. Niech $\mathbb{G}$ będzie grafem zdefiniowanym na Rysunku 3. Sprawdź czy graf $\mathbb{G}$ zawiera drogę lub cykl Eulera i jeśli tak, to wykorzystując algorytm Fleury'ego wyznacz tą drogę lub cykl.