07b - Całka oznaczona

6 lutego 2017

Podział odcinka

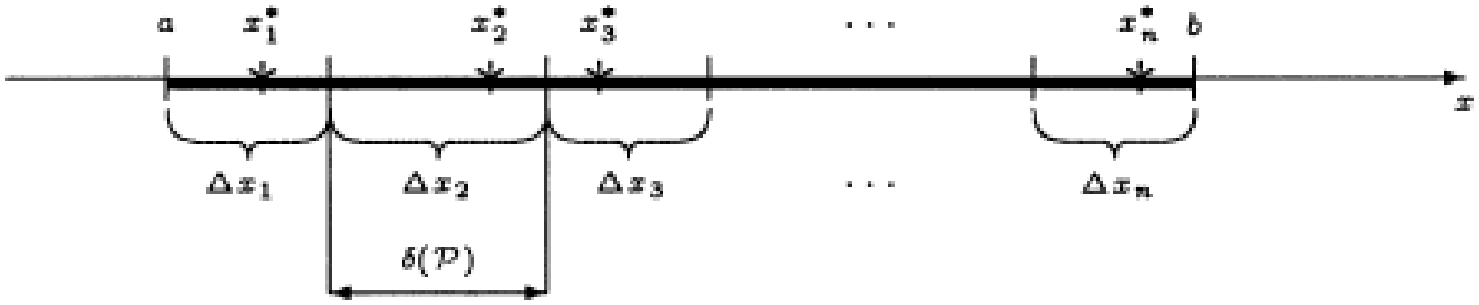
Podziałem odcinka $[a, b]$ na n części, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$, nazywamy zbiór

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

przy czym $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Oznaczenia

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – długość k-tego odcinka podziału $\mathcal{P}$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$;
$\delta(\mathcal{P}) = \max\{\Delta x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ – średnica podziału $\mathcal{P}$;
$x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ – punkt pośredni k-tego odcinka podziału $\mathcal{P}$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$.



Suma całkowa

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$ oraz niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem tego przedziału. Sumą całkową funkcji f odpowiadającą podziałowi $\mathcal{P}$ oraz punktom pośrednim x_k^*, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$, tego podziału nazywamy liczbę

$$\sigma(f, \mathcal{P}) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x_k.$$

Całka oznczona Riemanna

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$. Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a, b]$ definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{def}{=} \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k,$$

o ile po prawej stronie znaku równości granica jest właściwa oraz nie zależy od sposobu podziałów $\mathcal{P}$ przedziału $[a, b]$ ani od sposobów wyboru punktów pośrednich x_k^*, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$. Ponadto przyjmujemy

$$\int_a^a f(x)\,dx \stackrel{def}{=} 0 \quad \text{oraz} \quad \int_b^a f(x)\,dx \stackrel{def}{=} -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{dla } a < b.$$

Całka oznczona Riemanna

Funkcję, dla której istnieje całka oznaczona Riemanna na $[a, b]$, nazywamy funkcją całkowalną na $[a, b]$. Zamiast symbolu $\int_a^b f(x)\,dx$ można pisać

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx \quad \text{lub krótko} \quad \int_a^b f \quad \text{albo też} \quad \int_{[a,b]} f.$$

Uwaga. Każda funkcja całkowalna jest ograniczona, ale nie każda funkcja ograniczona na przedziale jest na nim całkowalna. Przykładem takiej funkcji jest funkcja Dirichleta rozważana na przedziale $[0, 1]$.

Klasyfikacja funkcji calkowalnych w sensie Riemanna

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną.

1. Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, to jest całkowalna.
2. Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, to jest całkowalna.
3. Jeśli funkcja f jest monotoniczna w przedziale domkniętym $[a, b]$, to jest całkowalna.

(obliczanie całek przy pomocy sumy całkowej podziału równomiernego)

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

Uwaga. Istnienie powyższej granicy nie gwarantuje całkowalności funkcji f. Np. dla funkcji $f(x) = D(x)$ (funkcja Dirichleta) i przedziału $[0, 1]$ granica ta jest równa 0, ale funkcja f nie jest całkowalna na tym przedziale.

Ciekawostka historyczna, całka starożytnych

Eudoksos (408-355 p.n.e.) dostarczył wraz z liczbami rzeczywistymi metody dokonywania pomiarów; wprowadził miarę, która bez zastrzeżeń przetrwała do XVII wieku, a naprawdę została zastąpiona dopiero dzięki pracom Riemanna.

Całka Eudoksosa:

Z figury, którą chcemy zmierzyć (w sensie Eudoksosa), wyjmujemy jej część, której miarę znamy (najczęściej wielokąt, wielościan), przy czym musi być ona większa od połowy całej figury (czego dowód jest nietrywialny, bo przecież nie znamy miary całej figury). Miarę tej części oznaczamy S_1.
Z pozostałą częścią figury robimy to samo otrzymując kolejno S_2, S_3, itd.
Eudoksos twierdzi, że suma

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$$

tym lepiej przybliża miarę figury im większe jest n. Oraz, że nieskończona suma daje miarę figury.

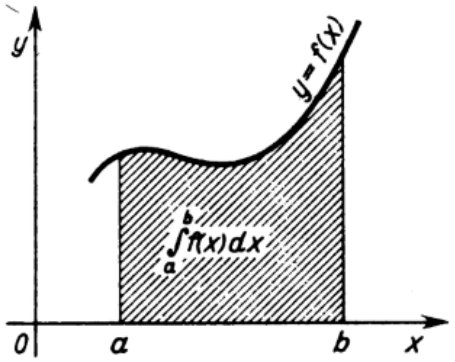
Dla udowodnienia poprawności tej metody potrzebne jest stwierdzenie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$, jest to informacja, którą wówczas Grecy już mieli.

Interpretacja geometryczna

Niech D oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem ciągłej nieujemnej funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$. Pole $|D|$ trapezu krzywoliniowego jest granicą sumy pól prostokątów ΔD_k aproksymujących ten trapez, gdy średnica podziału $\delta(\mathcal{P}) \longrightarrow 0$ (rys. 8.2.1).

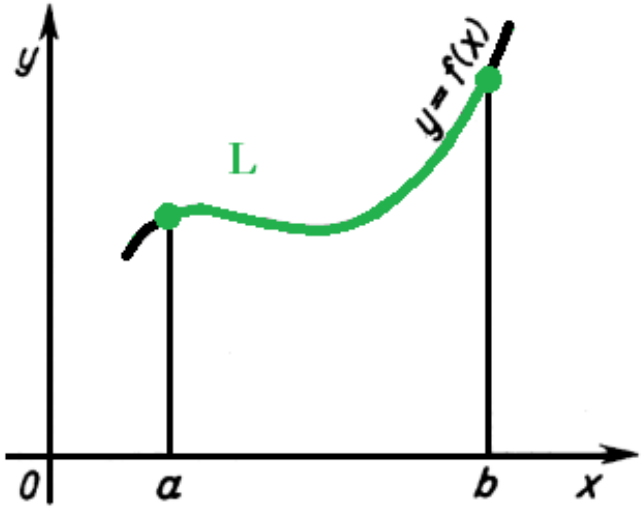
$$|D| = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} |\Delta D_k| = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Gdy wykres funkcji f leży pod osią Ox, wtedy przyjmujemy, że pole trapezu D jest ujemne.



Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci $y = f(x)$, przy czym funkcja $f(x)$ ma w przedziale $a \leq x \leq b$ pochodną ciągłą, to długość łuku $L = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ wyraża się wzorem

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$



Długość łuku paraboli

Przykład Obliczyć długość łuku paraboli $y = x^2$ w przedziale $[-1, 1]$.

Rozwiązanie.

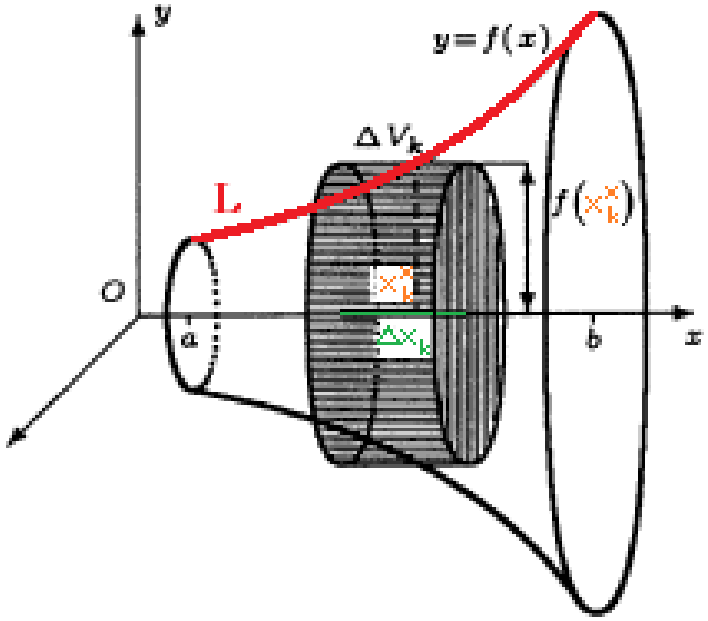
$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right)\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}\right)$$

Niech V oznacza bryłę ograniczoną powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji nieujemnej $y = f(x)$, gdzie $a \leqslant x \leqslant b$, wokół osi Ox oraz płaszczyznami $x = a$, $x = b$. Objętość $|V|$ bryły jest granicą sumy objętości walców ΔV_k aproksymujących tę bryłę, gdy średnica podziału $\delta(\mathcal{P}) \longrightarrow 0$.

$$|V| = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} |\Delta V_k| = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(x_k^*)\,\Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$



Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci $y = f(x)$, przy czym funkcja $f(x)$ ma w przedziale $a \leq x \leq b$ pochodną ciągłą, to *p*ole powierzchni obrotowej S powstałej przez obrót łuku $L = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ dokoła osi OX wyraża się wzorem

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Objętość i pole powierzchni stożka

Przykład Znaleźć objętość i pole powierzchni bocznej stożka o promieniu podstawy r i wysokości h.

Rozwiązanie. Stożek powstaje przy obrocie odcinka prostej o równaniu $y = \frac{r}{h}x$ dookoła osi OX.

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \, dx = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\Big|_0^h = \frac{\pi}{3} r^2 h,$$

$$S = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \, dx = \frac{\pi r \sqrt{r^2 + h^2}}{h^2} x^2 \Big|_0^h = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Twierdzenie [Własności całki jako funkcji górnej granicy całkowania]

Jeśli $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna oraz

$$F(x) \stackrel{df}{=} \int_a^x f(t)\,dt \text{ dla } x \in [a, b], \text{ to}$$

(1) F jest ciągła w $[a, b]$;
(2) jeśli f jest ciągła w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to funkcja F jest różniczkowalna w x_0 oraz $F'(x_0) = f(x_0)$;
(3) jeśli f jest funkcją ciągłą, to F jest funkcją pierwotną dla f.

Twierdzenie *(Newtona - Leibniza, I główne twierdzenie rachunku całkowego)*
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na tym przedziale.

Uwaga. Zamiast $F(b) - F(a)$ będziemy pisali $F(x)\Big|_a^b$ lub $\left[F(x)\right]_a^b$.

Isaac Newton
25 grudnia 1642?/4 stycznia 1643
20 marca?/31 marca 1727

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Szkic dowodu

$$F_1 : [a,b] \ni x \longmapsto F_1(x) \overset{df}{=} \int_a^x f(t)\,dt$$

jest pierwotną funkcji f. Ponieważ F jest także pierwotną,
więc korzystając z faktu, że każde dwie pierwotne różnią się o stałą,

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in [a,b] : \ F(x) - F_1(x) = c,$$

zatem także

$$c = F(a) - \underbrace{F_1(a)}_{=0} = F(a),$$

czyli

$$F(b) - F(a) = F(b) - c = F_1(b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

co należało dowieść.

Podstawowe własności całki oznaczonej

Twierdzenie. *Niech* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ciągłe. Wtedy:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx,$$

$$\int_a^b cf(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx \qquad dla\ c \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie. *Niech* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ciągłe oraz* $f(x) \leqslant g(x)$ *dla* $x \in [a, b]$. *Wtedy*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej
Jeśli funkcje $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są klasy C^1, to

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Obliczyć $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$.

Liczymy

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f'(x) = \sin x & f(x) = -\cos x \\ g(x) = x & g'(x) = 1 \end{array} \right|$$

$$= -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej
Niech $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 i niech f będzie funkcją ciągłą określoną na przedziale zawierającym $g([a, b])$. Wtedy

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.$$

Uwagi

- Przyjmujemy konwencję $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
- W odróżnieniu od całki nieoznaczonej, możemy napisać $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt$ etc.
  (według definicji, wartość całki oznaczonej zależy tylko od przedziału $[a, b]$ i funkcji f).

Przykład. $\int_a^b dx = [x]_a^b = b - a.$

Przykład. $\int_1^2 \ln x \, dx = \int_1^2 1 \cdot \ln x \, dx \underset{\text{przez części}}{=} [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1.$

Przykład. $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1} \, dx \underset{y=x^2+1}{=} \int_1^{10} \frac{1}{y} \, dy = [\ln y]_1^{10} = \ln 10.$

Przykład Wiadomo, że w czasie akcji charytatywnych przyrost dochodu jest wolniejszy wraz z upływem czasu akcji. Inaczej mówiąc, stopa przyrostu dochodu maleje z czasem. Załóżmy, że stopa ta wyraża się wzorem

$$s(t) = -100t^2 + 20\,000,$$

i mierzona jest w zł/dzień. Czas t mierzony jest w dniach. Załóżmy, że stopa przyrosyu kosztu akcji charytatywnej jest stała i równa $10\,000$ zł/dzień. Należy znaleźć:

1. czas trwania akcji, który daje maksymalny dochód,
2. wielkość tego dochodu,
3. koszt akcji,
4. zysk.

Rozwiązanie. Akcję warto prowadzić do chwili, gdy stopa przyrostu dochodu zrówna się ze stopą kosztu.

- $-100t^2 + 20\,000 = 10\,000$
- $t = 10$

- Wielkość dochodu otrzymamy całkując stopę przyrostu dochodu od 0 do 10.
  - $D(10) = \int_0^{10} (-100t^2 + 20\,000)dt = \left[-\frac{100}{3}t^3 + 20\,000t\right]_0^{10} = 166\,666$ zł.
- Koszt akcji wyniesie $K(10) = 10 \cdot 10\,000 = 100\,000$ zł.
- Zatem zysk po 10 dniach wyniesie $Z(10) = D(10) - K(10) = 66\,666$ zł.

Równania parametryczne krzywej

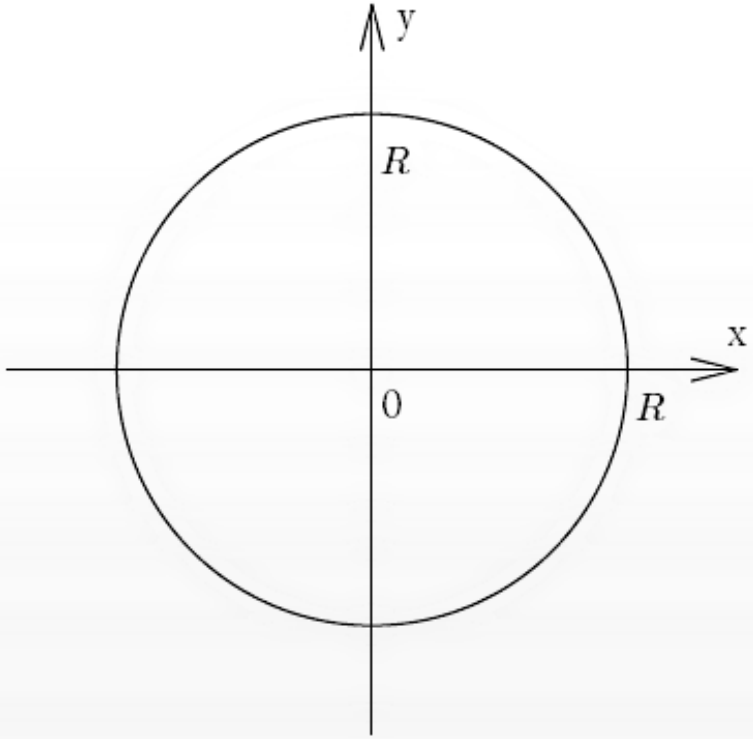
Definicja Niech dane będą dwie ciągłe w przedziale $[t_0, t_1]$ funkcje,

$$x = f(t) \text{ oraz } y = g(t). \qquad \diamond$$

Mówimy wówczas, że funkcje te określają *krzywą parametryczną* na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Zmienna t nazywa się *parametrem*. O krzywej tej mówimy, że równania $\diamond$ są *równaniami parametrycznymi* tej krzywej.

Przykłady krzywych parametrycznych: okrąg

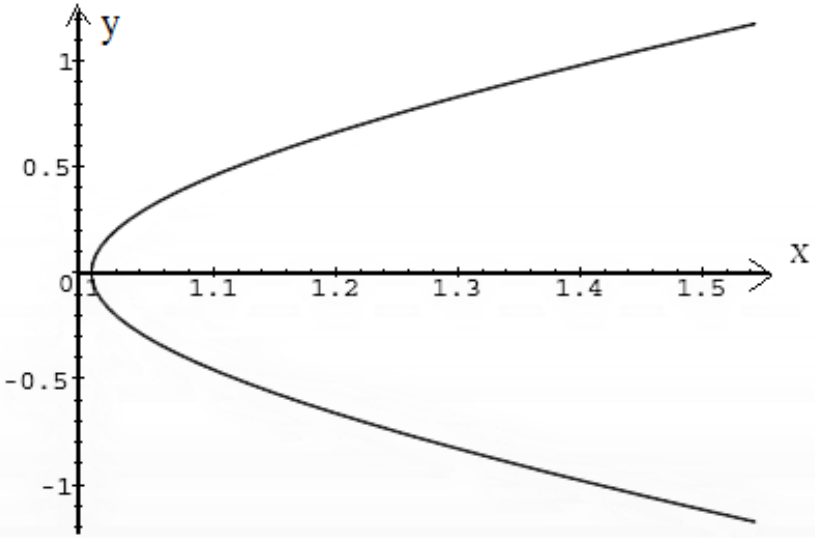
Przykład $x = R\cos t, y = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$ określa okrąg $x^2 + y^2 = R^2$ o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0)$:



Przykłady krzywych parametrycznych: hyperbola

Przykład

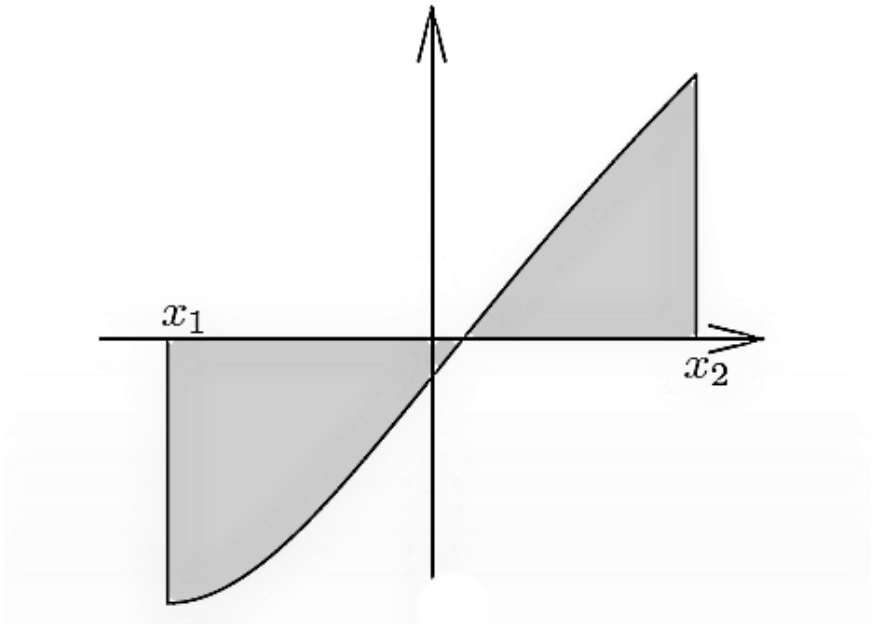
$x = R\cosh t, y = R\sinh t, \quad t \in [-1, 1]$ określa łuk hyperboli $x^2 - y^2 = R^2$:



Pole obszaru, ograniczonego krzywą parametryczną

Twierdzenie *Niech krzywa będzie określona równaniami parametrycznymi* $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, *a przy tym funkcja* $g(t)$ *jest rosnąca i ma w tym przedziale pochodną ciągłą, to pole obszaru, ograniczonego łukiem danej krzywej, odcinkiem osi* Ox *oraz dwoma prostymi* $x = x_2$, $x = x_2$, *gdzie* $x_1 = g(t_1)$, $x_2 = g(t_2)$ *wyraża się wzorem*

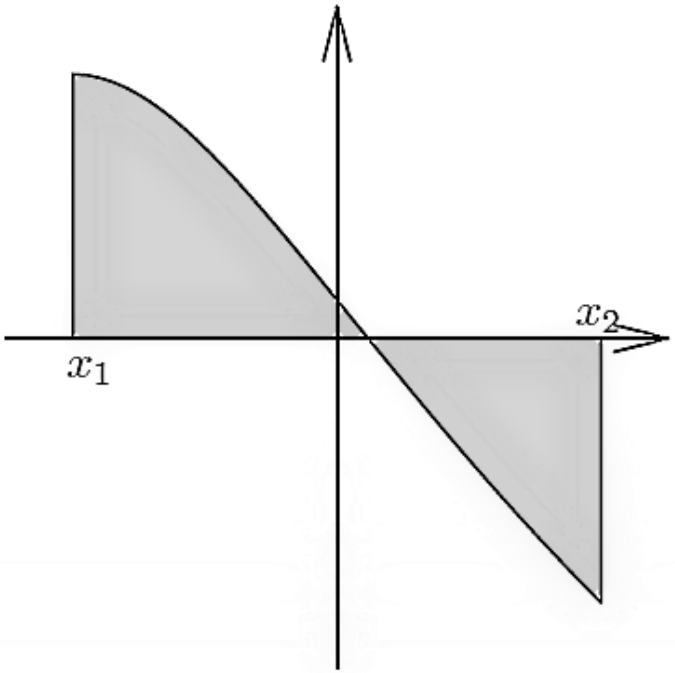
$$P = \int_{x_1}^{x_2} |y|\, dx = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t)\, dt.$$



Pole obszaru, ograniczonego krzywą parametryczną

Twierdzenie *Jeżeli dana krzywa jest określona równaniami parametrycznymi w postaci $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, a przy tym funkcja $g(t)$ jest malejąca i ma w tym przedziale pochodną ciągłą, to pole obszaru, ograniczonego łukiem danej krzywej, odcinkiem osi Ox oraz dwoma prostymi $x = x_1$, $x = x_2$, gdzie $x_1 = g(t_1)$, $x_2 = g(t_2)$, wyraża się wzorem*

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |y|\, dx = -\int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t)\, dt.$$



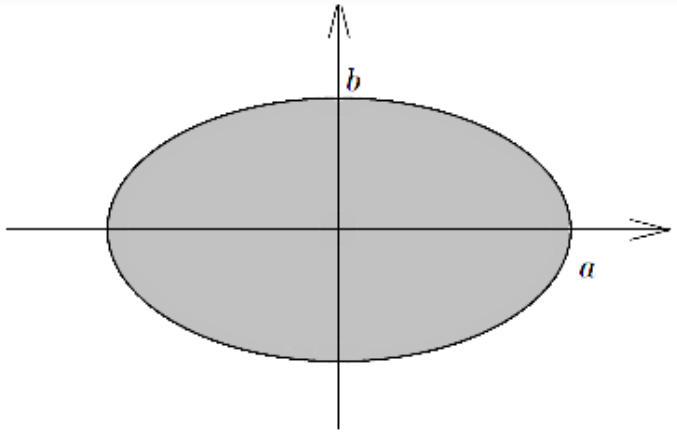
Przykład

Znaleźć pole elipsy o półosiach a i b

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dowód. Równanie parametryczne elipsy to $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Więc

$$P = -4\int_0^{\pi/2} b\sin t \cdot (-a\sin t)dt$$

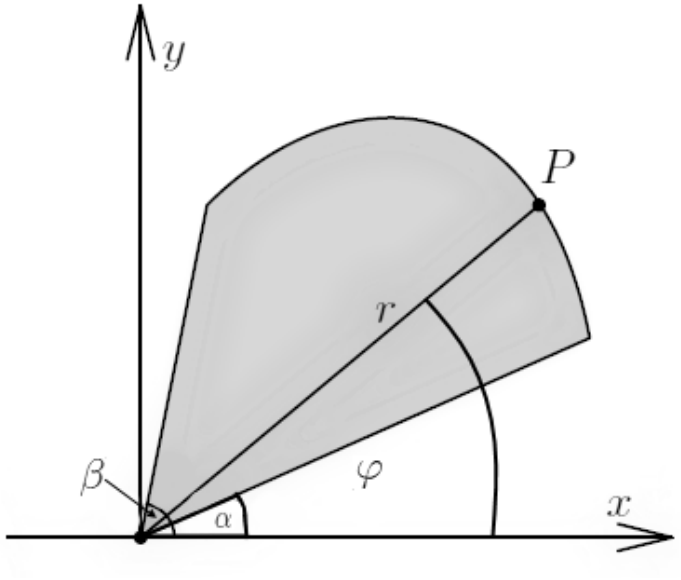


Współrzędne biegunowe

Definicja *Współrzędne biegunowe* punktu $P(x, y)$ płaszczyzny zdefiniowane są jako para (r, φ), gdzie r jest odległością punktu P od początku układu $O(0, 0)$, a φ jest kątem (zorientowanym), jaki tworzy półprosta OP z osią Ox.

Spełnione są równości: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Równanie $r = f(\varphi)$, gdzie $f(\varphi)$ jest ciągłą i nieujemna funkcją w przedziale $[\alpha, \beta]$, nazywa się *równaniem we współrzędnych biegunowych.*



Pole figury we współrzędnych biegunowych

Twierdzenie *Jeżeli krzywa dana jest we współrzędnych biegunowych $r = f(\varphi)$, gdzie $f(\varphi)$ jest funkcją nieujemną ciągłą w przedziale $[\alpha, \beta]$, to pole obszaru, ograniczonego łukiem krzywej oraz promieniami o amplitudach α i β wyraża się wzorem*

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi.$$

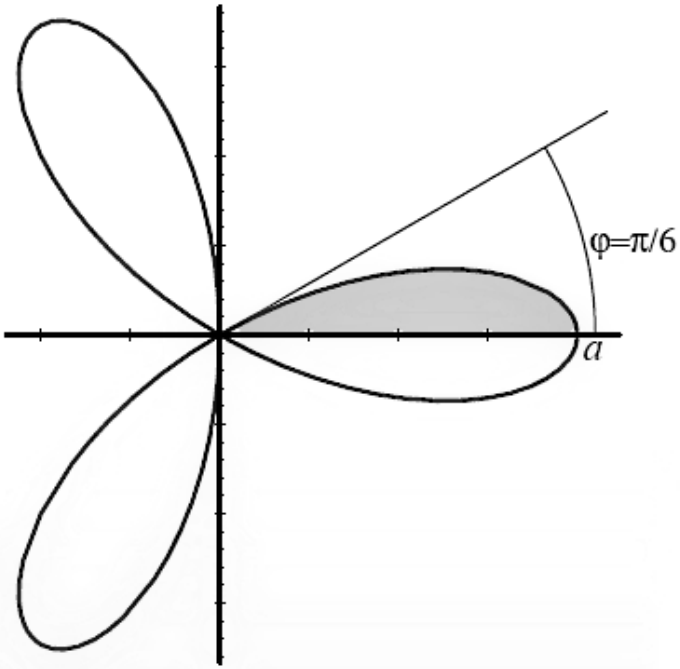
Przykład

Przykład Obliczyć pole, ograniczone rozetą trójkątną $r = \cos 3\varphi$.

Dowód.

$$P = 6\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6} \cos^2 3\varphi \, d\varphi = 3a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos 6\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 3a^2 \left[\frac{\pi}{12} + \frac{\sin 6\varphi}{12}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \right] = \frac{\pi a^2}{4}.$$



Obliczanie długości łuku

Twierdzenie *Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem parametrycznym $x = g(t)$, $y = h(t)$, gdzie funkcje $g(t)$ i $h(x)$ mają w przedziale $[t_1, t_2]$ pochodne ciągłe oraz łuk krzywej nie ma części wielokrotnych, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem*

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Twierdzenie *Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem we współrzędnych biegunowych $r = f(\varphi)$, gdzie funkcja $f(\varphi)$ ma w przedziale $[\alpha, \beta]$ pochodną ciągłą oraz łuk krzywej nie ma części wielokrotnych, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem*

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Obwód asteroidy

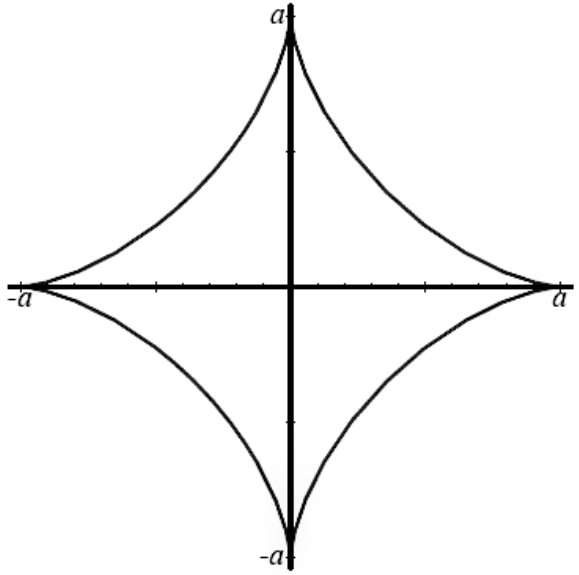
Przykład Obliczyć obwód asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, gdzie $a > 0$,

Rozwiązanie.

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 12a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt =$$

$$= 6a\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$



Bryła obrotowa, równanie parametryczne

Twierdzenie *Jeżeli równanie łuku dane jest w postaci parametrycznej* $x = g(t)$, $y=h(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, *przy czym obie funkcje mają w tym przedziale ciągłe pochodne, funkcja* $g(t)$ *jest w tym przedziale stale monotoniczna, a funkcja* $g(x)$ *przybiera wartości nieujemne, to na objętość bryły obrotowej mamy wzór*

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt}\, dt,$$

a na pole powierzchni obrotowej

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Całki niewłaściwe

Całki niewłaściwe

Definicja. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$ będzie funkcją ciągłą i niech F funkcja pierwotna funkcji f. Załóżmy, że istnieją skończone granice jednostronne $\lim\limits_{x \to a^+} F(x)$, $\lim\limits_{x \to b^-} F(x)$. Wtedy mówimy, że f ma *całkę niewłaściwą* na przedziale (a, b) i piszemy

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x) \overset{\text{ozn.}}{=} [F(x)]_a^b,$$

Przykład. Sprawdzić, czy funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ma całkę niewłaściwą.

Funkcja pierwotna funkcji f jest równa $F(x) = \operatorname{arc\,tg} x + c$. Mamy więc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = [\operatorname{arc\,tg} x]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}(x) - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg}(x) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$