# 08 - Liczby zespolone

27 lutego 2017

# LICZBY ZESPOLONE

## Uwaga 246

Liczby zespolone postaci $(x, 0), (y, 0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi $x, y$.

Rzeczywiście $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ oraz $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z = (a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$.

Oznaczając liczbę $(0, 1)$ przez $i$ i identyfikując liczbę postaci $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą $x$ otrzymamy $z = a + bi$.

Mamy przy tym $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ czyli $i^2 = -1$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Uwaga 246

Liczby zespolone postaci $(x, 0), (y, 0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi $x, y$.

Rzeczywiście $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ oraz $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z = (a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$.

Oznaczając liczbę $(0, 1)$ przez $i$ i identyfikując liczbę postaci $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą $x$ otrzymamy $z = a + bi$.

Mamy przy tym $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ czyli $i^2 = -1$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Uwaga 246

Liczby zespolone postaci $(x, 0), (y, 0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi $x, y$.

Rzeczywiście $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ oraz $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z = (a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$.

Oznaczając liczbę $(0, 1)$ przez $i$ i identyfikując liczbę postaci $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą $x$ otrzymamy $z = a + bi$.

Mamy przy tym $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ czyli $i^2 = -1$.

## Uwaga 246

Liczby zespolone postaci $(x, 0), (y, 0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi $x, y$.

Rzeczywiście $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ oraz $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z = (a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$.

Oznaczając liczbę $(0, 1)$ przez $i$ i identyfikując liczbę postaci $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą $x$ otrzymamy $z = a + bi$.

Mamy przy tym $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ czyli $i^2 = -1$.

## Uwaga 246

Liczby zespolone postaci $(x,0),(y,0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi $x,y$.

Rzeczywiście $(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$ oraz $(x,0)\cdot(y,0)=(xy,0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a,0):a\in\mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z=(a,b)$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z=(a,b)=(a,0)(1,0)+(b,0)(0,1)$.

Oznaczając liczbę $(0,1)$ przez $i$ i identyfikując liczbę postaci $(x,0)$ z liczbą rzeczywistą $x$ otrzymamy $z=a+bi$.

Mamy przy tym $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$ czyli $i^2=-1$.

## Uwaga 246

Liczby zespolone postaci $(x, 0), (y, 0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi $x, y$.

Rzeczywiście $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ oraz $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z = (a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$.

Oznaczając liczbę $(0, 1)$ przez $i$ i identyfikując liczbę postaci $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą $x$ otrzymamy $z = a + bi$.

Mamy przy tym $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ czyli $i^2 = -1$.

## Definicja 247

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\overline{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz $arg\ z$ jako dowolą liczbę rzeczywistą $\varphi$ dla; której $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Jeżeli $arg\ z \in [0, 2\pi)$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez $Arg\ z$.

## Definicja 247

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\overline{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz $arg\ z$ jako dowolą liczbę rzeczywistą $\varphi$ dla; której $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Jeżeli $arg\ z \in [0, 2\pi)$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez $Arg\ z$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Definicja 247

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\overline{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz $arg\ z$ jako dowolą liczbę rzeczywistą $\varphi$ dla; której $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Jeżeli $arg\ z \in [0, 2\pi)$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez $Arg\ z$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Definicja 247

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\overline{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz $arg\ z$ jako dowolą liczbę rzeczywistą $\varphi$ dla; której $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Jeżeli $arg\ z \in [0, 2\pi)$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez $Arg\ z$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Definicja 247

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\bar{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz *arg z* jako dowolą liczbę rzeczywistą $\varphi$ dla; której $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Jeżeli $arg\ z \in [0, 2\pi)$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez *Arg z*.

## Definicja 247

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\, z = a$

część urojoną $Im\, z = b$

sprzężenie $\bar{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz $arg\, z$ jako dowolą liczbę rzeczywistą $\varphi$ dla; której $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Jeżeli $arg\, z \in [0, 2\pi)$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez $Arg\, z$.

## Definicja 247

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\bar{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz $arg\ z$ jako dowolą liczbę rzeczywistą $\varphi$ dla; której $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Jeżeli $arg\ z \in [0, 2\pi)$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez $Arg\ z$.

## Definicja 248

Dowolną liczbę zespoloną $z$ możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $\varphi = arg\ z$.

## Twierdzenie 249

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin \varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin \varphi_2)$ wtedy

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$

$|z_1||z_2| (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin \varphi_1\sin \varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin \varphi_2 + \sin\varphi_1\cos \varphi_2)) =$

$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Definicja 248

Dowolną liczbę zespoloną $z$ możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi = arg\ z$.

## Twierdzenie 249

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ wtedy

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$|z_1||z_2|\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right) =$

$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Definicja 248

Dowolną liczbę zespoloną $z$ możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $\varphi = arg\ z$.

## Twierdzenie 249

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin \varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin \varphi_2)$ wtedy

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$|z_1||z_2| \left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin \varphi_1\sin \varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin \varphi_2 + \sin\varphi_1\cos \varphi_2)\right) =$$

$$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)).$$

# LICZBY ZESPOLONE

## Definicja 248

Dowolną liczbę zespoloną $z$ możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $\varphi = arg\ z$.

## Twierdzenie 249

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin \varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin \varphi_2)$ wtedy

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$

$|z_1||z_2|\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin \varphi_1\sin \varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin \varphi_2 + \sin\varphi_1\cos \varphi_2)) =$

$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Definicja 248

Dowolną liczbę zespoloną $z$ możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi = arg\ z$.

## Twierdzenie 249

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ wtedy

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$|z_1||z_2|\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right) =$$

$$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

## Definicja 248

Dowolną liczbę zespoloną $z$ możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi = arg\ z$.

## Twierdzenie 249

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ wtedy

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$|z_1||z_2|\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right) =$

$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Twierdzenie 250

Dzieląc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej dzielimy moduły i odejmujemy argumenty.

## Twierdzenie 251

Podnosząc liczbę zespoloną w postaci trygonometrycznej do potęgi $n$ podnosimy moduł do potęgi $n$ i mnożymy argument oprzez $n$.

### Twierdzenie 250

Dzieląc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej dzielimy moduły i odejmujemy argumenty.

### Twierdzenie 251

Podnosząc liczbę zespoloną w postaci trygonometrycznej do potęgi $n$ podnosimy moduł do potęgi $n$ i mnożymy argument oprzez $n$.

## Twierdzenie 252

Wszystkie pierwiastki stopnia $n$ liczby zespolonej $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, są postaci $\omega_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$, gdzie $k \in \{0,1,2,3,\dots,n-1\}$.

## Twierdzenie 253

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Twierdzenie 252

Wszystkie pierwiastki stopnia $n$ liczby zespolonej $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, są postaci $\omega_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$.

## Twierdzenie 253

Niech $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

i jeśli $z_2 \neq 0$ to

$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Twierdzenie 252

Wszystkie pierwiastki stopnia $n$ liczby zespolonej
$|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, są postaci $\omega_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$,
gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$.

## Twierdzenie 253

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

## Twierdzenie 252

Wszystkie pierwiastki stopnia $n$ liczby zespolonej $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, są postaci $\omega_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$.

## Twierdzenie 253

Niech $z_1$, $z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Twierdzenie 254

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

## Przykład 255

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczas $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

# LICZBY ZESPOLONE

## Twierdzenie 254

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

## Przykład 255

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

# LICZBY ZESPOLONE

## Twierdzenie 254

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

## Przykład 255

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczas $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

# LICZBY ZESPOLONE

## Twierdzenie 254

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

## Przykład 255

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

# LICZBY ZESPOLONE

### Twierdzenie 254

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

### Przykład 255

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

# LICZBY ZESPOLONE

## Twierdzenie 254

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

## Przykład 255

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 32i$

# LICZBY ZESPOLONE

## Twierdzenie 254

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

## Przykład 255

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$$

## Twierdzenie 254

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

## Przykład 255

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

# LICZBY ZESPOLONE

## Przykład 256

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczs $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{12})$,

$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{12})$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Przykład 256

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczas $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\tfrac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+i\tfrac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\tfrac{11\pi}{12}),$$

$$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\tfrac{19\pi}{12}).$$

# LICZBY ZESPOLONE

## Przykład 256

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczas $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\tfrac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+i\tfrac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\tfrac{11\pi}{12}),$$

$$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\tfrac{19\pi}{12}).$$

# LICZBY ZESPOLONE

## Przykład 256

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczas $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{12}),$$

$$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{12}).$$

# LICZBY ZESPOLONE

## Przykład 256

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczas $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{12})$,

$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{12})$.

# LICZBY ZESPOLONE

**Przykład 256**

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczs $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{12})$,

$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{12})$.

# LICZBY ZESPOLONE

## Przykład 256

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczas $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{12}),$$

$$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{12}).$$

## Przykład 256

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczas $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{12})$,

$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{12})$.