10 Równania różniczkowe zwyczajne

25 kwietnia 2017

Definicja 293

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie postaci $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots y^{(n)}(x)) = 0$, gdzie zmienna niezależna $x \in I$, I jest przedziałem $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ jest szukaną funkcja zaś $F : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest daną funkcją.

Definicja 294

Rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots y^{(n)}(x)) = 0$ nazywamy funkcję $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^n$ taką, że po podstawieniu do równania otrzymujemy tożsamość.

Definicja 293

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie postaci $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots y^{(n)}(x)) = 0$, gdzie zmienna niezależna $x \in I$, I jest przedziałem $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ jest szukaną funkcja zaś $F : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest daną funkcją.

Definicja 294

Rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots y^{(n)}(x)) = 0$ nazywamy funkcję $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^n$ taką, że po podstawieniu do równania otrzymujemy tożsamość.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Definicja 295

Problemem początkowym nazywamy równanie różniczkowe $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)) = 0$ z warunkami postaci

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Definicja 296

Rozwiązaniem problemu początkowego nazywamy funkcję $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^n$ taką, że jest ona rozwiązaniem równania

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)) = 0 \text{ a ponadto } \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} .$$

Definicja 297

Jeżeli można rozwikłać funkcję F względem $y^{(n)}$ to postać równania $y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n-1)}(x))$ nazywamy postacią normalną równania różniczkowego.

Twierdzenie 298

Jeżeli funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ to problem początkowy $y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n-1)}(x))$,

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Definicja 297

Jeżeli można rozwikłać funkcję F względem $y^{(n)}$ to postać równania $y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n-1)}(x))$ nazywamy postacią normalną równania różniczkowego.

Twierdzenie 298

Jeżeli funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ to problem początkowy $y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n-1)}(x))$,

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Definicja 299

Równania postaci $f(x)\,dx = g(y)\,dy$ lub $f(x)\,dx - g(y)\,dy = 0$, oznaczają równanie $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ bądź $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{g(y)}{f(x)}$. Równanie powyższej postaci nazywamy równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Twierdzenie 300

Rozwiązanie równania postaci $f(x)\,dx = g(y)\,dy$ otrzymujemy obliczając całki po obu stronach równości $\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy$.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Definicja 299

Równania postaci $f(x)\,dx = g(y)\,dy$ lub $f(x)\,dx - g(y)\,dy = 0$, oznaczają równanie $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ bądź $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{g(y)}{f(x)}$. Równanie powyższej postaci nazywamy równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Twierdzenie 300

Rozwiązanie równania postaci $f(x)\,dx = g(y)\,dy$ otrzymujemy obliczając całki po obu stronach równości $\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy$.

Definicja 301

Równanie postaci $y' = f(\frac{y}{x})$ nazywamy równaniem różniczkowym jednorodnym.

Twierdzenie 302

Podstawienie $u = \frac{y}{x}$ sprowadza równanie $y' = f(\frac{y}{x})$ do postaci $xu' = f(u) - u$.

Definicja 301

Równanie postaci $y' = f(\frac{y}{x})$ nazywamy równaniem różniczkowym jednorodnym.

Twierdzenie 302

Podstawienie $u = \frac{y}{x}$ sprowadza równanie $y' = f(\frac{y}{x})$ do postaci $xu' = f(u) - u$.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Definicja 303

Równania postaci $y' + f(x)y = g(x)$ nazywamy równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu.

Definicja 304

Równania postaci $y' + f(x)y = 0$ nazywamy równaniem liniowym jednorodnym pierwszego rzędu.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Definicja 303

Równania postaci $y' + f(x)y = g(x)$ nazywamy równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu.

Definicja 304

Równania postaci $y' + f(x)y = 0$ nazywamy równaniem liniowym jednorodnym pierwszego rzędu.

Uwaga 305

Jednorodne równane liniowe pierwszego rzędu jest równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych. Rozwiązanie równania $y' + f(x)y = 0$ jest postaci $y = C \cdot exp(-\int f(x)\,dx)$.

Uwaga 306

Rozwiązania równania $y' + f(x)y = g(x)$ poszukujemy w postaci $y = C(x) \cdot exp(-\int f(x)\,dx)$.

Uwaga 305

Jednorodne równane liniowe pierwszego rzędu jest równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych. Rozwiązanie równania $y' + f(x)y = 0$ jest postaci $y = C \cdot exp(-\int f(x)\,dx)$.

Uwaga 306

Rozwiązania równania $y' + f(x)y = g(x)$ poszukujemy w postaci $y = C(x) \cdot exp(-\int f(x)\,dx)$.

Definicja 307

Równania postaci $y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}$ nazywamy równaniem Bernouliego.

Twierdzenie 308

Podstawienie $z = y^{1-\alpha}$ sprowadza równanie Bernouliego do równania liniowego.

Definicja 307

Równania postaci $y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}$ nazywamy równaniem Bernouliego.

Twierdzenie 308

Podstawienie $z = y^{1-\alpha}$ sprowadza równanie Bernouliego do równania liniowego.

Definicja 307

Równania postaci $y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}$ nazywamy równaniem Bernouliego.

Twierdzenie 308

Podstawienie $z = y^{1-\alpha}$ sprowadza równanie Bernouliego do równania liniowego.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE II RZĘDU

Twierdzenie 309

Równanie $F(x, y', y'') = 0$ sprowadzamy do równania rzędu pierwszego podstawieniem $p(x) = y'(x)$.

Twierdzenie 310

Równanie $F(y, y', y'') = 0$ sprowadzamy do równania rzędu pierwszego podstawieniem $p(y) = y'(y)$.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE II RZĘDU

Twierdzenie 309

Równanie $F(x, y', y'') = 0$ sprowadzamy do równania rzędu pierwszego podstawieniem $p(x) = y'(x)$.

Twierdzenie 310

Równanie $F(y, y', y'') = 0$ sprowadzamy do równania rzędu pierwszego podstawieniem $p(y) = y'(y)$.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE WYŻSZYCH RZĘDÓW

Definicja 311

Równanie postaci
$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_0(x)y = f(x)$ nazywamy równaniem różniczkowym liniowym rzędu n. Jeżeli $f \equiv 0$ to mówimy, że jest to równanie różniczkowe liniowe rzędu n jednorodne.

Uwaga 312

Kombinacja liniowa o współczynnikach rzeczywistych rozwiązań równania różniczkowego liniowego rzędu n jednorodnego jest rozwiązaniem tego równania.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE WYŻSZYCH RZĘDÓW

Definicja 311

Równanie postaci
$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_0(x)y = f(x)$ nazywamy równaniem różniczkowym liniowym rzędu n. Jeżeli $f \equiv 0$ to mówimy, że jest to równanie różniczkowe liniowe rzędu n jednorodne.

Uwaga 312

Kombinacja liniowa o współczynnikach rzeczywistych rozwiązań równania różniczkowego liniowego rzędu n jednorodnego jest rozwiązaniem tego równania.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE WYŻSZYCH RZĘDÓW

Twierdzenie 313

Niech $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ będą rozwiązaniami równania różniczkowego liniowego rzędu n jednorodnego wtedy poniższe warunki są równoważne
$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ są liniowo niezależne.
Wyznacznik Wrońskiego $W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ jest różny od zera, gdzie

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Twierdzenie 314

Jeżeli wyznacznik Wrońskiego $W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ jest różny od zera to $y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k$ jest rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego liniowego rzędu n jednorodnego (tzn każde rozwiązanie jest tej postaci).

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE WYŻSZYCH RZĘDÓW

Twierdzenie 313

Niech $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ będą rozwiązaniami równania różniczkowego liniowego rzędu n jednorodnego wtedy poniższe warunki są równoważne
$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ są liniowo niezależne.
Wyznacznik Wrońskiego $W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ jest różny od zera, gdzie

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Twierdzenie 314

Jeżeli wyznacznik Wrońskiego $W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ jest różny od zera to $y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k$ jest rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego liniowego rzędu n jednorodnego (tzn każde rozwiązanie jest tej postaci).

Twierdzenie 315

Jeżeli wyznacznik Wrońskiego $W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ jest różny od zera to $y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k$ jest rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego liniowego rzędu n niejednorodnego, gdzie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ wyznaczamy z układu równań:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots C_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases},$$

Definicja 316

Równanie postaci $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{''} + a_1 y^{'} + a_0 y = 0$, gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ nazywamy równaniem różniczkowym liniowym rzędu n jednorodnym o stałych współczynnikach.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE WYŻSZYCH RZĘDÓW

Twierdzenie 315

Jeżeli wyznacznik Wrońskiego $W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ jest różny od zera to $y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k$ jest rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego liniowego rzędu n niejednorodnego, gdzie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ wyznaczamy z układu równań:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots C_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases},$$

Definicja 316

Równanie postaci $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{''} + a_1 y^{'} + a_0 y = 0$, gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ nazywamy równaniem różniczkowym liniowym rzędu n jednorodnym o stałych współczynnikach.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE II RZĘDU

Twierdzenie 317

Niech λ będzie k krotnym pierwiastkiem równania $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$ wtedy $y_i = x^{i-1}e^{\lambda x}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ są rozwiązaniami równanie postaci $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{''} + a_1 y^{'} + a_0 y = 0$ gdy λ rzeczywiste. Jeżeli λ jest zespolone to $\lambda = \alpha + \beta i$ więc $\lambda = \alpha - \beta i$ też jest pierwiastkiem i wtedy $y_i = x^{i-1}e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ są rozwiązaniami równanie postaci $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{''} + a_1 y^{'} + a_0 y = 0$.

Twierdzenie 318

Dowolne rozwiązanie równania różniczkowego liniowego rzędu n niejednorodnego o stałych współczynnikach jest sumą r.o.r.l.j i rozwiązania szczególnego.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE II RZĘDU

Twierdzenie 317

Niech λ będzie k krotnym pierwiastkiem równania $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$ wtedy $y_i = x^{i-1}e^{\lambda x}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ są rozwiązaniami równanie postaci $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{''} + a_1 y^{'} + a_0 y = 0$ gdy λ rzeczywiste. Jeżeli λ jest zespolone to $\lambda = \alpha + \beta i$ więc $\lambda = \alpha - \beta i$ też jest pierwiastkiem i wtedy $y_i = x^{i-1}e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ są rozwiązaniami równanie postaci $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{''} + a_1 y^{'} + a_0 y = 0$.

Twierdzenie 318

Dowolne rozwiązanie równania różniczkowego liniowego rzędu n niejednorodnego o stałych współczynnikach jest sumą r.o.r.l.j i rozwiązania szczególnego.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE II RZĘDU

Twierdzenie 317

Niech λ będzie k krotnym pierwiastkiem równania $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$ wtedy $y_i = x^{i-1}e^{\lambda x}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ są rozwiązaniami równanie postaci $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{''} + a_1 y^{'} + a_0 y = 0$ gdy λ rzeczywiste. Jeżeli λ jest zespolone to $\lambda = \alpha + \beta i$ więc $\lambda = \alpha - \beta i$ też jest pierwiastkiem i wtedy $y_i = x^{i-1}e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ są rozwiązaniami równanie postaci $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{''} + a_1 y^{'} + a_0 y = 0$.

Twierdzenie 318

Dowolne rozwiązanie równania różniczkowego liniowego rzędu n niejednorodnego o stałych współczynnikach jest sumą r.o.r.l.j i rozwiązania szczególnego.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE II RZĘDU

Twierdzenie 319

Jeżeli $f(x) = p_m(x)e^{rx}$, gdzie p_m jest wielomianem stopnia m to rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci
$q_m(x)e^{rx}$ jeżeli r nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,
$x^k q_m(x)e^{rx}$ jeżeli r jest k krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.
Jeżeli $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x$, gdzie p_m jest wielomianem stopnia m,q_l jest wielomianem stopnia l to rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci
$e^{\alpha x}(P_s(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$, jeżeli $\alpha + \beta i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,
$x^k e^{\alpha x}(P_s(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$, jeżeli $\alpha + \beta i$ jeżeli r jest k krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.
Wielomiany P_s, Q_s są stopnia $s = \max\{m, l\}$.

Twierdzenie 319

Jeżeli $f(x) = p_m(x)e^{rx}$, gdzie p_m jest wielomianem stopnia m to rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci
$q_m(x)e^{rx}$ jeżeli r nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,
$x^k q_m(x)e^{rx}$ jeżeli r jest k krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.
Jeżeli $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x$, gdzie p_m jest wielomianem stopnia m,q_l jest wielomianem stopnia l to rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci
$e^{\alpha x}(P_s(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$, jeżeli $\alpha + \beta i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,
$x^k e^{\alpha x}(P_s(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$, jeżeli $\alpha + \beta i$ jeżeli r jest k krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.
Wielomiany P_s, Q_s są stopnia $s = \max\{m, l\}$.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE II RZĘDU

Twierdzenie 319

Jeżeli $f(x) = p_m(x)e^{rx}$, gdzie p_m jest wielomianem stopnia m to rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci
$q_m(x)e^{rx}$ jeżeli r nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,
$x^k q_m(x)e^{rx}$ jeżeli r jest k krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.
Jeżeli $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x$, gdzie p_m jest wielomianem stopnia m,q_l jest wielomianem stopnia l to rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci
$e^{\alpha x}(P_s(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$, jeżeli $\alpha + \beta i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,
$x^k e^{\alpha x}(P_s(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$, jeżeli $\alpha + \beta i$ jeżeli r jest k krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.
Wielomiany P_s, Q_s są stopnia $s = \max\{m, l\}$.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE II RZĘDU

Twierdzenie 319

Jeżeli $f(x) = p_m(x)e^{rx}$, gdzie p_m jest wielomianem stopnia m to rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci
$q_m(x)e^{rx}$ jeżeli r nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,
$x^k q_m(x)e^{rx}$ jeżeli r jest k krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.
Jeżeli $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x$, gdzie p_m jest wielomianem stopnia m,q_l jest wielomianem stopnia l to rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci
$e^{\alpha x}(P_s(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$, jeżeli $\alpha + \beta i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,
$x^k e^{\alpha x}(P_s(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$, jeżeli $\alpha + \beta i$ jeżeli r jest k krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.
Wielomiany P_s, Q_s są stopnia $s = \max\{m, l\}$.

Twierdzenie 319

Jeżeli $f(x) = p_m(x)e^{rx}$, gdzie p_m jest wielomianem stopnia m to rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci
$q_m(x)e^{rx}$ jeżeli r nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,
$x^k q_m(x)e^{rx}$ jeżeli r jest k krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.
Jeżeli $f(x) = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x$, gdzie p_m jest wielomianem stopnia m,q_l jest wielomianem stopnia l to rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci
$e^{\alpha x}(P_s(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$, jeżeli $\alpha + \beta i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,
$x^k e^{\alpha x}(P_s(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$, jeżeli $\alpha + \beta i$ jeżeli r jest k krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.
Wielomiany P_s, Q_s są stopnia $s = \max\{m, l\}$.