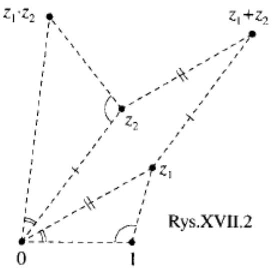
Rozwiązanie sprawy rodzaju bytu liczb zespolonych jest bardzo proste. Jest to zbiór par liczb rzeczywistych z działaniami określonymi przez wzory

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

(jeśli ktoś lubi algebrę) lub — równoważnie — zbiór punktów płaszczyzny z działaniami określonymi przez konstrukcje z rysunku XVII.2 (jeśli ktoś lubi geometrię).



Rys.XVII.2

Z książki *Wykłady z historii matematyki*, Marek Kordos, SCRIPT, Warszawa 2010

Temat IX, Liczby zespolone.

1. Obliczyć wartość podanych wyrażeń:

$$a)\ (1-3i)+(4+i), \quad b)\ (\sqrt{3}-i)-(5\sqrt{5}+i), \quad c)\ (1-3i)(4+i), \quad d)\ \frac{7-i}{1+3i},$$

$$e)\ (1+i)^2, \quad f)\ (1+i)^3, \quad g)\ (1+i)^4, \quad h)\ (3-i)^2.$$

2. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Znaleźć:

$$a)\ \Re\tfrac{1}{z}\ (\text{inny zapis}\ \mathrm{Re}\tfrac{1}{z}), \quad b)\ \Im\tfrac{\bar{z}}{z-1}\ (\text{inny zapis}\ \mathrm{Im}\tfrac{\bar{z}}{z-1}),$$

$$c)\ \Re\tfrac{2z}{z+i}, \quad d)\ \Im\tfrac{iz^2}{\bar{z}}.$$

3. Na płaszczyźnie zespolonej (płaszczyźnie, której punktom przyporządkowano liczby zespolone) zaznaczyć punkty z^0, z^2, z^3, z^4, z^5 z^6, z^7, z^8, gdzie

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$,

b) $z = 1 + i$.

4. Wykazać, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 moduł ich różmnicy $|z_1 - z_2|$ jest równy odległości punktów z_1 i z_2.

5. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory określone podanymi warunkami:

a) $|z - 3i| = 2$,

b) $|z - 3i| = \Im z$,

c) $2 \leqslant |z + 4 - i| \leqslant 3$,

e) $|z + i| = |z - 2|$.

6. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory określone podanymi warunkami:

a) $\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$,

b) $|z-3i| = \Im z$,

c) $2 \leqslant |z+4-i| \leqslant 3$,

e) $|z+i| = |z-2|$.

7. Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

$$a)\ i, \qquad b)\ -100, \qquad c)\ 2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i, \qquad d)\ -1+\sqrt{3}i.$$

8. Podane liczby zespolone zapisać w postaci algebraicznej i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej:

$$a)\ e^{-\frac{\pi}{2}i}, \qquad b)\ e^{\pi i}, \qquad c)\ e^{\frac{2}{3}\pi i}, \qquad d)\ e^{3i}.$$

9. Podane liczby zespolone zapisać w postaci wykładniczej:

$$a)\ -4i, \qquad b)\ 1+i, \qquad c)\ 16, \qquad d)\ 4-4\sqrt{3}i.$$

10. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć podane wyrażenia:

$$a)\ (1-\sqrt{3}i)^8, \qquad b)\ \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}, \qquad c)\ \frac{(1-i)^{14}}{(1+i)^{10}}, \qquad d)\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}.$$

11. Obliczyć podane pierwiastki z liczb zespolonych:

$$a)\ \sqrt[3]{-16}, \qquad b)\ \sqrt[5]{-1-i}, \qquad c)\ \sqrt[12]{-1+\sqrt{3}i}, \qquad d)\ \sqrt[4]{64}.$$