Lista 1
I Zagadnienia wstępne i funkcje jednej zmiennej.

1. Wyznacz dziedzinę funkcji:

Dziedziną funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy zbiór D_f tych $x \in \mathbb{R}$, dla których można obliczyć wartość $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$,

b) $g(x) = \log_5 |\cos x|$.

2. Znajdz zbiory wartości funkcji:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 2$,

b) $g(x) = \sin 2x + \cos 2x$,
wskazówka: $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

3. Zbadać czy podane funkcje są ograniczone z dołu , są ograniczone z góry, są ograniczone na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = 1 - x^5$, $\mathbb{R}$,

b) $g(x) = 3 - \sin x$, $[0, 2\pi)$.

4. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = 2x$, $\mathbb{R}$,

b) $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $[0, \infty)$,

c) $h(x) = x + \frac{1}{x}$, $(0, \infty)$.

Funkcja f jest rosnąca (niemalejąca) na zbiorze $X \subseteq D_f$, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z warunku $x_1 < x_2$ wynika nierówność

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \leqslant f(x_2)).$$

podobnie określa się funkcję malejącą oraz nierosnącą. Funkcja jest monotoniczna na zbiorze, gdy jest rosnąca, niemalejąca lub nierosnącana tym zbiorze.

5. Napisać wzory funkcji złożonych $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, oraz określić ich dziedziny:

a) $f(x) = x^3$, $g(x) = 3^x$,

b) $f(x) = -2x$, $g(x) = \log x$.

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^4$,

d) $f(x) = \frac{1}{x+3}$, $g(x) = \frac{1}{x+4}$,

e) $f(x) = |x + 1|$, $g(x) = \sqrt{x}$,

f) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Złożeniem funkcji f i g nazywamy funkcję $g \circ f$ określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

6. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = x^4$, $(-\infty, 0]$,

b) $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+1}$, $[0, \infty)$.

7. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{3^x+9}$,

b) $f(x) = 4 - \sqrt{x + 1}$.

Definicja: Niech funkcja $f : X \to Y$, będzie na i różnowartościowa. Funkcją odwrotną do f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \to X$, określoną warunkiem

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

8. Uprość wyrażenia

a) $x + |3 - x| + 5|x - 1|$, gdy $1 < x < 3$,

b) $|x - 1| + |x + 2| + |x|$, gdy $x < -2$,

c) $|x - 2| + \frac{x}{|x|} - 2|x|$, gdy $x < -1$.

9. a) Rozwiąż równanie $|x - 3| + |x - 5| = 6$.

b) Rozwiąż nierówność $||2x-1|-2|>3$.

c) Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} |x+2|+|y-3|=4, \\ |x+2|=3y-3 \end{cases}.$$

10. Korzystając z interpretacji geometrycznej $|x-a|$ zaznacz na osi liczbowej $\mathbb{R}$ rozwiązania nierówności

a) $|5x-1|\leqslant 10$, b) $\frac{1}{2}|2-x|>3$, c) $|3x-2|<4$, d) $|3-2x|\geqslant 8$.

11. Rozwiąż równanie

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-3}=9$, b) $2\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x=-1$, c) $\left(\sqrt{3}\right)^x-\sqrt[3]{3}=0$, d) $4^x+2^{x+1}=3$.

12. Rozwiązać równanie $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$.

13. Rozwiązać równanie $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^x+5^{x-1}+5^{x-2}$.

14. Rozwiąż nierówności wykładnicze

a) $5^{4x-2}<25^{2-x}$, b) $0.5^{\frac{2x+1}{2x}}<0.0625$, c) $2^{x+4}+2^{x+5}+5\cdot 2^{x+2}<68$.

15. Dla jakich argumentów funkcja $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^{4x-5}$ przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x)=\left(\frac{16}{9}\right)^{2x+1}$?

16. Rozwiązać równanie

$$x^2-|7x|=0.$$

17. Rozwiązać nierówność

a)

$$4x-5<x|x|,$$

b)

$$x^2+9>|3x|-3x,$$

c)

$$(2x^2+1)|2x-1|<3(2x-1).$$

18. Naszkicować wykres funkcji

$$f(x)=(3-|x|)(x+1).$$

19. Dla jakich wartości parametru k równanie

$$(k-2)x^2-4x+k+1$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

20. Na płaszczyźnie Oxy narysować zbiory: A, B, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$ jeśli

$$A=\{(x,y): x^2+(y-2)^2\leqslant 4\},$$

$$B=\{(x,y): y>x^2+4\}.$$

21. Rozwiązać nierówność

a)

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \geqslant 4,$$

b)

$$\log_3(\sin x) \leqslant -\tfrac{1}{3} \text{ dla } x \in (0, \pi),$$

c)

$$\log_2 5 - \log_2(x-5) > 2.$$

22. Rozwiązać równanie

a)

$$\left(\tfrac{1}{36}\right)^x 216^{x^2-2} = \tfrac{1}{6},$$

b)

$$5^{x^2} + 5^{x^2+1} + 5^{x^2+2} + 5^{x^2+3} = 780 \cdot 5^{x-1},$$

c)

$$\log_5(x+\sqrt{x}) + \log_5(x-\sqrt{x}) = 0.$$

23. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x+2}(|x-3| - |x+1| + 4) = 0.$$

24. Narysować wykres funkcji

$$f(x) = \frac{|x|-4}{x-4},$$

a następnie rozwiązać graficznie nierówność $f(x) > 0$.

25. Dla jakich wartości x z przedziału $(-\infty, \frac{1}{3}\rangle$ spełniona jest nierówność

$$\frac{(9x^2-3x-1)|3x-1|}{9x^2-1} \geqslant 1?$$

26. Rozwiązać nierówność

a)

$$4x^2 - 1 \leqslant 2x|2x-1|,$$

b)

$$\frac{|2x-1|}{2x-1} + \frac{x+1}{|x+1|} \geqslant 0,$$

c)

$$\left|\frac{8x^3-1}{4x^2-1}\right| < 2x^2 + 2x + 1,$$

d)

$$\frac{25x^2+1}{5x} > \frac{25x^2}{5x+1},$$

e)

$$1 - \frac{1}{x} \geqslant 0.$$

27. Dla jakiej wartości parametru m równanie

$$mx^2 - mx + 1 - m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki dodatnie.

28. Wykaż że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność

$$a^x + a^{-x} \geqslant 2.$$

29. Na płaszczyźnie Oxy narysować zbiory A, B, $A \cap B$, $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$, jeśli

$$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ x + y \geqslant -1\},$$

$$B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

30. Rozwiązać równanie

a)

$$2 + \log_2 x = \frac{6}{1 + \log_2 x},$$

b)

$$(\sqrt{2})^{8x} - 11 \cdot 16^{-x} = 10,$$

c)

$$4^{\sqrt{x}} + 4 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 12,$$

d)

$$\log_3[\log_5 (22x + 7)] = 0,$$

e)

$$81^{\frac{1}{x+1}} - 8 \cdot 81^{\frac{1}{2x+2}} + 15 = 0,$$

f)

$$\log_x(2 - \sqrt{x}) = \frac{1}{2}.$$

31. Rozwiązać nierówność

a)

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2} > \left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^x,$$

b)

$$2^{x+2} - 3^{x+1} < 2^x,$$

c)

$$4^{x^2} > 2^{x^2+2} - 8,$$

d)

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) > 1.$$