

Macierze i wyznaczniki

Zadanie 1. Obliczyć

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 2. Uzasadnić, że dla macierzy kwadratowych A, B prawdziwy jest wzór $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Zadanie 3. Sprawdzić czy iloczyn macierzy symetrycznych (antysymetrycznych, trójkątnych górnych, trójkątnych dolnych) jest macierzą symetryczną (antysymetryczną, trójkątną górną, trójkątną dolną).

Zadanie 4. Rozwiązać równania

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\left(X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 5. Obliczyć

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: -366,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ -11 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: 134

Zadanie 6. Obliczyć

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: -82

Zadanie 7. Obliczyć

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: -84

Zadanie 8. Obliczyć

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: 92

Zadanie 9. Wykazać, że każdą macierz kwadratową można przedstawić jako sumę macierzy symetrycznej i antysymetrycznej. Czy przedstawienie to jest jednoznaczne?

Zadanie 10. Obliczyć

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_n^{n-2} \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

Zadanie 11. Wyznaczyć macierze odwrotne do macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & -1+2a & 2-a \end{pmatrix}$$

Zadanie 12. Rozwiązać równanie macierzowe $(AX^T + B^T)^T = C$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Zadanie 13. Wyznaczyć rzędy macierzy

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie 14. Rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + 2y - t = 2 \\ y + z - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + 2y - t = 2 \\ -y + z + 2t = 2 \\ 2x + 3y + z - t = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ x + 2y - t = 2 \\ 3x + 2z + t = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ x + y - t = 1 \\ 2x + 2y - z - t = 4 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Zadanie 15. Wyjaśnić, które z niewiadomych w układach równań mogą, a które nie mogą być traktowane jako parametry

$$\begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ x + y - t = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z + t + u = 2 \\ x + y - t + v = 1 \\ -z + 2t + u - v = 1 \\ 2x + 2y - z + u + v = 3 \end{cases}$$

Zadanie 16. Przedyskutować rozwiązalność układu równań w zależności od parametru a

$$\begin{cases} (1+a)x + 2y - z = 3 \\ 2x + 2y - az = 1 + 2a \\ 2x + (1+a)y - z = 2a + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (2+a)x + 2y = 5 \\ x + (3+a)y = 3 - 2a \\ x - 2ay = a + 6 \end{cases}$$