

Przykład.  $\int_a^b dx = [x]_a^b = b - a.$

Przykład.  $\int_1^2 \ln x dx = \int_1^2 1 \cdot \ln x dx \stackrel{\text{przez części}}{=} [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1.$

Przykład.  $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1} dx \stackrel{y=x^2+1}{=} \int_1^{10} \frac{1}{y} dy = [\ln y]_1^{10} = \ln 10.$

Funkcja górnej granicy całkowania

**Twierdzenie.** Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , będzie funkcją ciągłą. Wtedy funkcja

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

jest różniczkowalna na przedziale  $(a, b)$  oraz

$$F'(x) = f(x).$$

*Dowód.* Z definicji całki oznaczonej, funkcja  $F$  jest funkcją pierwotną funkcji  $f$ .  $\square$

## LISTA 2

### Całka niewłaściwa.

1. Obliczyć następujące całki niewłaściwe:

- (a)  $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ , (b)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ , (c)  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ ,  
 (d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+4}$ , (e)  $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$ , (f)  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$ .  
 (g)  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin x \cos x}$ ,

Uwaga:  $\int \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{8} \left( \sqrt{2} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) - \sqrt{2} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right).$

