Całka oznaczona.

1. Obliczyć następujące całki oznaczone:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2}{x^3+1}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$,

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$, (e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln x}{x}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$,

(g) $\displaystyle\int_0^3 x^2(2x^3+4)^2 dx$, (h) $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx$, (i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx$.

2. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

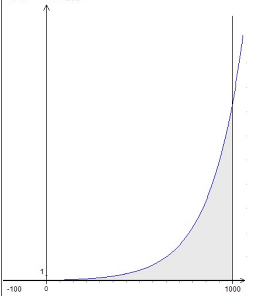
(a) $F(x)=\displaystyle\int_1^x t(1+t^2)^5\,dt$, (b) $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2} t^{-1/3}\,dt$, (c) $F(x)\displaystyle\int_0^{x^2} t\sin t\,dt$,

(d) $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}(1-t^2)\,dt$, (e) $F(x)=\displaystyle\int_1^{1+x^2}\sqrt{1+t}\,dt$, (f) $F(x)=\displaystyle\int_1^{1+x^2} t^2\,dt$,

(g) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2} t^{-2}\,dt$.

3. Obliczyć następujące całki oznaczone:

(a) $\int_{-100}^{1000} e^{(2x+1)}dx$



(b) $\int_0^1 x^3\sqrt{7+x^4}dx$

(c) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$

(d) $\int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t}+e^t+1}dt$

(e) $\int_0^x e^s\sin(3s)ds$

(f) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\cos x}dx$

(g) $\int_1^e \ln x dx$

4. Dla $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ określamy:

długość wykresu f, o ile f jest klasy C^1, wzorem

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx;$$

pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót wykresu f (zawartego w płaszczyźnie XY) wokół osi X w przestrzeni XYZ, o ile f jest klasy C^1, wzorem

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx;$$

objętość bryły obrotowej ograniczonej powyższą powierzchnią obrotową i płaszczyznami „$x=a$”, „$x=b$”, o ile f jest ciągła, wzorem

$$\pi\int_a^b (f(x))^2dx.$$

W oparciu o powyższe wzory oblicz:

(a) długość okręgu o promieniu r,
(b) objętość kuli o promieniu r,
(c) pole powierzchni sfery o promieniu r,
(d) objętość walca obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h,
(e) pole powierzchni bocznej walca obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h,
(f) objętość stożka obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h,
(g) pole powierzchni bocznej stożka obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h.

5. Niech $f:I\to\mathbb{R}$, gdzie I — przedział oraz f posiada funkcję pierwotną. Wykaż, że dla dowolnych $a,b,c\in I$ zachodzi $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$.

Całka Riemanna

Definicja. Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dla $a<b$. *Podziałem odcinka* $[a,b]$ *o średnicy* $\delta>0$ nazywamy skończony ciąg punktów $x_0,\ldots,x_k\in[a,b]$, taki że

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}<x_k=b$$

oraz $\max\limits_{j=1,\ldots,k}(x_j-x_{j-1})=\delta$.

Twierdzenie (istnienie całki Riemanna). *Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła (lub ma skończenie wiele punktów nieciągłości), to istnieje liczba $S\in\mathbb{R}$, taka że dla każdego ciągu podziałów*

$$a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{k_n-1}^{(n)}<x_{k_n}^{(n)}=b$$

o średnicy δ_n, takiego że $\delta_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ i dla każdego $t_j^{(n)}\in[x_{j-1}^{(n)},x_j^{(n)}]$, $j=1,\ldots,k_n$, zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n} f(t_j^{(n)})(x_j^{(n)}-x_{j-1}^{(n)})=S.$$

Liczbę S nazywamy całką Riemanna.

Uwaga. Całka Riemanna istnieje dla znacznie szerszej klasy funkcji.

Twierdzenie. *Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to całka Riemanna jest równa całce Newtona, czyli całce*

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b,$$

gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f.

Wniosek. *Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to*

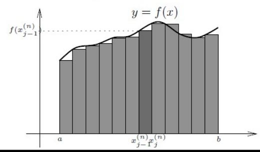
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+\frac{2(b-a)}{n}\right)+\cdots+f\left(a+\frac{n(b-a)}{n}\right)}{n}=\int_a^b f(x)\,dx.$$

W szczególności, jeśli $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Geometryczna interpretacja całki Riemanna

Całka Riemanna z funkcji nieujemnej f jest granicą sumy pól prostokątów o podstawach wyznaczonych przez n-ty podział odcinka $[a,b]$ i wysokościach takich, że górna krawędź każdego prostokąta przecina wykres funkcji f.



Wniosek. *Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ciągła i $f\geqslant 0$, to*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\text{pole obszaru }\{(x,y):x\in[a,b],y\in[0,f(x)]\}.$$

Wniosek (wzór na pole obszarów normalnych). *Jeśli*

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x\in[a,b],y\in[f(x),g(x)]\}$$

dla pewnych funkcji ciągłych $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, takich że $f\leqslant g$, to

$$\text{pole }A=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx.$$