$$\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)+C$$

Ułamkiem prostym pierwszego rodzaju nazywamy wyrażenie postaci $\frac{A}{(ax+b)^k}$, gdzie $A, a, b \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$.

Ułamkiem prostym drugiego rodzaju nazywamy wyrażenie postaci $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, gdzie $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ i $b^2-4ac<0$.

Twierdzenie

Jeśli $f : (a,\ b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna to

$$\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}f^{\alpha+1}(x)+C & \text{dla } \alpha \neq -1 \\ \ln|f(x)|+C & \text{dla } \alpha = -1 \end{cases}$$

Twierdzenie

Ułamek prosty pierwszego rodzaju całkujemy następująco

$$\int \frac{A}{(ax+b)^k}\,dx = \begin{cases} \frac{A}{a}\ln|ax+b|+C & \text{dla } k=1, \\ \frac{A}{a(1-k)}\cdot\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}+C & \text{dla } k>1. \end{cases}$$

Twierdzenie

Zachodzi poniższy wzór

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^k} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C & \text{dla } k=1, \\ \frac{1}{2k-2}\frac{x}{(1+x^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2k-2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{k-1}} & \text{dla } k>1 \end{cases}.$$

Ułamek prosty drugiego rodzaju całkujemy następująco

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx = \frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx + \int\frac{B-\frac{Ab}{2a}}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx.$$

Jeżeli m, n są liczbami parzystymi to całkę postaci $\int \sin^n x\cdot\cos^m x\,dx$ obliczamy korzystając ze wzorów

$$\sin x\cos x = \tfrac{1}{2}\sin 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

Twierdzenie

Jeżeli $P(x)$ jest wielomianem stopnia n to

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gdzie $Q(x)$ jest wielomianem stopnia $n-1$ a λ jest liczbą rzeczywistą.

Przykład 239

$$\int \frac{6x^3+26x^2+39x+21}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx =$$
$$(Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4x+5}+K\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} =$$
$$(2x^2+3x+1)\sqrt{x^2+4x+5}+4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} =$$
$$(2x^2+3x+1)\sqrt{x^2+4x+5}+4\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C$$

Twierdzenie (PODSTAWIENIA EULERA)

Jeżeli R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych to podstawienia
$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$, gdy $a>0$,
$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$, gdy $c>0$,
$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$, gdy $c<0$, $a<0$ gdzie x_1 jest pierwiastkiem ax^2+bx+c
sprowadzają $\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ do całkowania funkcji wymiernej.

Całkowanie funkcji postaci $R(\sin x, \cos x)$

Niech $R(u,v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Wówczas do obliczania całek postaci

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

w zależności od warunków jakie spełnia funkcja R, stosujemy podstawienia z tabeli:

Warunek	Podstawienie	Przedstawienie funkcji	Różniczka
$R(-u,v)=-R(u,v)$	$t=\cos x$	$\sin x=\sqrt{1-t^2}$	$dx=\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$
$R(u,-v)=-R(u,v)$	$t=\sin x$	$\cos x=\sqrt{1-t^2}$	$dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
$R(-u,-v)=R(u,v)$	$t=\operatorname{tg} x$	$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	$dx=\frac{dt}{1+t^2}$
R - dowolna funkcja	$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ podstawienie uniwersalne	$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

Całkowanie funkcji postaci $\sin ax\cos bx$, $\sin ax\sin bx$, $\cos ax\cos bx$

Do obliczania całek z funkcji postaci:

$$\sin ax\cos bx, \quad \sin ax\sin bx, \quad \cos ax\cos bx$$

stosujemy tożsamości trygonometryczne:

$$\sin ax\cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\right],$$
$$\sin ax\sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right],$$
$$\cos ax\cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right].$$

Całkowanie funkcji z niewymiernościami

Całki postaci $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)\,dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\,dx$

Niech $R(u,v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Do obliczania całek:

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)\,dx, \ \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)\,dx, \ \int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)\,dx,$$

gdzie $a>0$, stosujemy podstawienia podane w tabeli:

Funkcja podcałkowa	Podstawienie	Postać pierwiastka	Różniczka
$R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$	$x=a\sin t$	$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$	$dx=a\cos t\,dt$
$R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$	$x=a\operatorname{ch} t$	$\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{sh} t$	$dx=a\operatorname{sh} t\,dt$
$R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$x=a\operatorname{sh} t$	$\sqrt{x^2+a^2}=a\operatorname{ch} t$	$dx=a\operatorname{ch} t\,dt$

Ważniejsze całki z niewymiernościami

Wzór	Założenia
$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$	$\lvert x\rvert<a$
$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert+C$	$x\in\boldsymbol{R}$
$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+C$	$\lvert x\rvert\geqslant a$
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert+C$	$x\in\boldsymbol{R}$
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+C$	$\lvert x\rvert>a$
$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$	$\lvert x\rvert\leqslant a$