1. Ciągi liczbowe

Zadanie 1. *Zbadać monotoniczność ciągów*

$$a_n = \frac{n^2}{2^{n+1}}, \quad a_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n, \quad a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad a_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)},$$

$$a_n = 1 - \frac{3}{n}, \ a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{n}}, \ a_n = \sin\frac{1}{\mathrm{n}}, \quad a_n = \frac{n}{n^2+6n+2}.$$

Zadanie 2. *Pokazać z definicji, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} = 0.$$

Zadanie 3. *Obliczyć*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+2n+1}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n^2+2n+1}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{3n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n}{n^3+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+5n}{n^3+7}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+3n^2-4}{2n^3+n-1}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2+3n)^5(3n^3+1)^2}{(6n^4+1)^4},$$

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2+5n} - 2n), \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{27n^3+12n^2} - 3n),$$

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}), \ \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot(3n+2)!}{(n+1)^6\cdot(3n-1)!}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)!\cdot(3n^2+1)^3}{(2n+3)!}.$$

Zadanie 4. *Obliczyć*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(6n^5+8)^5\cdot(2n^4+7)^5}{(6n^5+4)^4\cdot(2n^5+3)^5}, \ \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(6n+5)!}{(2n^2+4)^4\cdot(6n-3)!}, \ \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{36^{n-2}+32^{n-11}}{(2^{2n-3}+n^8)\cdot(3^{2n-1}-5)},$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{12\cdot 5^{3n+3} + 63\cdot 10^{2n+1}}, \ \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{4^{n-6}n^4 + 2^{n-7}n^9},$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{6n^2+23n}{3n^2-5}\right)^{\dfrac{n^9+4n}{n^8+3n}}, \ \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{5n^2-5n}{5n^2-3}\right)^{6n-4},$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{45^{n-3}+19^{n+19}}{(3^{2n+1}+5^{18})\cdot(5^{n-2}+2)}.$$

Zadanie 5. *Dla jakich wartości parametru a równanie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos \mathrm{x}}{2}\right)^n = a^2 - 2$ *ma rozwiązanie?*

Zadanie 6. *Rozwiązać nierówność* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\operatorname{tg}\mathrm{x})^n \leq \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ *w zbiorze* $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Zadanie 7. *Obliczyć*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\tfrac{2n+(-1)^n n}{3n},\ \lim_{n\longrightarrow\infty}\tfrac{6n+n\cdot\cos \mathrm{n}\pi}{n+1},\ \lim_{n\longrightarrow\infty}(3+(-1)^n)^n,\ \lim_{n\longrightarrow\infty}\tfrac{3n^2}{2n-n^2\cos\frac{\mathrm{n}\pi}{6}}.$$

Zadanie 8. *Obliczyć*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\tfrac{(n!)^2}{(2n)!},\ \lim_{n\longrightarrow\infty}\tfrac{n^{2n}}{(n!)^2},\ \lim_{n\longrightarrow\infty}\tfrac{n!n^2}{n^n}.$$

Zadanie 9. *Obliczyć granicę ciągu określonego rekurencyjnie*

$a_1 = \sqrt{2}$,

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$.

Zadanie 10. *Wykazać, że ciąg* $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ *jest malejący i ograniczony. Pokazać, że jego granicą jest liczba e.*

Zadanie 11. *Obliczyć granicę ciągu określonego rekurencyjnie*

$a_1 = x$,

$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$,

gdzie $x > 0$.

Zadanie 12. *Niech* $\varphi : \mathbb{N}^\star \longrightarrow \mathbb{N}^\star$ *będzie bijekcją i niech istnieje* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *wówczas istnieje* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\varphi(n)}$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\varphi(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.