

Granice i ciągłość funkcji

Zadanie 1. Obliczyć granice

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+5)^3 - 125}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 3x + 2\operatorname{arc\,tg} 2x}{\operatorname{tg} 6x + 2\sin 2x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 10x^2 + 4x - 8}{x^5 - 5x^4 - x^3 + 41x^2 - 72x + 36}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{2\operatorname{tg} x + \sin 2x}, \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x), \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 5x} - 2x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 5x} - 2x), \\ & \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2} - e}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2 \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+x) - \ln 2}{2x}. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Obliczyć granice jednostronne

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}, \\ & \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{\frac{x}{x^2 - 1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{\frac{x}{x^2 - 1}}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} 2^{\frac{x}{x^2 - 1}}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} 2^{\frac{x}{x^2 - 1}}, \\ & \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{x^2 - x - 2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{x^2 - x - 2}}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{x^2 - x - 2}}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{x^2 - x - 2}}, \\ & \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^3 - 8} \right), \end{aligned}$$

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru a są ciągłe funkcje we wskazanych punktach x_0

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x + \sin x} & \text{dla } x \neq 0 \\ a^2 + 5a + 8 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{\operatorname{tg} x} & \text{dla } x \neq 0 \\ a^2 + 3a + 3 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0.$$

Zadanie 4. Wykazać, że równania mają pierwiastki we wskazanych przedziałach

$$x^3 - 3x + 1 = 0, \text{ w przedziale } (0, 1),$$

$$x^2 - 4\operatorname{arctg} x + 1 = 0, \text{ w przedziale } (0, 1),$$

$$2\sin^3 x - 3\cos x + 1 = 0, \text{ w przedziale } (0, \frac{\pi}{2}).$$

Zadanie 5. Pokazać, że jeżeli $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe to są ciągłe funkcje $\max\{f, g\}$ oraz $\min\{f, g\}$.