Definicja pochodnej

Definicja. Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ i niech $x \in (a,b)$. Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna* w punkcie x, jeśli istnieje (skończona) granica

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Granicę tę nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x i oznaczamy $f'(x)$ lub $\frac{df}{dx}(x)$. Iloraz $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nazywamy *ilorazem różnicowym.*

Interpretacja geometryczna pochodnej

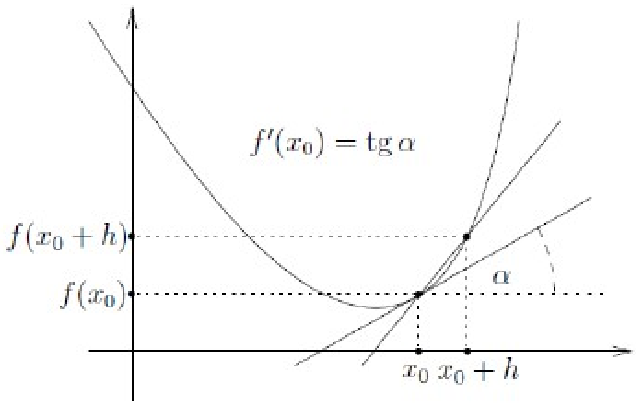
Styczna do wykresu funkcji

Pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest granicznym współczynnikiem nachylenia siecznej wykresu $y = f(x)$, która przecina wykres w punkcie $(x_0, f(x_0))$, gdy drugi punkt przecięcia dąży do $(x_0, f(x_0))$.

Innymi słowy, $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kata nachylenia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Zatem równanie tej stycznej ma postać

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



Niech będzie dana bijekcja ciągła $f : (a,b) \longrightarrow (c,d)$, $x_0 \in (a,b)$ i niech $f'(x_0) \neq 0$ wtedy funkcja odwrotna ma pochodną w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i ponadto $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Niech $x = \sin y$ dla $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ wówczas $y = \arcsin x$.

Mamy: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Jeżeli funkcja $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $c \in (a, b)$ i osiąga w tym punkcie kres górny (dolny) to $f'(c) = 0$.

Twierdzenie (Rolle'a)

Jeżeli funkcja ciągła $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b) i $f(a) = f(b)$ to $\exists c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = 0$.

Twierdzenie (Lagrange'a)

Jeżeli funkcja ciągła $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b) to $\exists c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Jeżeli funkcja ciągła $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b) i $\forall x \in (a, b)\ f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) to funkcja f jest rosnąca (malejąca) w przedziale $[a, b]$.

Twierdzenie (Taylora z resztą Lagrange'a)

Niech funkcja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^{n-1}$ w przedziale $[a, b]$ i $\forall x \in (a, b)$ $\exists f^n(x)$ wtedy $\exists c \in (a, b)$ taki, że

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n - 1)!}(b - a)^{n-1} + R_n,$$

gdzie $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b - a)^n$.

Twierdzenie (Maclourin'a)

Jeżeli w powyższym twierdzeniu $b = x$ i $a = 0$ to otrzymujemy wzór $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n - 1)!}x^{n-1} + R_n$, gdzie $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{(n)!}x^n$, $c \in (0, x)$.

Definicja

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ minimum lokalne (maksimum lokalne) jeżeli $\exists S$ sąsiedztwo punktu x_0 takie, że $\forall x \in S\ f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$. Jeżeli funkcja ma minimum lokalne lub maksimum lokalne to mówimy, że ma ekstremum lokalne.

Twierdzenie

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej f w punkcie x_0 jest to aby $f'(x_0) = 0$.

Warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum lokalnego w punkcie x_0 funkcji f różniczkowalnej w otoczeniu punktu x_0 jest to aby $f'(x_0) = 0$ i aby pochodna zmieniała znak w punkcie x_0.

Twierdzenie

Niech funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 będzie różniczkowalna w punkcie x_0 wówczas istnieje styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i ma równanie $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Definicja

Funkcja $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy wklęsłą (wypukłą) w punkcie $x_0 \in X$ jeżeli styczna do wykresu funkcji w punkcie x_0 leży powyżej (odpowiednio poniżej) wykresu funkcji dla x z pewnego sąsiedztwa punktu x_0.

Jeżeli styczna do wykresu funkcji w punkcie x_0 przechodzi w punkcie x_0 na drugą stronę wykresu to punkt x_0 nazywamy punktem przegięcia wykresu funkcji.

Jeżeli funkcja jest n krotnie różniczkowalna w x_0 i $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ to

jeśli n jest liczbą parzystą i $f^{(n)}(x_0) > 0$ to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne,

jeśli n jest liczbą parzystą i $f^{(n)}(x_0) < 0$ to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne,

jeśli n jest liczbą nieparzystą to wykres funkcja f ma w punkcie $(x_0, f(x_0))$ punkt przegięcia.