Lista 3
Granice ciągów

1.

Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic oraz o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć podane granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2+1}{n-3n^3}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^{20}+2)^3}{(n^3+1)^{20}}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^5+1}+1}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+2n})$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[4]{n^4+16}-n)$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3\cdot 5^n+2^n+3}{5^n-4^n}\right)^5$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8^{n+1}+3}}{2^n+1}$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^4-3n^3-2n^2-1)$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^n$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-(n+1)!}{n!+2}$

2.

Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{n+4}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n^2+1}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2+1}{n-3n^3}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2+4+\ldots+2n}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n-4^n}{5^n-3^n}$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)\,n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+6\sqrt{n}+1}-\sqrt{n}\right)$.

3.

Korzystając z twierdzeń o trzech i o dwóch ciągach znaleźć podane granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2^n+3^n}{5^n+4^n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n2^n+1}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{3n+2}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin n!-2)n^2$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\lfloor\sqrt{1}\rfloor}+\dfrac{1}{\lfloor\sqrt{2}\rfloor}+\ldots+\dfrac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right)$

4.

Korzystając z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n-2}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$; **f*)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\dfrac{3n+2}{5n+2}\right)^n\cdot\left(\dfrac{5n+3}{3n+1}\right)^n\right]$.

5.

Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach znaleźć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n+5}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (4^n+(-3)^n)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin n-2)\, n^2$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n\left(5-\frac{1}{n}\right)^n\right]$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^5-10n^6+1)$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

6.

Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-(n+1)!}{n!+2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (2+2^n-3^n)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} 2^n}{2^n}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}-\cos\frac{\pi}{n}\right)^n$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} n}{\operatorname{arc\,ctg} n}$;

h*) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]}$.

7.

Zbadać zbieżność i obliczyć granicę (być może niewłaściwą) ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jeśli wyraz ogólny zadany jest następująco:

a) $a_n = \frac{n^2+(-1)^n\cdot n}{(n+\sqrt{3})^2}$,

ą) $a_n = \frac{\left(\sqrt{n+8\sqrt{n}}\right)^4}{\left(n+3\sqrt{n}\right)^2}$,

b) $a_n = \frac{n(\sqrt{3n}-7)^2}{(\sqrt{n+2}+2)^4}$,

c) $a_n = \sqrt{\frac{n+(-1)^n\sqrt[4]{n}}{(3n+\sqrt{2n})^2}}$,

ć) $a_n = \frac{\binom{n+2}{n+1}^2}{2+4+6+\cdots+2n}$,

d) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,

e) $a_n = \sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2-n}$,

ę) $a_n = \sqrt{5n^2-3n}-n\sqrt{5}+8$,

f) $a_n = \sqrt{n^4+3n^2+5}-\sqrt{n^4-n^2+n}$,

g) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$,

h) $a_n = \frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+3}}$,

i) $a_n = \frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\frac{5^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}$,

j) $a_n = n(\sqrt[3]{n^3+n+2}-n)$,

hbis) $a_n = \sqrt[3]{n(n+1)^2}-\sqrt[3]{n(n-1)^2}$,

k) $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$,

l) $a_n = \frac{\cos(n!)}{\sqrt{n}}$,

ł) $a_n = \frac{\sqrt[n]{3}-1}{2+(-1)^n}$,

m) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}-1}{3+(-1)^n}$,

n) $a_n = \sqrt[n]{1+\sqrt{\binom{n}{2}}}$,

ń) $a_n = \sqrt[n]{2^n+n^2}$,

o) $a_n = \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$,

ó) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}}$,

p) $a_n = n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)$,

q) $a_n = \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$,

r) $a_n = \frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4+(n+1)^4}$,

s) $a_n = \frac{1!+3!+5!+\cdots+(2n-1)!}{2!+4!+6!+\cdots+(2n)!}$,

ś) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$,

t) $a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n-1}$,

u) $a_n = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^{n+1}}$,

v) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{2n+1}$,

w) $a_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n}$,

x) $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-n}$,

y) $a_n = \left(\frac{1+\sqrt[n]{2}}{2}\right)^n$,

z) $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, gdzie F_n jest n-tym wyrazem ciągu Fibonacciego,

ź) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{5}{a_n}\right)$,

ż) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1+\frac{1}{a_n}$.