1. Na podstawie definicji pochodnej funkcji w punkcie $x_0$ obliczyć pochodną funkcji:

*a)* $f(x) = C, C = const.$, *b)* $f(x) = x^2$, *c)* $f(x) = \sqrt{x}$, *d)* $f(x) = \sin x$, *e)* $f(x) = \ln x$,

*f)* $f(x) = e^x$, *g)* $f(x) = 3x - 1$, $x_0 = 1$, *h)* $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$, $x_0 = -1$.

2. Obliczyć pochodną funkcji:

*a)* $f(x) = x^5 + 4x^2 - 2x + 7$, *b)* $f(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}$, *c)* $f(x) = 3\sin x - 4\cos x$, *d)* $f(x) = \sqrt[4]{\frac{5}{x^5}}$,

*e)* $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}}$, *f)* $f(x) = \sin x \tan x$, *g)* $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$, *h)* $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$,

*i)* $f(x) = \ln \sqrt[3]{1 - 3x}$, *j)* $f(x) = 2e^{x^2 - 5x} + \frac{3}{x^2 - 5x}$, *k)* $f(x) = e^{4\tan x}$, *l)* $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

*m)* $f(x) = \arctan(x^2 - \sqrt{x})$, *n)* $f(x) = \cos 3(\arccos x)$, *o)* $f(x) = x^{\sin x}$, *p)* $f(x) = (\cos x)^x$.

**Zadanie** *Obliczyć pochodne funkcji:*

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x + \cos x},\ f(x) = \frac{2^x \cdot \ln x}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x}}{x+1}},$$

$$f(x) = x^x,\ f(x) = \left(\frac{2^x + \ln x}{x}\right)^{\operatorname{tg} x},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}^{\ln x}},$$

**Zadanie** *Obliczyć granice*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right),\ \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3},\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^4},\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x + x)}{x}.$$

**Zadanie** *Znaleźć asymptoty wykresu funkcji*

$$f(x) = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x,\ f(x) = x \cdot \arcsin\frac{x}{1-2x},\ f(x) = 3x + \sqrt{x^2 - 4x + 2},$$

$$f(x) = x \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3x}}{1+x},\ f(x) = x \cdot \arccos\frac{x}{1-x},\ f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

**Zadanie** *Wykazać, że*

$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}$, *dla* $x \in (-1, \infty)$,

$3\arccos x = \pi + \arccos(3x - 4x^3)$, *dla* $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Naszkicować wykres funkcji:

1) $y = \frac{x^4}{x^3 + 1}$,

2) $y = e^{\frac{1}{x^2 - 1}}$,

3) $y = e^{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$,

4) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$,

5) $y = \sqrt[3]{x^2} e^{-x}$,

6) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 1}}$,

7) $y = (x - 2)e^{\frac{1}{x-2}}$,

8) $y = \arcsin\frac{2x}{x^2 + 1}$,

9) $y = \frac{x}{\ln x}$,

**1.** Oblicz pochodne podanych funkcji tam, gdzie istnieją.

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$. b) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

d) $f(x) = \sin^3 x$. e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$. f) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^3}$.

g) $f(x) = e^{-x}$. h) $f(x) = e^{x^2}$. i) $f(x) = x \ln x$.

j) $f(x) = \log_2 x$. k) $f(x) = \log_x 2$. l) $f(x) = x^x$.

m) $f(x) = x^{x^2}$. n) $f(x) = (x^x)^2$.

**2.** Zbadaj, czy podana funkcja jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

a) $f(x) = x|x|$; d) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0; \end{cases}$

b) $f(x) = |x|^3$; e) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0; \end{cases}$

c) $f(x) = |\sin^3(x)|$; f) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0. \end{cases}$

**3.** Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^x$ w punkcie $(2, 4)$.

**4.** Obliczyć pod jakimi kątami przecinają się wykresy funkcji $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3$.

**5.** Wyznaczyć, pod jakimi kątami przecinają się wykresy funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i $g(x) = x^3$.

**9.** Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 1$ w punkcie $(1, 1)$.

**10.** Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x + 1$ w punkcie $(1, 2)$.

**11.** Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + x + 1$ w punkcie $(1, 3)$.

**12.** Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ w punkcie $(1, 4)$.

**13.** Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ w punkcie $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$.

**14.** Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \cos x$ w punkcie $(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

**15.** Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ w punkcie $(\frac{\pi}{4}, 1)$.

**16.** Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ w punkcie $(1, \frac{\pi}{4})$.

**Definicja.** Kątem $\alpha$ przecięcia się dwóch krzywych gładkich $y = f(x)$, $y = g(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$, gdzie $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$, nazywamy **kąt ostry** przecięcia się stycznych do danych krzywych w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Tangens tego kąta liczymy ze wzoru

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}\right| \quad \text{gdy } 1 + f'(x_0)g'(x_0) \neq 0.$$

Jeżeli $1 + f'(x_0)g'(x_0) = 0$ to $\alpha = \frac{\pi}{2}$.