Temat

I. Szeregi liczbowe (Liczba godzin 3)

1. Pokazać, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Sprawdzić warunek konieczny zbieżności szeregów. Co na tej podstawie można wnioskować o zbieżności szeregu?

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{11n^5+3n^2-n}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[2]{n^2+2n}-n}{n^2}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n-1}\right)^{2n-1}.$$

3. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 6^n}{5^{n+17}}, \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(\log n)^n}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{arctg} n)^n}{2^{n+1}}.$$

4. Korzystając z kryterium D'Alamberta zbadać zbieżność szeregów

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n}}{(3n-1)!}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cdot 7^n}{2^{n+7}}.$$

5. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7+n}{1+n^3}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n+3^n+5^n}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}.$$

6. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \frac{n+2}{n^2-n+1}$, $\quad b)\ a_n = \frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n^2+2}}$, $\quad c)\ a_n = \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)}$, $\quad d)\ a_n = \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$,

e) $a_n = \frac{n^{11}}{11^n}$, $\quad f)\ a_n = \frac{2014^n}{n!}$, $\quad g)\ a_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$, $\quad h)\ a_n = \frac{(n!)^2\cdot 4^n}{(2n)!}$,

i) $a_n = \frac{3^n\cdot n!}{n^n}$, $\quad j)\ a_n = \left(\frac{3n+5}{4n+5}\right)^{\frac{n}{4}}$, $\quad k)\ a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{5^n}$, $\quad l)\ a_n = \left(\frac{1+(-1)^n}{\pi}\right)^n$,

m) $a_n = (-1)^n\,\frac{n+3}{n^2}$, $\quad n)\ a_n = (-1)^n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, $\quad r)\ a_n = (-1)^n(\sqrt[n]{2}-1)$, $\quad s)\ a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

7. Wykazać, że dla każdego $x>0$ zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

8. Znaleźć szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, taki, że $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n \ln n$ jest rozbieżny do nieskończoności.

9. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \frac{n}{150^{\log n}}, \qquad b)\ a_n = \frac{1}{\log(n!)}, \qquad c)\ a_n = \frac{1}{105^{\log(\log n)}}.$$

10. Zbadać zbieżność:

a) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}-\frac{1}{18}+\cdots$

b) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\cdots$

c) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\cdots$

d) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{8}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}-\frac{1}{16}+\frac{1}{33}+\frac{1}{34}-\cdots$

e) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\cdots$

f) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}-\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\cdots$

g) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots$

h) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\cdots$

i) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{5}{2^5}-\frac{6}{2^6}+\frac{7}{2^7}+\frac{8}{2^8}-\frac{9}{2^9}+\cdots$

j) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots$