Zadanie 5.27. Obliczyć pochodne funkcji

1) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$; 2) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{3x}{1-x^2}$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin 3x}$; 6) $f(x) = \ln\left(5x^6 + \sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}\right)$;

7) $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}$; 8) $f(x) = (x+1)^7 x^{2x^2}$.

4) $f(x) = 3^{\cos x}\log_7(1+3x^2)$;

Rozwiązanie (rozwiązanie jest zaczynane od określenia dziedziny – w tym momencie nie jest dla nas to istotne, bo naszym celem jest nauczenie się liczenia pochodnych):

1)

$$f'(x) = \frac{\left(e^{2x}-1\right)'\left(e^{2x}+1\right) - \left(e^{2x}-1\right)\left(e^{2x}+1\right)'}{\left(e^{2x}+1\right)^2} =$$

$$= \frac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right) - \left(e^{2x}-1\right)e^{2x}\cdot 2}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2};$$

2) Funkcja ta jest określona dla $x \neq \pm 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{3x}{1-x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\frac{1-2x^2+x^4+9x^2}{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{3\left(1-x^2\right)-3x(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{3-3x^2-6x^2}{x^4+7x^2+1} = \frac{3\left(1+x^2\right)}{x^4+7x^2+1};$$

4)

$$f'(x) = \left(3^{\cos x}\right)'\cdot\log_7\left(1+3x^2\right) + 3^{\cos x}\left[\log_7\left(1+3x^2\right)\right]' =$$

$$= 3^{\cos x}(\ln 3)(-\sin x)\log_7\left(1+3x^2\right) + 3^{\cos x}\frac{1}{\left(1+3x^2\right)\ln 7}\cdot\left(1+3x^2\right)' =$$

$$= -3^{\cos x}\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7\left(1+3x^2\right) + \frac{1}{\ln 7}3^{\cos x}\frac{6x}{1+3x^2};$$

5) Funkcja ta jest określona dla $x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\arcsin 3x}\right)' = \left[(\arcsin 3x)^{-1}\right]' =$$

$$= -(\arcsin 3x)^{-2}(\arcsin 3x)' = -\frac{1}{(\arcsin 3x)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3;$$

6)

$$f'(x) = \frac{1}{5x^6 + \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 1}} \left(5x^6 + \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{5x^6 + \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 1}} \left[30x^5 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 1}} \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)'\right] =$$

$$= \frac{1}{5x^6 + \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 1}} \left(30x^5 + \frac{x}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 1}}\right);$$

7) Funkcja ta jest określona dla $\cos x > 0$.

$$f'(x) = \left[(\cos x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}\right]' = \left[e^{\ln(\cos x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}}\right]' = \left[e^{\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\right)\ln\cos x}\right]' =$$

$$= e^{\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\right)\ln\cos x} \cdot \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\right)\ln\cos x\right]' =$$

$$= e^{\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\right)\ln\cos x} \cdot \left[-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}\left(\frac{x}{3}\right)'\ln\cos x + \left(\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'\right] =$$

$$= (\cos x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}} \left[-\frac{1}{3\sin^2\frac{x}{3}}\ln\cos x + \operatorname{ctg}\frac{x}{3}\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\right] =$$

$$= -(\cos x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}} \left(\frac{\ln\cos x}{3\sin^2\frac{x}{3}} + \operatorname{ctg}\frac{x}{3}\cdot\operatorname{tg} x\right);$$

8) Funkcja ta jest określona dla $x > 0$.

$$f'(x) = \left[(x+1)^7\right]' x^{2x^2} + (x+1)^7\left(x^{2x^2}\right)' = 7(x+1)^6 x^{2x^2} + (x+1)^7\left(e^{2x^2\ln x}\right)' =$$

$$= (x+1)^6\left\{7x^{2x^2} + (x+1)\left[e^{2x^2\ln x}\left(2x^2\ln x\right)'\right]\right\} =$$

$$= (x+1)^6\left\{7x^{2x^2} + (x+1)\left[x^{2x^2}\left(4x\ln x + 2x^2\frac{1}{x}\right)\right]\right\} =$$

$$= (x+1)^6 x^{2x^2}\left[7 + (x+1)(4x\ln x + 2x)\right] =$$

$$= (x+1)^6 x^{2x^2}\left[7 + 2x(x+1)(2\ln x + 1)\right].$$

Zadanie 5.32. Korzystając z podstawowych wzorów na pochodne i twierdzeń o różniczkowaniu obliczyć pochodne następujących funkcji:

1) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$;

2) $f(x) = 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$;

3) $f(x) = e^{\sin^2(2x+5)}$;

4) $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{\ln(2x+1)}$;

5) $f(x) = \arccos\left(\sqrt{\cos x}\right)$;

6) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{\ln x}}$;

7) $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{arctg} x$;

8) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{5}}$;

9) $f(x) = xe^{-x^2}$;

10) $f(x) = xe^{-x^2}\log_3 x$;

11) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x + \sin 2x}}$;

12) $f(x) = x^{\ln x}$;

13) $f(x) = x^{x-x^2}$;

14) $f(x) = \sqrt{x + x^x}$;

15) $f(x) = \operatorname{ctg}^3\left(e^{-x^2} + x\sin 5x\right)$.

ODPOWIEDZI

5.32:

1) $e^x\left(\dfrac{x-3}{x^4}\right)$;

2) $\ln 3 \cdot \dfrac{1}{x^2\sin^2\frac{1}{x}} \cdot 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$;

3) $2e^{\sin^2(2x+5)}\sin(4x+10)$;

4) $\dfrac{1}{(2x+1)\sqrt{\ln(2x+1)}\cos^2\sqrt{\ln(2x+1)}}$;

5) $\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x - \cos^2 x}}$;

6) $\dfrac{2\ln x - 1}{2\ln x\sqrt{\ln x}}$;

7) $\dfrac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x + 2x}{2\sqrt{x}(1+x^2)}$;

8) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2+x}}$;

9) $e^{-x^2}(1-2x^2)$;

10) $e^{-x^2}\left[(1-2x^2)\log_3 x + \dfrac{1}{\ln 3}\right]$;

11) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+\sqrt{x+\sin 2x}\right)^2}}\left(2x + \dfrac{1+2\cos 2x}{2\sqrt{x+\sin 2x}}\right)$;

12) $x^{\ln x}\dfrac{2\ln x}{x}$;

13) $x^{x-x^2}[(1-2x)\ln x + 1 - x]$;

14) $\dfrac{1 + x^x(\ln x + 1)}{2\sqrt{x+x^x}}$;

15) $\dfrac{-3\operatorname{ctg}^2\left(e^{-x^2} + x\sin 5x\right)}{\sin^2\left(e^{-x^2} + x\sin 5x\right)}\left(\sin 5x + 5x\cos 5x - 2xe^{-x^2}\right)$.

Na zakończenie dość złożone przykłady (niestety bez odpowiedzi).

1 Obliczyć pochodne następujących funkcji

a $f(x) = \sin(e^{\operatorname{arctg}\sqrt{\ln x + x^5}}) \cdot \operatorname{tg}^{12}(\ln(3\cos(\sqrt{x})))$

b $f(x) = \dfrac{\cos^5(\sin^7(\ln(2^{\operatorname{arctg} x})))}{10 \cdot \arcsin(\cos(\log_4(x^5 + 2\sin x)))}$

c $f(x) = \dfrac{\arcsin(x^2 + \sqrt{x}) \cdot \operatorname{tg}^5(\ln x)}{\cos(e^{\operatorname{tg} x}) \cdot \operatorname{arctg}(x^2 + 1)}$

a $f(x) = \dfrac{\sin^7(\ln 7\sqrt{x} \cdot \operatorname{tg}(2^{x^2}))}{\log_2^6(\operatorname{arctg}(x^2+1)) \cdot \operatorname{arc\,sin}^4\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}+2}\right)}$

c $h(x) = \operatorname{arc\,sin}^7\left[\ln^7\left(\operatorname{arc\,cos}(e^{\sqrt{\sin x}})\right)\right]$

a $f(x) = (\operatorname{tg} x)^x$

b $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$

c $f(x) = (\ln(x^2 + x))^{\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}$