***5.1.** Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}$;

b) $\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{2}$;

c) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

d) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

e) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\pi$;

f) $\operatorname{ctg}\frac{1\pi}{10}\cdot\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{10}\cdot\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{10}\cdot\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{10}$;

g) $\cos\frac{12\pi}{2}+\cos\frac{12\pi}{3}+\cos\frac{12\pi}{4}+\cos\frac{12\pi}{6}$

h) $\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\sin\frac{5\pi}{2}\cdot\sin\frac{7\pi}{2}$.

***5.2.** Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\cos 3\pi\cdot\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}\cdot\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$;

b) $\sin\frac{7\pi}{4}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}$;

c) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\frac{7\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}\cdot\cos\frac{4\pi}{3}$;

d) $\sin\frac{11\pi}{6}:\cos\frac{2\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$;

e) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;

f) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

***5.3.** Oblicz wartość wyrażenia $\cos\alpha-\cos\beta$, jeśli $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{5}$ i $\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

***5.4.** Oblicz wartość wyrażenia $\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$, jeśli $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=-\frac{3}{5}$ i $\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

***5.5.** Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$, jeśli $\sin\alpha=\frac{15}{17}$, $\cos\beta=\frac{24}{25}$ i $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

***5.6.** Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\beta=1$ i $\alpha,\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

***5.7.** Rozwiąż równania:

a) $\frac{1}{4}-\cos^2x=0$;

b) $\operatorname{ctg}^2\frac{x}{8}-\operatorname{ctg}\frac{x}{8}=0$;

c) $|3\operatorname{tg}2x|=\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\sqrt{4\cos^2x+4\cos x+1}=1$;

f) $\sin^2 3x-\sqrt{2}\sin 3x+\frac{1}{2}=0$.

***5.8.** Rozwiąż równania:

a) $3\operatorname{tg}^2x-\frac{1}{\cos^2x}=5$;

b) $\sin x+\cos^2x=\frac{1}{4}$;

c) $2\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x+5=0$;

d) $\operatorname{ctg}^2x-3\operatorname{tg}^2x=2$.

***5.9.** Rozwiąż równania:

a) $2\sin^3x-3\sin x\cos x=0$;

b) $\operatorname{tg}^3x-\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x=1$;

c) $4\sin^3x-8\sin^2x-\sin x+2=0$;

d) $2\sin^5x-3\sin^3x+\sin x=0$.

***5.10.** Rozwiąż równania:

a) $\sin^2x-8\sin x\cos x+7\cos^2x=0$;

b) $\cos^2x-3\sin x\cos x+1=0$.

***5.11.** Rozwiąż równania:

a) $4\sin(\pi x)=4x^2-4x+5$;

b) $\cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)+\frac{1}{2}x^2=2x-3$.

***5.12.** Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$;

b) $y=5\cos^2\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$;

c) $y=\frac{1}{\sin^2x+1}$;

d) $y=\frac{1}{\operatorname{tg}^2x+2}$.

***5.13.** Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $y=-\sin^2x+4\sin x+12$;

b) $y=\cos^2 2x-\cos 2x-2$;

c) $y=\operatorname{tg}^3x-\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x-1$;

d) $y=\frac{1}{\cos^2x-2\cos x-8}$.

***5.14.** Rozwiąż nierówności:

a) $\cos 3x<\frac{1}{2}$;

b) $\operatorname{tg}(2x-1)\le\sqrt{3}$;

c) $2|\sin x|\le\sqrt{3}$;

d) $|3\operatorname{tg}x|\ge\sqrt{3}$;

e) $2\cos^2x>1$;

f) $\operatorname{ctg}^2x\le 1$;

g) $|\sin x|<1$;

h) $|\operatorname{ctg}x|>0$.

***5.15.** Rozwiąż nierówności:

a) $\sin x\ge 2\sin^2x$;

b) $2\cos^2x+\cos x<1$;

c) $4(\sin^2x-|\cos x|)\le 1$;

d) $4\cos^2x+2\sin^2x<5\cos x$.

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy. Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta

***5.16.** Wiedząc, że $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz, że $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{2}$, oblicz:

a) $\sin(\alpha+\beta)$; b) $\sin(\alpha-\beta)$; c) $\cos(\alpha+\beta)$; d) $\cos(\alpha-\beta)$.

***5.17.** Wiedząc, że $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $\sin\beta = \frac{1}{2}$, oblicz:

a) $\sin(\alpha+\beta)$; b) $\sin(\alpha-\beta)$; c) $\cos(\alpha+\beta)$; d) $\cos(\alpha-\beta)$.

***5.18.** Wyznacz α i β, jeśli wiadomo, że $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\sin(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}$.

***5.19.** Wykaż, że jeśli $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $\cos\alpha = \frac{1}{7}$, $\cos\beta = \frac{13}{14}$, to $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$.

***5.20.** Oblicz $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

***5.21.** Sprawdź, czy prawdziwe są następujące tożsamości:

a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

b) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$;

c) $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta) = \cos\beta$;

d) $\cos\beta\sin(\alpha-\beta) + \sin\beta\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha$.

***5.22.** Sprawdź, czy prawdziwe są następujące tożsamości, podaj konieczne założenia:

a) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

b) $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

c) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \cos 2\alpha$;

d) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \cos 2\alpha$.

***5.23.** Sprawdź, czy prawdziwe są następujące tożsamości, podaj konieczne założenia:

a) $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

b) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

c) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$;

d) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

***5.24.** Wykaż, że:

a) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

b) $2(1+\cos\alpha) - \sin^2\alpha = 4\cos^4\dfrac{\alpha}{2}$.

***5.25.** Udowodnij, że:

a) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{4}$;

b) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{5} = -\dfrac{1}{4}$.

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

***5.26.** Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu:

a) $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$;

b) $1 + \cos\alpha + \cos\dfrac{\alpha}{2}$;

c) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$;

d) $\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$.

***5.27.** Zamień sumę na iloczyn: $2\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha - 1$.

***5.28.** Przedstaw dane wyrażenie w postaci iloczynu wiedząc, że $\alpha + \beta + \gamma = \pi$:

a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$;

b) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma$.

***5.29.** Udowodnij, że:

a) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}\alpha$;

b) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)} = -\operatorname{ctg}\alpha$.

***5.30.** Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $y = \sin x + \cos x$;

b) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

c) $y = \cos x + \cos\dfrac{x}{2}$;

d) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Równania trygonometryczne

***5.31.** Rozwiąż równania:

a) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$;

b) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

***5.32.** Rozwiąż równania:

a) $2\cos x + 3 = 4\cos\dfrac{x}{2}$;

b) $1 + \cos x + \cos\dfrac{x}{2} = 0$;

c) $\sin 2x \operatorname{tg} x = 1$.

***5.33.** Rozwiąż równania:

a) $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$;

b) $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin 4x$;

c) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$;

d) $\sin^4\dfrac{x}{3} + \cos^4\dfrac{x}{3} = \dfrac{5}{8}$.

***5.34.** Rozwiąż równania:

a) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$;

b) $\sin x + \sin 2x = \sin 3x$;

c) $\cos x = \sin 2x + \cos 3x$;

d) $\sin 5x + \sin 3x = \sin 4x$.

***5.35.** Rozwiąż równania:

a) $\sin^2 2x = \sin 3x + \sin x$;

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$;

c) $\sin x \sin 2x = \cos x \cos 2x$;

d) $\cos x \sin 7x = \cos 3x \sin 5x$.

****5.36.** Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $\sin^4 x - \cos^4 x = 6m - \cos^2 2x$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

****5.37.** Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $1 + \sin^2(mx) = \cos x$ ma tylko jedno rozwiązanie.

****5.38.** Rozwiąż równania:

a) $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x) = 2$;

b) $\log_2(\cos x) + \log_{\frac{1}{2}}(-\sin x) = 0$;

c) $\log_{\cos x}(\sin x) + \log_{\sin x}(\cos x) = 2$.

Odpowiedzi:

5.1. a) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; c) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; d) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; e) 0; f) 0; g) 2; h) 1.

5.2. a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; c) 0; d) -2; e) $-\frac{1}{4}$; f) $\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$.

5.3. $-\frac{\sqrt{2}}{15}$.

5.4. $\frac{56}{65}$.

5.5. $6\frac{3}{7}$.

5.6. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

5.7. a) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in C$;
b) $x = 2\pi(1+4k) \vee x = 4\pi(1+2k),\ k \in C$; c) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in C$;
d) $x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \frac{8\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \frac{10\pi}{3} + 4k\pi,\ k \in C$;
e) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \vee x = (2k+1)\pi,\ k \in C$; f) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$.

5.8. a) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$;

b) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$;

c) $x = \alpha_0 + k\pi$, gdzie $\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{3}{2},\ k \in \boldsymbol{C} \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$;

d) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$.

5.9. a) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$; b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$;

c) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$;

d) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \vee$

$\vee\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$.

5.10. a) $x = \alpha_0 + k\pi$, gdzie $\operatorname{ctg} \alpha_0 = \frac{1}{7},\ k \in \boldsymbol{C} \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$;

b) $x = \alpha_0 + k\pi$, gdzie $\operatorname{ctg} \alpha_0 = \frac{1}{2},\ k \in \boldsymbol{C} \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$.

Wskazówka do a): Zauważ, że liczby mające postać $k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$, nie są rozwiązaniami równania, a następnie podziel strony równania przez $\sin^2 x$.

5.11. a) $x = 0{,}5$; b) $x = 2$.

5.12. a) $\langle -1, 3\rangle$; b) $\langle 0, 5\rangle$; c) $\left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$; d) $\left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$.

5.13. a) $\langle 7, 15\rangle$; b) $\left\langle -2\frac{1}{4}, 0\right)$; c) $\boldsymbol{R}$; d) $\left\langle -\frac{1}{5}, -\frac{1}{9}\right\rangle$.

5.14. a) $x \in \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right), k \in \boldsymbol{C}$; b) $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1 + k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{1 + k\pi}{2}\right\rangle, k \in \boldsymbol{C}$;

c) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right\rangle, k \in \boldsymbol{C}$; d) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \boldsymbol{C}$;

e) $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right), k \in \boldsymbol{C}$; f) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right\rangle, k \in \boldsymbol{C}$;

g) $x \in \boldsymbol{R} - \left\{\alpha : \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \boldsymbol{C}\right\}$; h) $x \in \boldsymbol{R} - \left\{\alpha : \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \boldsymbol{C}\right\}$.

5.15. a) $x \in \left\langle 2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi\right\rangle, k \in \boldsymbol{C}$;

b) $x \in \left(-\pi + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi\right),\ k \in \boldsymbol{C}$;

c) $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi,\ \frac{\pi}{3} + k\pi\right),\ k \in \boldsymbol{C}$; d) $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right),\ k \in \boldsymbol{C}$.

5.16. a) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$, b) $\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$, c) $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$, d) $\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$.

5.17. a) $\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$, b) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$, c) $-\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$, d) $-\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

5.18. $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{12}$.

5.20. $2-\sqrt{3}$. *Wskazówka*: Zauważ, że $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ i oblicz $\sin\frac{\pi}{12}$ i $\cos\frac{\pi}{12}$.

5.26. a) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$; b) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{4}\right)$;
c) $2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$; d) $4\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

5.27. $2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. *Wskazówka*: Zapisz dane wyrażenie w postaci $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)$.

5.28. a) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$; b) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

5.30. a) $\left\langle-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\rangle$; b) $(-\infty,-2\rangle\cup\langle 2,+\infty)$; c) $\left\langle-1\frac{1}{8},\ 2\right\rangle$; d) $\left\langle-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\rangle$.

5.31. a) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in \boldsymbol{C}$; b) $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in \boldsymbol{C}$.

5.32. a) $x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi \vee x=-\frac{2\pi}{3}+4k\pi$, $k\in \boldsymbol{C}$;
b) $x=\pi+2k\pi \vee x=\frac{4\pi}{3}+4k\pi \vee x=-\frac{4\pi}{3}+4k\pi$, $k\in \boldsymbol{C}$;
c) $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, $k\in \boldsymbol{C}$.

5.33. a) $x=k\pi \vee x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in \boldsymbol{C}$;
b) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{12}+k\pi \vee x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$, $k\in \boldsymbol{C}$; c) $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in \boldsymbol{C}$;
d) $x=\frac{\pi}{2}+3k\pi \vee x=\pi+3k\pi \vee x=-\frac{\pi}{2}+3k\pi \vee x=2\pi+3k\pi$, $k\in \boldsymbol{C}$.

5.34. a) $x=\frac{k\pi}{3} \vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in \boldsymbol{C}$; b) $x=\frac{2k\pi}{3} \vee x=k\pi$, $k\in \boldsymbol{C}$;
c) $x=\frac{k\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in \boldsymbol{C}$;
d) $x=\frac{k\pi}{4} \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in \boldsymbol{C}$.

5.35. a) $x=\frac{\pi}{2}k, k\in \boldsymbol{C}$; b) $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in \boldsymbol{C}$;
c) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi, k\in \boldsymbol{C}$; d) $x=\frac{k\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, k\in \boldsymbol{C}$.

5.36. $m\in\left\langle -\frac{1}{24}, \frac{1}{3}\right\rangle$.

5.37. $m\in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{W}$.

5.38. a) $\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in \boldsymbol{C}$; b) $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in \boldsymbol{C}$; c) $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in \boldsymbol{C}$.

Zadanie 70. *Obliczyć* $\sin 15^o$, $\sin 105^o$, $\operatorname{tg} 105^o$.

Zadanie 71. *Obliczyć* $\sin 2x$ *wiedząc* $\sin x=\frac{24}{25}$ *i* $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

Zadanie 72. *Obliczyć* $\sin x$ *oraz* $\cos x$ *wiedząc* $\operatorname{tg} x=\frac{4}{3}$ *i* $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

Zadanie 73. *Obliczyć* $\cos 20^o\cdot\cos 40^o\cdot\cos 80^o$.

Zadanie 74. *Zapisać w postaci iloczynowej*
$\cos x+\cos 7x$, $\sin x-\cos x$, $\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{3})$, $\sin x+\sin 3x+\sin 5x$.

Zadanie 75. *Zapisać w postaci sumy* $\cos 2x\cdot\cos 4x$, $\sin 3x\cdot\cos 5x$,

Zadanie 76. *Rozwiązać równania:* $\sin 5x+\sin x=0$, $\sin x-\cos x=0$,
$\sin x+\cos x=1$, $\cos 2x+2\cos x+1=0$, $\operatorname{tg}^4 x+4\operatorname{tg} x+3=0$,
$3^{\sin^2 x}=3^{\cos^2 x}+2$, $4(\log_2\cos x)^2+\log_2(1+\cos 2x)=3$.

Zadanie 77. *Zbadać istnienie rozwiązania równania w zależności od parametru* m
$\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=m$, $\sin^4 x+\cos^4 x=m$,
$\cos x+\sqrt{3}\cdot\sin x=\log(m-1)-\log(3-m)$, $\sin 3x=\dfrac{k^2-3k+2}{k^2-2}$.

Zadanie 78. *Rozwiązać równanie* $\sin 2(x-\pi)=\cos(x+\frac{\pi}{4})$.

Zadanie 79. *Rozwiązać równanie* $3-2\sqrt{2}\sin x=2\cos^2 x$.

Zadanie 80. *Rozwiązać równanie* $\sin x-\cos x=1$.

Zadanie 81. *Rozwiązać równanie* $\sin 6x-\sin 4x=\sin 4x-\sin 2x$.