Na początek zadania ze zbioru zadań ze szkoły średniej.

Ciągi monotoniczne

7.18. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym, jeśli:

a) $a_n = 3 - \frac{2}{n}$;

b) $a_n = \frac{1}{1-3n}$;

c) $a_n = 1 - \frac{4}{n+1}$;

d) $a_n = \frac{n+1}{n+3}$.

7.19. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym, jeśli:

a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$;

b) $a_n = \frac{3}{2n+3}$;

c) $a_n = \frac{n+4}{n+1}$;

d) $a_n = 2 - \frac{1}{2-3n}$.

7.20. Zbadaj monotoniczność ciągów:

a) $a_n = n^2 + 3n$;

b) $a_n = n^2 - 5n$;

c) $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$;

d) $a_n = \frac{3n+2}{n+4}$.

7.21. Podaj przykład ciągu rosnącego o wyrazach:

a) dodatnich;

b) ujemnych.

DOM

7.22. Podaj przykład ciągu malejącego (a_n) o tej własności, że ciąg (b_n), $b_n = |a_n|$:

a) jest malejący;

b) jest rosnący;

c) nie jest monotoniczny.

7.23. Ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym o wyrazach dodatnich. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n), wiedząc, że:

a) $b_n = -3a_n$;

b) $b_n = \frac{1}{4}a_n$;

c) $b_n = \frac{1}{a_n}$;

d) $b_n = {a_n}^2$.

Granica ciągu liczbowego

7.24. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym a_n. Które wyrazy tego ciągu spełniają nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$, jeśli:

a) $a_n = \frac{2n+1}{n}$, $g = 2$,

1) $\varepsilon = \frac{1}{100}$, 2) $\varepsilon = \frac{17}{1000}$, 3) $\varepsilon = \frac{3}{100000}$;

b) $a_n = \dfrac{n}{n+5}$, $g = 1$,

1) $\varepsilon = \dfrac{3}{50}$, 2) $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$, 3) $\varepsilon = \dfrac{29}{10000}$;

c) $a_n = \dfrac{2-3n}{n+2}$, $g = -3$,

1) $\varepsilon = \dfrac{4}{125}$, 2) $\varepsilon = \dfrac{21}{2351}$, 3) $\varepsilon = \dfrac{1}{1000000}$;

d) $a_n = \dfrac{1}{n^2+2}$, $g = 0$,

1) $\varepsilon = \dfrac{7}{85}$, 2) $\varepsilon = \dfrac{27}{10235}$, 3) $\varepsilon = \dfrac{1}{123456}$.

7.25. Korzystając z definicji granicy ciągu, wykaż, że liczba:

a) 0 jest granicą ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{3}{n}$;

b) 1 jest granicą ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{n+1}{n+3}$;

c) –2 jest granicą ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{1-2n}{n}$;

d) $\dfrac{1}{4}$ jest granicą ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{2n+1}{3+8n}$.

7.26. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n:

a) $a_n = \dfrac{2n+5}{1+10n}$;

b) $a_n = \left(\dfrac{5-3n}{1-2n}\right)^2$;

c) $a_n = \dfrac{4+4n}{3+3n}$;

d) $a_n = \dfrac{5-2n}{7+1{,}5n}$;

e) $a_n = \dfrac{n^2-2n+7}{2n^2+n-2}$;

f) $a_n = \dfrac{(3n+1)^2}{n^2+1}$;

g) $a_n = \dfrac{(\sqrt{n}+4)^2}{2n+13}$;

h) $a_n = \dfrac{(2n+1)(2n-1)}{(3n+6)(2n+2)}$.

7.27. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n:

a) $a_n = \dfrac{3-2n}{4n+3}$;

b) $a_n = \dfrac{4n-2}{1-3n} + 1$;

c) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{16n}}{5-\sqrt[3]{2n}}$;

d) $a_n = \dfrac{6n}{2+\sqrt{2n}}$;

e) $a_n = \dfrac{6n(2n+1)}{3n^2+5n-1}$;

f) $a_n = \dfrac{(n+3)(2n-1)}{(3-2n)(3n+2)}$;

g) $a_n = \dfrac{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}{(2\sqrt{n}+3)^2}$;

h) $a_n = \dfrac{(3\sqrt{n}-1)^2}{(5\sqrt{n}+2)^2}$.

7.28. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n :

a) $a_n = \dfrac{n^3 - 2n^2 + 5}{0{,}5n^3 + 4n^2 + n}$;

b) $a_n = \dfrac{2n^3 + 5n^2 - 6n - 2}{6n^3 - 4n^2 - 2n + 5}$;

c) $a_n = \dfrac{(2n^2 + 3)^2}{n^4 - 9}$;

d) $a_n = \dfrac{5n^2 - (3n-1)^2}{(2n+1)^2}$;

e) $a_n = \sqrt{\dfrac{5}{n+1}}$;

f) $a_n = \sqrt{\dfrac{4n^3 + n^2}{n^3 + 2}}$;

g) $a_n = \sqrt{\dfrac{(2n+1)(3n-2)}{(n+4)(n+5)}}$;

h) $a_n = \sqrt{\dfrac{(3n+5)^2}{(1-2n)^2}}$.

7.29. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n:

a) $a_n = \sqrt[n]{4^n + 5^n}$;

b) $a_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{7}{8}\right)^n + 1 + \left(\dfrac{8}{7}\right)^n}$;

c) $a_n = \sqrt[n]{6^n + 7^n + 8^n}$;

d) $a_n = \sqrt[n]{17^n + 8^n + 4^n}$;

e) $a_n = \dfrac{n \cdot \sin(2n)}{(3n-1)^2}$;

f) $a_n = \dfrac{\cos(n^5)}{n+1}$;

g) $a_n = \dfrac{2n^2 \cdot \cos(4n)}{n^3 + 3n + 5}$;

h) $a_n = \dfrac{\sin n}{n^2 + 1}$.

7.30. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n :

a) $a_n = \dfrac{5^n - 4^n}{5^n + 4^n}$;

b) $a_n = \dfrac{7^n - 2}{2 - 7^{n-1}}$;

c) $a_n = \dfrac{3 \cdot 2^{2n} - 5}{8 \cdot 4^n + 5}$;

d) $a_n = \dfrac{3^n - 4^{n+1}}{4^{n+1}}$;

e) $\dfrac{3^n + 1}{5 \cdot 3^n + 6}$;

f) $\dfrac{(2^n + 1)^2}{4^n + 2^n}$;

g) $\dfrac{(2 \cdot 3^n - 1)^2}{(3^n + 2^n)^2}$;

h) $\dfrac{16^n + 4}{(2^{2n} - 2)(2^{2n} + 2)}$.

7.31. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n:

a) $\sqrt{n} - \sqrt{n+1}$;

b) $\sqrt{2n+4} - \sqrt{2n}$;

c) $\sqrt{n^2 + n} - n$;

d) $\sqrt{3n^2 - 2n} - \sqrt{3n^2 - 1}$;

e) $a_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n}$;

f) $a_n = \sqrt{n^2 - 2n} - n$;

g) $a_n = \sqrt{2n^2 + 10n - 3} - \sqrt{2n^2 - 2n + 3}$;

h) $a_n = \dfrac{\sqrt{n(n+2)} - n}{n + 2 - \sqrt{n(n+2)}}$.

7.32. Wiedząc, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{3}$, oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + 3b_n)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n \cdot b_n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{b_n}\right)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n - 6b_n)$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot a_n \cdot b_n}{a_n + b_n}\right)$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

Liczba *e*

***7.34.** Wiedząc, że $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$, o ile $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i $a_n \neq 0$, dla $n \in \mathbb{N}_+$, oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym e_n:

a) $e_n = \left(1+\frac{6}{n}\right)^n$;

b) $e_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$;

c) $e_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{n+2}$;

d) $e_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{-n}$;

e) $e_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2}$;

f) $e_n = \left(\frac{n-7}{n}\right)^{n-1}$;

g) $e_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2-1}$;

h) $e_n = \left(\frac{n^3+3}{n^3}\right)^{3n^3}$.

Ciągi rozbieżne do nieskończoności

***7.36.** Korzystając z odpowiednich definicji, wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = 5n + 12$ jest rozbieżny do $+\infty$;

b) $a_n = 2 - 3n$ jest rozbieżny do $-\infty$;

c) $a_n = 2n^2 + 1$ jest rozbieżny do $+\infty$;

d) $a_n = \frac{n^2+1}{n}$ jest rozbieżny do $+\infty$.

***7.37.** Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeśli:

a) $a_n = 1 - 2n$;

b) $a_n = 3n - 5$;

c) $a_n = 2n^2 - 3n + 7$;

d) $a_n = (1 - 3n)(1 + 6n)$;

e) $a_n = 5(n-3)^2 - 10$;

f) $a_n = 5n^4 - 4n^3 + 3n^2 - 2n + 1$;

g) $a_n = (n^3 - 3)^2 - (n^3 + 1)^2$;

h) $a_n = -3n^5 + 2n^3 + n^2 - 7n$.

7.38. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeśli:

a) $a_n = \frac{2n+3}{5}$;

b) $a_n = \frac{3n^2-3n+7}{n-25}$;

c) $a_n = \frac{-2n^4+5n-7}{3n^2-6n}$;

d) $a_n = \frac{(n-2)(3-n)}{2n+7}$;

e) $a_n = \frac{-2(n-3)(n+2)(1-n)}{(2n-5)(n+7)(3-7n)}$;

f) $a_n = \frac{(2n-3)^2-(n+2)^2}{3n+1-n^2}$;

g) $a_n = \frac{4n^5-3n^4+10n^2-7}{(2n^2-8)^2}$;

h) $a_n = \frac{3n^4-2n^5-3n^6}{n^4+3n^3-5n^2-3}$.

7.39. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeśli:

a) $a_n = \sqrt{2n}-\sqrt{n+10}$;

b) $a_n = \sqrt{2n^2+n}-2n$;

c) $a_n\sqrt{4n^2+2n+1}-\sqrt{5n^2-3n+2}$;

d) $a_n = \sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{10n+5}$.

7.40. Dla jakich wartości parametru p ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt{4n^2+3n+5}-(p\cdot n+1)$:

a) ma granicę niewłaściwą $-\infty$;

b) ma granicę właściwą (oblicz tę granicę);

c) ma granicę niewłaściwą $+\infty$?

Odpowiedzi:

7.20. a) ciąg rosnący; b) ciąg nie jest monotoniczny; c) ciąg malejący; d) ciąg rosnący.

7.23. a) ciąg rosnący; b) ciąg malejący; c) ciąg rosnący; d) ciąg malejący.

7.24. c) 1) $a_{249}, a_{250}, a_{251}, \ldots$; 2) $a_{894}, a_{895}, a_{896}, \ldots$; 3) $a_{7999999}, a_{8000000}, a_{8000001}, \ldots$

7.26. a) 0,2; b) 2,25; c) $1\frac{1}{3}$; d) $-1\frac{1}{3}$; e) 0,5; f) 9; g) 0,5; h) $\frac{2}{3}$.

7.27. a) $-\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{3}$; c) -2; d) $3\sqrt{2}$; e) 4; f) $-\frac{1}{3}$; g) $\frac{1}{4}$; h) $\frac{9}{25}$.

7.28. a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) 4; d) -1; e) 0; f) 2; g) $\sqrt{6}$; h) $\frac{3}{2}$.

7.29. a) 5; b) $\frac{8}{7}$; c) 8; d) 17; e) 0; f) 0; g) 0; h) 0.

7.30. a) 1; b) -7; c) $\frac{3}{8}$; d) -1; e) $\frac{1}{5}$; f) 1; g) 4; h) 1.

7.31. a) 0; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; e) 0; f) -1; g) $3\sqrt{2}$; h) 1.

7.32. a) 4.

7.34. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{n}\right)^{\frac{n}{6}}\right]^{6}=e^{6}$; b) e^{-1}; c) e^{3}; d) e^{2}; e) e^{2}; f) e^{-7}; g) e^{-1}; h) e^{9}.

7.37. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) $+\infty$; g) $-\infty$; h) $-\infty$.

7.38. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $-\infty$; e) $-\frac{1}{7}$; f) -3; g) $+\infty$; h) $-\infty$.

7.39. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$.

7.40. a) $p\in(2,+\infty)$; b) $p=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\frac{1}{4}$; c) $p\in(-\infty,2)$.