Zadania

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.17 - 2.40):

2.17. $u_n=\dfrac{n}{n+1}$.

2.18. $u_n=\dfrac{4n-3}{6-5n}$.

2.19. $u_n=\dfrac{n^2-1}{3-n^3}$.

2.20. $u_n=\dfrac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$.

2.21. $u_n=\dfrac{(n-1)(n+3)}{3n^2+5}$.

2.22. $u_n=\dfrac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$.

2.23. $u_n=\dfrac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$.

2.24. $u_n=\dfrac{3}{n}-\dfrac{10}{\sqrt{n}}$.

2.25. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$.

2.26. $u_n=\left(\dfrac{2n-3}{3n+1}\right)^2$.

2.27. $u_n=\left(\dfrac{5n-2}{3n-1}\right)^3$.

2.28. $u_n=\dfrac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}$.

2.29. $u_n=\dfrac{\sqrt{n}-2}{3n+5}$.

2.30. $u_n=\dfrac{n-10}{3}$.

2.31. $u_n=\dfrac{(-0{,}8)^n}{2n-5}$.

2.32. $u_n=\dfrac{2-5n-10n^2}{3n+15}$.

2.33. $u_n=\dfrac{2n+(-1)^n}{n}$.

2.34. $u_n=\dfrac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$.

2.35. $u_n=\sqrt{\dfrac{3n-2}{n+10}}$.

2.36. $u_n=\sqrt[3]{\dfrac{n-1}{8n+10}}$.

2.37. $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$.

2.38. $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$.

2.39. $u_n=\dfrac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n}-n}$.

2.40. $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+7n}-2n}$.

2.41. $u_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$.

2.42. $u_n=\sqrt{n^2+n}-n$.

2.43. $u_n=n-\sqrt{n^2+5n}$.

2.44. $u_n=\sqrt{3n^2+2n-5}-n\sqrt{3}$.

2.45. $u_n=3n-\sqrt{9n^2+6n-15}$.

2.46. $u_n=\sqrt[3]{n^3+4n^2}-n$.

2.47. $u_n=n\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}$.

2.48. $u_n=\dfrac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}$.

2.49. $u_n=\dfrac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7}$.

2.50. $u_n=\dfrac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{n-1}+3}$.

2.51. $u_n=\dfrac{-8^{n-1}}{7^{n+1}}$.

2.52. $u_n=\dfrac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$.

2.53. $u_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\dfrac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$.

2.54. $u_n=\sqrt[n]{3^n+2^n}$.

2.55. $u_n=\sqrt[n]{10^n+9^n+8^n}$.

2.56. $u_n=\sqrt[n]{10^{100}}-\sqrt[n]{\dfrac{1}{10^{100}}}$.

2.57. $u_n=\sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n+(\frac{3}{4})^n}$.

2.58. $u_n=\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.59):

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2.59. $u_n=\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.56):

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.60. $u_n=\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$.

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.62):

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2.61. $u_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

2.62. $u_n=\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$.

2.63. $u_n=\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\ldots+\dfrac{n}{n^k}$.

2.64. $u_n=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

2.65. $u_n=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

2.66. $u_n=\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n$.

2.67. $u_n=\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^n$.

2.68. $u_n=\left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{-n+3}$

2.69. $u_n=\left(\dfrac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$.

2.70. $u_n=\left(\dfrac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

2.71. $u_n=\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$.

2.72. $u_n=\sqrt{n\,(n-\sqrt{n^2-1})}$.

2.73. $u_n=n\,(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1})$.

2.74. $u_n=\sqrt[n]{2n^3-3n^2+15}$.

2.75. $u_n=\sqrt{n^{10}-2n^2+2}$.

2.76. $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$.

2.77. $u_n=\dfrac{1}{2n}\cos n^3-\dfrac{3n}{6n+1}$.

2.78. $u_n=2^{-n}a\cos n\pi$.

2.79. $u_n=\dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$.

2.80. $u_n=(\sin n!)\,\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{2n}{3n+1}\cdot\dfrac{n}{1-3n}$.

2.81. $u_n=\dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1}-\dfrac{n}{1-2n}\cdot\dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$.

2.82. $u_n=n\,(\ln(n+1)-\ln n)$.

2.83. $u_n=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}$.

2.84. $u_n=\dfrac{\log_2 n^5}{\log_8 n}$.

2.85. $u_n=\dfrac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$.

2.86. $u_n=\dfrac{8^{\log_2 n}}{2^n}$.

2.87. $u_n=\dfrac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$.

2.88. $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

2.89. $u_n=\dfrac{2^n\cdot 3^{2n}}{n!}$.

2.90. $u_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\dots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Wskazówka. Każdy czynnik postaci $1-\dfrac{1}{k^2}$ przedstawić w postaci

$$\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k},$$

a następnie uprościć iloczyn.

Odpowiedzi:

2.17. 1. **2.18.** $-\frac{4}{5}$. **2.19.** 0. **2.20.** -2. **2.21.** $\frac{1}{3}$.

2.22. $\frac{1}{3}$. **2.23.** $-\frac{1}{10}$. **2.24.** 0. **2.25.** 0. **2.26.** $\frac{4}{9}$.

2.27. $\frac{125}{27}$. **2.28.** 1. **2.29.** 0. **2.30.** ∞. **2.31.** 0.

2.32. $-\infty$. **2.33.** 2. **2.34.** $\sqrt{2}-2$. **2.35.** $\sqrt{3}$. **2.36.** $\frac{1}{2}$.

2.37. $\frac{1}{3}$. **2.38.** 1.

2.39. 1. Podzielić licznik i mianownik ułamka przez n.

2.40. $\frac{4}{7}$. **2.41.** 0. **2.42.** $\frac{1}{2}$. **2.43.** $-\frac{5}{2}$. **2.44.** $1/\sqrt{3}$.

2.45. -1. **2.46.** $\frac{4}{3}$. **2.47.** $-5/3\sqrt[3]{4}$ **2.48.** $\frac{1}{4}$. **2.49.** $\frac{5}{4}$.

2.50. $\frac{48}{5}$. **2.51.** $-\infty$. **2.52.** -1. **2.53.** $\frac{2}{3}$. **2.54.** 3.

2.55. 10. **2.56.** 0. **2.57.** $\frac{3}{4}$. **2.58.** $\frac{1}{2}$. **2.59.** $\frac{1}{3}$.

2.60. $\frac{1}{4}$. **2.61.** $\frac{4}{3}$.

2.62. $\dfrac{3}{4(1-a)}$ dla $|a|<1$; jeżeli $|a|\geqslant 1$, to ciąg jest rozbieżny.

2.63. 0 przy $k>2$, $\frac{1}{2}$ przy $k=2$ oraz ∞ przy $k<2$.

2.64. e^2. **2.65.** 1. **2.66.** e^5. **2.67.** $e^{-1/3}$. **2.68.** e^4.

2.69. e^6. **2.70.** $e^{3/2}$. **2.71.** 1. **2.72.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. **2.73.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2.74. 1. Przyjąć $u_n=\sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^3\ \sqrt[n]{1-\dfrac{3}{2n}+\dfrac{15}{2n^3}}$; granica pierwszego i drugiego czynnika równa się 1, dla trzeciego czynnika stosujemy twierdzenie, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, jeżeli $a_n\geqslant 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq\infty$.

2.75. 1. **2.76.** 1. **2.77.** $-\frac{1}{2}$. **2.78.** 0. **2.79.** 0.

2.80. $-\frac{2}{9}$. **2.81.** 0. **2.82.** 1. **2.83.** 3.

2.84. 15. Oprzeć się na wzorze $\log_g a=\dfrac{1}{\log_k g}\log_k a$.

2.85. 1. Oprzeć się na wzorze $a^{\log_g b}=b^{\log_g a}$.

2.86. 0. Oprzeć się na wzorze w odpowiedzi do zad. 2.84 i na zad. 2.12.

2.87. 0.

2.88. 0. Zauważyć, że $0<\dfrac{n!}{n^n}\leqslant\dfrac{1}{n}$.

2.89. 0. Zauważyć, że $2^n\cdot 3^{2n}=18^n$; następnie oprzeć się na zad. 2.12.

2.90. $\frac{1}{2}$.