Dyskretne układy dynamiczne

23 października 2017

Ciągi rekurencyjne

Rozpoczynamy od przedstawienia przeróżnych własności liczb Fibonacciego, czyli wyrazów ciągu

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \cdots$$

Ciąg ten w tej książce oznaczamy przez (u_n). Wyrazy u_1 i u_2 są równe 1, a następne wyrazy są zdefiniowane za pomocą reguły rekurencyjnej

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Każdy ciąg liczbowy (a_n), spełniający regułę $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, nazywamy ciągiem Fibonacciego. Ciąg liczb Fibonacciego jest więc jednym z przykładów ciągów Fibonacciego. Ustaliliśmy w tym przypadku, że dwa początkowe wyrazy są równe 1. Możemy jednak za te dwa początkowe wyrazy przyjąć inne liczby. Otrzymamy wtedy różne ciągi Fibonacciego, którym poświęcamy cały rozdział 3. W szczególnym przypadku, gdy $a_1 = 1$ i $a_2 = 3$, otrzymujemy nieskończony ciąg

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ \cdots .$$

Jest to ciąg liczb Lucasa. W książce ten ciąg oznaczamy przez (v_n) i zajmujemy się nim w rozdziale 4.

Rozważamy w nich ciągi (a_n) spełniające regułę rekurencyjną postaci

$$a_{n+s} = \lambda_{s-1} a_{n+(s-1)} + \cdots + \lambda_1 a_{n+1} + \lambda_0 a_n + \gamma.$$

Tutaj s jest liczbą naturalną oraz $\gamma, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}$ są ustalonymi elementami będącymi liczbami lub ogólniej elementami dowolnego pierścienia przemiennego. Tego typu ciągi nazywamy liniowymi ciągami rekurencyjnymi.

badamy, między innymi, ciągi (z_n) takie, że $z_1 = z_2 = \cdots = z_{s+1} = 1$ oraz

$$z_n = \frac{(z_{n-1} + z_{n-2} + \cdots + z_{n-s})^2}{z_{n-(s+1)}},$$

dla $n \geqslant s+2$.

badamy ciągi Somosa

Niech $a = (a_n)$ będzie ciągiem liczbowym i niech $s \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną.

Mówimy, że a jest *ciągiem Somosa s-tego rzędu* jeśli

$$a_n a_{n-s} = \sum_{i=1}^{[s/2]} a_{n-i} a_{n-(s-i)},$$

dla wszystkich $n > s$.

Liczby Fibonacciego

Liczbą Fibonacciego nazywamy każdy wyraz ciągu (u_n) określonego równościami:

$$\begin{cases} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_n + u_{n+1}, \end{cases}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Przyjmujemy ponadto, że $u_0 = 0$.

Tablica przedstawia liczby Fibonacciego od u_1

1	1	34	5702887	67	44945570212853
2	1	35	9227465	68	72723460248141
3	2	36	14930352	69	117669030460994
4	3	37	24157817	70	190392490709135
5	5	38	39088169	71	308061521170129
6	8	39	63245986	72	498454011879264
7	13	40	102334155	73	806515533049393
8	21	41	165580141	74	1304969544928657
9	34	42	267914296	75	2111485077978050
10	55	43	433494437	76	3416454622906707
11	89	44	701408733	77	5527939700884757
12	144	45	1134903170	78	8944394323791464
13	233	46	1836311903	79	14472334024676221
14	377	47	2971215073	80	23416728348467685
15	610	48	4807526976	81	37889062373143906
16	987	49	7778742049	82	61305790721611591
17	1597	50	12586269025	83	99194853094755497
18	2584	51	20365011074	84	160500643816367088
19	4181	52	32951280099	85	259695496911122585
20	6765	53	53316291173	86	420196140727489673
21	10946	54	86267571272	87	679891637638612258
22	17711	55	139583862445	88	1100087778366101931
23	28657	56	225851433717	89	1779979416004714189
24	46368	57	365435296162	90	2880067194370816120
25	75025	58	591286729879	91	4660046610375530309
26	121393	59	956722026041	92	7540113804746346429
27	196418	60	1548008755920	93	12200160415121876738
28	317811	61	2504730781961	94	19740274219868223167
29	514229	62	4052739537881	95	31940434634990099905
30	832040	63	6557470319842	96	51680708854858323072
31	1346269	64	10610209857723	97	83621143489848422977
32	2178309	65	17167680177565	98	135301852344706746049
33	3524578	66	27777890035288	99	218922995834555169026

1.1 Wzór Bineta i złota liczba

Przez Φ i Ψ oznaczać będziemy następujące dwie liczby rzeczywiste

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Liczby te są pierwiastkami wielomianu $x^2 - x - 1$. Zachodzą równości:

$$\Phi + \Psi = 1, \quad \Phi - \Psi = \sqrt{5}, \quad \Phi\Psi = -1, \quad \Phi^2 = \Phi + 1, \quad \Psi^2 = \Psi + 1.$$

1.1.1 (Binet). *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \Psi^n\right)$, czyli*

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}\,.$$

D. Niech $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \Psi^n\right)$ dla $n \in \mathbb{N}_0$. Zauważmy, że $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ oraz:

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+2} - \Psi^{n+2}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^2\Phi^n - \Psi^2\Psi^n\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left((\Phi+1)\Phi^n - (\Psi+1)\Psi^n\right) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} + \Phi^n - \Psi^{n+1} - \Psi^n\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}\right) + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \Psi^n\right) \\
&= x_{n+1} + x_n,
\end{aligned}$$

dla $n \in \mathbb{N}_0$. Zatem, $u_n = x_n$, dla $n \in \mathbb{N}_0$. $\boxtimes$

Powyższa równość jest nazywana *wzorem Bineta*. Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856); astronom, fizyk i matematyk francuski. Wzór ten pojawił się w jego pracy naukowej w 1843 roku. W książce [Mol2] na stronie 5 jest informacja, że ten wzór podał wcześniej, w 1730 roku, Abraham de Moivre (1667 – 1754, matematyk angielski urodzony we Francji).

1.1.2. *Liczby Fibonacciego u_m można zdefiniować również dla ujemnych liczb całkowitych m. Przyjmuje się, że $u_0 = 0$ oraz*

$$\boxed{u_{-n} = (-1)^{n+1}u_n}\ .$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Przykłady: $u_{-1} = 1$, $u_{-2} = -1$, $u_{-3} = 2$, $u_{-4} = -3$. Wtedy $u_{a+2} = u_{a+1} + u_a$, dla $a \in \mathbb{Z}$. Ponadto, dla dowolnej liczby całkowitej a zachodzi równość

$$\boxed{u_a = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^a - \Psi^a\Big)}\ .$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} u_{-n} &= (-1)^{n+1}u_n = \tfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^n - \Psi^n\Big) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\Big((-\Phi)^n + (-\Psi)^n\Big) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\Psi^{-1}\big)^n + \big(\Phi^{-1}\big)^n\Big) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{-n} - \Psi^{-n}\Big). \end{aligned}$$

Zatem $u_{-n} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{-n} - \Psi^{-n}\Big)$. Pozostałe równości są oczywiste. ⊠

Pojawiła się liczba

$$\boxed{\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}},$$

którą często nazywa się *złotą liczbą*. Istnieją też inne nazwy: *złota proporcja*, *boski stosunek*, *złoty stosunek* . Jest to liczba większa od jedynki. Prostokąt o wymiarach $\Phi \times 1$ nazywa się *złotym prostokątem*. Niech AB będzie odcinkiem o długości Φ i na tym odcinku zaznaczmy punkt C odległy o 1 od punktu A. Otrzymamy wtedy złoty podział odcinka AB, tzn.:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1}.$$

Liczba Ψ jest ujemna. Liczba przeciwna do niej jest odwrotnością liczby Φ. Mamy równości:

$$-\Psi = \Phi^{-1} = \Phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

1.1.3. $\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$, $\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2$ *i ogólnie:*

$$\Phi^{a+2} = \Phi^{a+1} + \Phi^a \quad \textit{dla} \quad a \in \mathbb{Z}.$$

1.1.4. $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}$.

1.1.5.

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

1.1.6. *Stosunek przekątnej pięciokąta foremnego do jego boku jest równy* Φ.

1.1.7. $\cos 36^0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2}\Phi$.

Powróćmy do liczb Fibonacciego.

1.1.9. *Ze wzoru Bineta* 1.1.1 *wynika natychmiast, że*

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

1.1.10. *Dla każdej liczby naturalnej s zachodzi równość*

$$\Phi^s = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+s}}{u_n}.$$

D. Niech $q = \Phi/\Psi$. Zauważmy, że $|q| = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$. Ze wzoru Bineta otrzymujemy:

$$\frac{u_{n+s}}{u_n} = \frac{\Phi^{n+s} - \Psi^{n+s}}{\Phi^n - \Psi^n} = \frac{\Phi^s - q^n\Psi^s}{1 - q^n}.$$

Ale ciąg (q^n) jest zbieżny do zera, więc $\lim \frac{u_{n+s}}{u_n} = \frac{\Phi^s - 0\Psi^s}{1-0} = \Phi^s$. ⊠

Powróćmy do liczb Fibonacciego.

1.1.9. *Ze wzoru Bineta* 1.1.1 *wynika natychmiast, że*

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

1.1.10. *Dla każdej liczby naturalnej s zachodzi równość*

$$\Phi^s = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+s}}{u_n}.$$

D. Niech $q = \Phi/\Psi$. Zauważmy, że $|q| = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$. Ze wzoru Bineta otrzymujemy:

$$\frac{u_{n+s}}{u_n} = \frac{\Phi^{n+s} - \Psi^{n+s}}{\Phi^n - \Psi^n} = \frac{\Phi^s - q^n\Psi^s}{1 - q^n}.$$

Ale ciąg (q^n) jest zbieżny do zera, więc $\lim \frac{u_{n+s}}{u_n} = \frac{\Phi^s - 0\Psi^s}{1 - 0} = \Phi^s$. ⊠

Zanotujmy kilka równości z liczbą Φ i częścią całkowitą.

1.1.12. $u_n = \left[\dfrac{\Phi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2}\right]$ *dla* $n \geqslant 0$. ([AlfU] 39).

D. Rozpatrzmy liczbę $x_n = \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} - u_n$. Na mocy wzoru Bineta liczba ta jest równa $\frac{1}{2} + \frac{\Psi^n}{\sqrt{5}}$. Ale

$$0 < |\Psi| = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| < 1,$$

więc $0 < \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,|\Psi^n| < \dfrac{1}{2}$ i stąd wynika, że $0 < x_n < 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Mamy więc

$$\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} = u_n + x_n$$

(gdzie $0 < x_n < 1$) i stąd $\left[\dfrac{\Phi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2}\right] = u_n$. ⊠

1.1.13. $u_{2n} = [\Phi u_{2n-1}],\ \ u_{2n+1} = [\Phi u_{2n}] + 1,\ \ u_{2n+1} = \left[\Phi^2 u_{2n-1}\right]$, *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([FQ] H-367).

D. Rozpatrzmy liczbę $\Phi u_{2n-1} - u_{2n}$. Korzystając ze wzoru Bineta mamy:

$$\begin{aligned}
\Phi u_{2n-1} - u_{2n} &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{2n} - \Phi\Psi^{2n-1} - \Phi^{2n} + \Psi^{2n}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Psi^{2n} - \Phi\Psi^{2n-1}\right) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Psi^{2n} + \Psi^{2n-2}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\Psi^{2n-2}(\Psi^2+1) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\Psi^{2n-2}\left(-\sqrt{5}\Psi\right) = -\Psi^{2n-1} \\
&= \left(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n-1}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$, więc $0 < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n-1} < 1$. Zatem $0 < \Phi u_{2n-1} - u_{2n} < 1$ i mamy równość $u_{2n} = [\Phi u_{2n-1}]$. W podobny sposób wykazujemy drugą równość. Trzecia równość wynika z pierwszej:

$$\left[\Phi^2 u_{2n-1}\right] = [(\Phi+1)u_{2n-1}] = [\Phi u_{2n-1}] + u_{2n-1} = u_{2n} + u_{2n-1} = u_{2n+1}. \quad \boxtimes$$