Dyskretne układy dynamiczne

30 listopada 2017

Przekształcenie piekarza

INTUICJA

Teoria ergodyczna to dziedzina matematyki zajmująca się badaniem przekształceń określonych na abstrakcyjnych przestrzeniach, ze szczególnym uwzględnieniem asymptotycznych własności tych przekształceń.

Matematyczny model:

X — zbiór wszystkich stanów układu

T_t -– przekształcenia przestrzeni X (funkcje $T_t : X \to X$) odpowiadające upływowi czasu t,
tzn. po czasie t układ przechodzi od stanu x do stanu $T_t(x)$

Zakładamy, że $T_{t+s}(x) = T_t(T_s(x))$ dla każdego stanu x

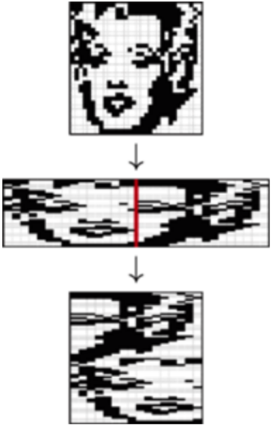
Przekształcenie piekarza

Rozważmy przekształcenie kwadratu jednostkowego

dane wzorem

$$T(x,y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{y}{2}\right) & \text{dla } x < \frac{1}{2}, \\ \left(2x-1, \frac{y+1}{2}\right) & \text{dla } x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Działanie tego przekształcenia pokazano na **rysunku** spłaszcza i rozciąga ono wyjściowy kwadrat do prostokąta o podstawie 2 i wysokości $\frac{1}{2}$, następnie rozcina uzyskany prostokąt na dwa prostokąty o podstawie 1, a w końcu układa te prostokąty jeden na drugim, tak że znowu powstaje kwadrat jednostkowy. Z uwagi na to rozciąganie i ściskanie (operacje doskonale znane każdemu, kto kiedykolwiek wyrabiał ciasto drożdżowe) przekształcenie piekarza zachowuje (dwuwymiarową) miarę Lebesgue'a. Okazuje się, że przekształcenie to ma następującą własność



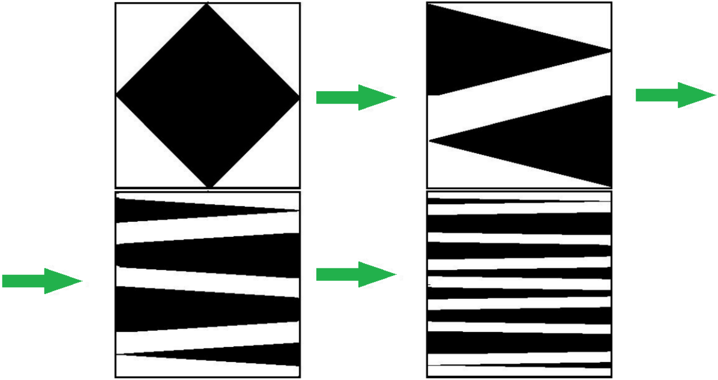
Rys. Przekształcenie piekarza

X – kwadrat, którego bokami są odcinki $[0,1)$

T – przekształcenie kwadratu, w którym kwadrat najpierw ściskamy dwukrotnie w pionie, a następnie przekrawamy na pół i jedną połówkę ustawiamy na drugiej

$$T(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & \text{dla } x < \frac{1}{2} \\ (2x-1, \frac{1}{2}y+1) & \text{dla } x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Weźmy kwadratowe ciasto z nadzieniem,
i wykonajmy czterokrotnie przekształcenie piekarza.



Jeśli przez P(A) oznaczymy pole zbioru A, to przekształcenie kwadratu T ma własność mieszania, gdy dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi:

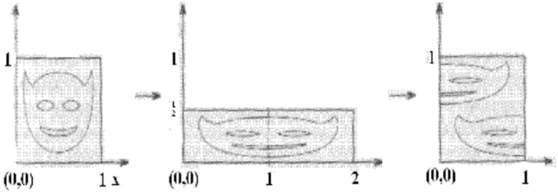
$$P(A \cap T^n B) \xrightarrow{n \to \infty} P(A) \cdot P(B)$$

$$\lim_{n \to \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B),$$

czyli po dużej liczbie iteracji przekształcenia T obraz $T^n(A)$ dowolnego zbioru A rozkłada się prawie równomiernie po całym kwadracie.

Klasyczne przekształcenie piekarza

Model ten jest układem mieszającym się w obrębie sklejania się górnej i dolnej połówki.



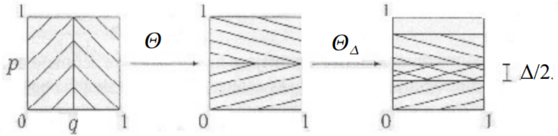
Rys. Klasyczne przekształcenie piekarza

Klasyczne przekształcenie nieuważnego piekarza

Można skonstruować model nieważnego piekarza polegająca na niedokładnym przełożeniu prawej strony na górną połówkę. Wówczas dochodzi do nasunięcia się górnej części kwadratu reprezentującego przestrzeń fazową na dolną o wielkość $\Delta/2$, $\Delta \in [0,1]$

$$\Theta_\Delta : \quad \begin{aligned} & q \to 2q - [2q] \\ & p \to \frac{1}{2}(p + [2p])(1-\Delta) \end{aligned}$$

Transformacja Θ_Δ przedstawia klasyczną operację nasunięcia, która przekształca dolną połowę kwadratu I na siebie, a górną połowę przesuwa w dół o $\Delta/2$.

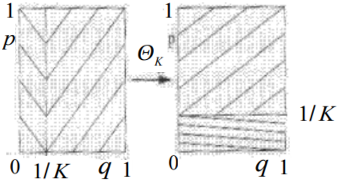


Rys. Przekształcenie nieuważnego piekarza

Klasyczne asymetryczne przekształcenie piekarza

$$\Theta_K: \quad \begin{aligned} q &\to Kq \\ p &\to \frac{1}{K}p \end{aligned} \qquad q<1/K$$

$$\Theta_K: \quad \begin{aligned} q &\to \frac{K}{K-1}q-\frac{1}{K-1} \\ p &\to \frac{K-1}{K}+\frac{1}{K} \end{aligned} \qquad q\geqslant 1/K$$



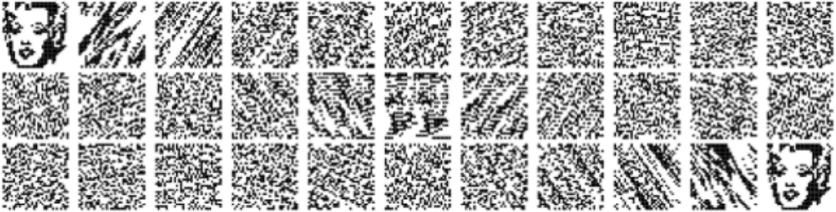
Rys. Asymetryczne przekształcenie piekarza

Weźmy pewien zbiór o skończonej liczbie elementów i jego różnowartościowe przekształcenie na siebie, czyli permutację.

Dla lepszego efektu wizualnego będziemy sobie wyobrażać zbiór czarnych lub białych kwadratów wypełniających pola kwadratowej tablicy 32×32 oraz permutację, dla której w i– tym wierszu i j–tej kolumnie tablicy umieszczamy kwadrat poprzednio znajdujący się w wierszu o numerze $(i+j) \bmod 32$ oraz kolumnie o numerze $(2i+j) \bmod 32$.

Wyniki wielokrotnego złożenia takiej permutacji dla pewnego wyjściowego ułożenia kwadratów przedstawione są na **rysunku** po wykonaniu 32 iteracji otrzymujemy taki sam wzór jak na początku.

$$\big((i+j) \bmod 32, (2i+j) \bmod 32\big) \longrightarrow (i, j)$$



Układ Henona (albo **odwzorowanie Henona**) – układ dwóch równań różnicowych nieliniowych przedstawionych przez francuskiego astronoma Michela Hénona.

$$\begin{cases} x_{t+1} = y_t + 1 - 1,4{x_t}^2 \\ y_{t+1} = 0,3x_t \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

lub

$$H(x, y) = (1 + y - ax^2, bx),$$

gdzie a = 1,4 ; b = 0,3

Dla odwzorowania przy parametrach (a=1,4 i b=0,3) startując z punktu początkowego na płaszczyźnie układu dochodzi się do zbioru punktów nazywanych dziwnym atraktorem Henona, albo rozbiega się do nieskończoności. Atraktor Henona jest fraktalem, natomiast przekrój przez atraktor Henona jest tożsamy ze zbiorem Cantora.