Dyskretne układy dynamiczne

11 grudnia 2017

Sumowanie, przy pomocy rachunku różnicowego
zdjęcia z książki:
***Matematyka konkretna*, Graham, Knuth Patashnik**

Rachunek różniczkowy opiera się na właściwościach operatora *pochodnej* D, zdefiniowanego jako

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

Rachunek różnicowy oparty jest na własnościach operatora *różnicy* Δ, zdefiniowanego jako

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) . \qquad (2.42)$$

Jest to skończony odpowiednik pochodnej, w którym ograniczamy się do dodatnich całkowitych wartości h. W związku z tym $h = 1$ jest najbliższe temu, co moglibyśmy otrzymać, gdyby rozważać „granicę" przy $h \to 0$, a $\Delta f(x)$ jest wartością $\big(f(x+h) - f(x)\big)/h$ dla $h = 1$.

Symbole D oraz Δ są nazywane *operatorami*, gdyż operując funkcjami dają nowe funkcje, są więc funkcjami funkcji produkującymi funkcje. Jeśli f jest odpowiednio gładką funkcją ze zbioru liczb rzeczywistych w zbiór liczb rzeczywistych, to Df jest również funkcją ze zbioru liczb rzeczywistych w zbiór liczb rzeczywistych. Tak samo, jeśli f jest *jakąkolwiek* funkcją z liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste, to Δf też będzie taką funkcją. Wartości funkcyj Df i Δf w punkcie x są określone przez podane wyżej definicje.

Jednym z pierwszych kroków podczas poznawania rachunku różniczkowego jest zbadanie, jak operator D działa na funkcje potęgowe $f(x) = x^m$.

W takich przypadkach $Df(x) = mx^{m-1}$. Możemy to samo napisać nieformalnie opuszczając symbol f:

$$D(x^m) \;=\; mx^{m-1}\,.$$

Miło by było, gdyby operator różnicowy Δ dawał podobnie eleganckie wyniki. Niestety nie daje; na przykład

$$\Delta(x^3) \;=\; (x+1)^3 - x^3 \;=\; 3x^2 + 3x + 1\,.$$

Jest jednak wersja „m-tej potęgi", która zachowuje się bardzo ładnie, gdy zadziała na nią operator Δ, i to jest właśnie to, co czyni rachunek różnicowy interesującym. Takie różnicowe potęgi definiuje się za pomocą wyrażenia

$$x^{\underline{m}} \;=\; \overbrace{x(x-1)\ldots(x-m+1)}^{\text{m czynników}}, \qquad \text{całkowite } m \geqslant 0. \tag{2.43}$$

Zwróćmy uwagę na małe podkreślenie pod m; wynika z niego, że kolejne czynniki będą się krok po kroku zmniejszały. Istnieje też dualna definicja, w której czynniki zwiększają się krok po kroku:

$$x^{\overline{m}} \;=\; \overbrace{x(x+1)\ldots(x+m-1)}^{\text{m czynników}}, \qquad \text{całkowite } m \geqslant 0. \tag{2.44}$$

Dla $m = 0$ mamy $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$, gdyż przyjmujemy zwykle, że iloczyn zera czynników jest równy 1 (podobnie jak suma zera składników jest równa 0).

Wartość $x^{\underline{m}}$ czytamy jako „x do m-tej ubywającej," podobnie $x^{\overline{m}}$ czytamy „x do m-tej przyrastającej." Funkcje te nazywane są również *potęgami kroczącymi* lub *dolnymi silniami* i *górnymi silniami*, gdyż z silniami mają trochę wspólnego. W istocie $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$.

W literaturze matematycznej istnieje wiele różnych notacji dla wyrażenia potęg kroczących, w szczególności symbol Pochhammera $(x)_m$ na $x^{\overline{m}}$ lub $x^{\underline{m}}$; spotyka się też notacje typu $x^{(m)}$ lub $x_{(m)}$ dla oznaczenia $x^{\underline{m}}$. Podkreślenie i nadkreślenie ma jednak istotne przewagi; jest łatwe do zapisania, zapamiętania i nie ma zbędnych nawiasów.

Ubywające potęgi $x^{\underline{m}}$ współdziałają w szczególnie atrakcyjny sposób z operatorem Δ. Mamy bowiem

$$\begin{aligned}\Delta(x^{\underline{m}}) &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} \\ &= (x+1)x\ldots(x-m+2) \;-\; x\ldots(x-m+2)(x-m+1) \\ &= m\,x(x-1)\ldots(x-m+2)\,.\end{aligned}$$

Jest to wygodny wzór, analogiczny do wzoru $D(x^m) = mx^{m-1}$:

$$\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}\,. \tag{2.45}$$

Jest to podstawowa zależność rachunku różnicowego.

Operator D rachunku różniczkowego ma operator odwrotny — antypochodną (lub całkę) oznaczaną przez $\int$. Podstawowe równanie rachunku różniczkowego wiąże operatory D i $\int$:

$$g(x) = Df(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \int g(x)\,dx = f(x) + C\,.$$

We wzorze tym $\int g(x)\,dx$, całka nieoznaczona z $g(x)$, jest klasą funkcji, których pochodna jest równa $g(x)$. Podobnie dla operatora Δ istnieje operator odwrotny, antyróżnica (albo suma) $\sum$, a odpowiednie twierdzenie podstawowe wyraża się następująco:

$$g(x) = \Delta f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum g(x)\,\delta x = f(x) + C\,. \tag{2.46}$$

Rolę *sumy nieoznaczonej* dla funkcji $g(x)$ pełni tu $\sum g(x)\,\delta x$, będące klasą funkcji, dla których *różnica* wynosi $g(x)$. (Zwróć uwagę na to, że symbol δ ma się tak do Δ, jak symbol d do D.) Symbol „C" dla całek nieoznaczonych oznaczał dowolną stałą, tutaj, w przypadku sum nieoznaczonych, oznacza dowolną funkcję okresową $p(x)$ taką, że $p(x+1) = p(x)$. Na przykład C mogłoby być okresową funkcją $a + b\sin 2\pi x$; takie funkcje znikają, gdy działamy na nie operatorem różnicy, tak jak stałe znikają przy różniczkowaniu. Dla całkowitych argumentów x funkcja C jest stała.

Dochodzimy już prawie do sedna. W rachunku różniczkowym znajdziemy również całki *oznaczone*: jeśli $g(x) = Df(x)$, to

$$\int_a^b g(x)\,dx \;=\; f(x)\Big|_a^b \;=\; f(b) - f(a)\,.$$

W związku z tym rachunek różnicowy—zawsze starający się naśladować swojego sławnego kuzyna—zawiera też *sumy oznaczone*: jeśli $g(x) = \Delta f(x)$, to

$$\sum_a^b g(x)\,\delta x \;=\; f(x)\Big|_a^b \;=\; f(b) - f(a)\,. \tag{2.47}$$

Wzór ten nadaje znaczenie notacji $\sum_a^b g(x)\,\delta x$, podobnie jak poprzedni wzór definiował $\int_a^b g(x)\,dx$.

Co znaczy jednak intuicyjnie rzecz biorąc zapis $\sum_a^b g(x)\,\delta x$? Zdefiniowaliśmy ten obiekt przecież na zasadzie analogii, a nie konieczności. To, że analogia taka zachodzi, pozwala nam łatwo zapamiętywać zasady rachunku różnicowego, ale sama notacja jest bezużyteczna, jeśli nie będziemy rozumieli jej znaczenia. Spróbujmy je wydedukować, przyglądając się najpierw paru szczególnym przypadkom. Załóżmy przy tym, że $g(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Jeśli $b = a$, to

$$\sum_a^a g(x)\,\delta x \;=\; f(a) - f(a) \;=\; 0\,.$$

Dalej, jeśli $b = a + 1$, to w wyniku dostajemy

$$\sum_a^{a+1} g(x)\,\delta x \;=\; f(a+1) - f(a) \;=\; g(a)\,.$$

Ogólnie, jeśli b zwiększa się o 1, to

$$\begin{aligned}\sum_a^{b+1} g(x)\,\delta x \;-\; \sum_a^{b} g(x)\,\delta x \;&=\; \big(f(b+1) - f(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big) \\ &=\; f(b+1) - f(b) \;=\; g(b)\,.\end{aligned}$$

Na podstawie powyższych obserwacji i indukcji matematycznej możemy wydedukować, co dokładnie oznacza w ogólności $\sum_a^b g(x)\,\delta x$ dla całkowitych a oraz b spełniających warunek $b \geqslant a$:

$$\sum_a^b g(x)\,\delta x \;=\; \sum_{k=a}^{b-1} g(k) \;=\; \sum_{a\leqslant k<b} g(k)\,, \qquad \text{całkowite } b \geqslant a. \qquad (2.48)$$

Innymi słowy, suma oznaczona to to samo co zwykła suma, tyle że pomijamy składnik odpowiadający górnemu ograniczeniu.

Spróbujmy spojrzeć się na to w nieco inny sposób. Załóżmy, że dostaliśmy do policzenia nie znaną nam sumę, której postać zwartą mamy znaleźć. Załóżmy też, że możemy ją zapisać w postaci $\sum_{a\leqslant k<b} g(k) = \sum_a^b g(x)\,\delta x$. Teoria rachunku różnicowego podpowiada nam, że możemy dostać rozwiązanie w postaci $f(b)-f(a)$, jeśli tylko uda się nam znaleźć nieoznaczoną sumę (czyli antyróżnicę) f, taką że $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Dobrą metodą zrozumienia tego jest wypisanie sumy $\sum_{a\leqslant k<b} g(k)$ w całości przy użyciu notacji wielokropkowej:

$$\sum_{a\leqslant k<b} \big(f(k+1)-f(k)\big) = \big(f(a{+}1)-f(a)\big) + \big(f(a{+}2)-f(a{+}1)\big) + \cdots + \big(f(b{-}1)-f(b{-}2)\big) + \big(f(b)-f(b{-}1)\big)\,.$$

Wszystkie wyrazy po prawej stronie kasują się nawzajem poza $f(b)-f(a)$; wartością naszej sumy jest więc $f(b)-f(a)$. (Sumy postaci $\sum_{a\leqslant k<b}\big(f(k+1)-f(k)\big)$ często nazywane są *teleskopowymi* przez podobieństwo ze składanym teleskopem, gdyż grubość obudowy złożonego teleskopu zależy jedynie od zewnętrznego promienia najbardziej zewnętrznej tuby i od wewnętrznego promienia tuby najbardziej wewnętrznej.)

Prawo (2.48) stosuje się tylko wtedy, gdy $b \geqslant a$. Co się jednak stanie, jeżeli $b < a$? Wszystko będzie w porządku, równanie (2.47) gwarantuje, że zachodzi

$$\begin{aligned}\sum_a^b g(x)\,\delta x &= f(b)-f(a)\\ &= -\big(f(a)-f(b)\big) = -\sum_b^a g(x)\,\delta x\,.\end{aligned}$$

Jest to równanie analogiczne do odpowiedniego równania dla całkowania oznaczonego. Podobnie rozumując, dowodzimy, że $\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$, co daje nam sumacyjny odpowiednik tożsamości $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$. W pełnej krasie:

$$\sum_a^b g(x)\,\delta x + \sum_b^c g(x)\,\delta x \;=\; \sum_a^c g(x)\,\delta x\,, \tag{2.49}$$

dla wszystkich liczb całkowitych a, b oraz c.

Niewątpliwie w tym momencie niektórzy zastanawiają się zapewne, jak możemy wykorzystać te analogie i paralele. Mamy niewątpliwie jeden atut w ręku: sumowanie oznaczone dostarcza nam prostej metody sumowania ubywających potęg: z podstawowych równań (2.45), (2.47), i (2.48) wynika ogólne prawo

$$\sum_{0\leqslant k<n} k^{\underline{m}} \;=\; \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\Bigg|_0^n \;=\; \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}\,, \qquad \text{dla całkowitych } m, n \geqslant 0. \tag{2.50}$$

Wzór ten łatwo zapamiętać, gdyż bardzo przypomina doskonale znany wzór $\int_0^n x^m\,dx = n^{m+1}/(m+1)$.

W szczególności, gdy $m = 1$ dostajemy $k^{\underline{1}} = k$, więc zasady rachunku różnicowego dają nam prostą metodę zapamiętania, że

$$\sum_{0\leqslant k<n} k \;=\; \frac{n^{\underline{2}}}{2} \;=\; n(n-1)/2\,.$$

Metoda sum oznaczonych podpowiada nam, że nieco łatwiej jest liczyć sumy względem $0 \leqslant k < n$, niż względem $1 \leqslant k \leqslant n$, gdyż te pierwsze są równe po prostu $f(n) - f(0)$, podczas gdy te drugie muszą być wyliczone jako $f(n+1) - f(1)$.

Zwykłe potęgi też można sumować tym nowym sposobem, najpierw trzeba je jednak wyrazić jako kombinację ubywających potęg, na przykład:

$$k^2 = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}},$$

więc

$$\sum_{0 \leqslant k < n} k^2 = \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2+\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{3}n(n-\tfrac{1}{2})(n-1).$$

Zamieniając teraz n na $n+1$ dostajemy kolejną metodę policzenia wartości naszej starej znajomej sumy $\square_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k^2$ w postaci zwartej.

W porządku, to było całkiem proste. Na dobrą sprawę to było to prostsze niż którakolwiek z dotychczasowych metod, które na śmierć zamęczyły

tę biedną sumę już w poprzednim podrozdziale. Spróbujmy więc trochę ambitniej policzyć sumę *sześcianów*. Proste rachunki dają nam

$$k^3 = k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}.$$

(Zawsze można dokonać konwersji między potęgami zwykłymi a ubywającymi za pomocą liczb Stirlinga, którymi zajmiemy się w rozdziale 6.) Zatem

$$\sum_{a \leqslant k < b} k^3 = \frac{k^{\underline{4}}}{4} + k^{\underline{3}} + \frac{k^{\underline{2}}}{2} \Bigg|_a^b.$$

Ubywające potęgi są więc bardzo poręczne dla sum. Czy mają one jeszcze jakieś inne przyjemne własności? Czy zanim zabierzemy się do sumowania musimy zawsze dokonywać konwersji naszych zwykłych potęg do potęg ubywających, a potem, dokonawszy sumowania, znowu męczyć się z konwersją wyniku? Okazuje się, że nie. Możemy od razu zabrać się do pracy z potęgami ubywającymi, gdyż mają one dodatkowe własności. Na przykład, podobnie jak w przypadku potęg normalnych, gdzie mamy $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, tak tutaj zachodzi $(x+y)^{\underline{2}} = x^{\underline{2}} + 2x^{\underline{1}}y^{\underline{1}} + y^{\underline{2}}$. Analogiczne wzory zachodzą też dla $(x+y)^m$ i $(x+y)^{\underline{m}}$ (ten „wzór dwumianowy" zostanie udowodniony w ćwiczeniu 5.37).

Do tej pory rozważaliśmy jedynie potęgi ubywające z nieujemnymi wykładnikami. Aby rozszerzyć naszą analogię do ujemnych wykładników, musimy dobrze określić, co rozumiemy przez $x^{\underline{m}}$ dla $m < 0$. Przyglądając się ciągowi

$$\begin{aligned} x^{\underline{3}} &= x(x-1)(x-2)\,, \\ x^{\underline{2}} &= x(x-1)\,, \\ x^{\underline{1}} &= x\,, \\ x^{\underline{0}} &= 1\,, \end{aligned}$$

zauważamy, że aby przejść z $x^{\underline{3}}$ do $x^{\underline{2}}$ do $x^{\underline{1}}$ do $x^{\underline{0}}$, dzielmy kolejno przez $x-2$, następnie przez $x-1$ i w końcu przez x. Wydaje się rozsądne (jeśli nie konieczne), aby teraz w celu otrzymania $x^{\underline{-1}}$ z $x^{\underline{0}}$ dokonać dzielenia tego ostatniego przez $x+1$. Idąc tak dalej, dostaniemy kolejne wykładniki ubywających potęg ujemnych:

$$\begin{aligned} x^{\underline{-1}} &= \frac{1}{x+1}\,, \\ x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,, \\ x^{\underline{-3}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,, \end{aligned}$$

a nasza ogólna definicja ujemnych potęg ubywających przedstawia się następująco:

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}, \qquad \text{dla } m > 0. \tag{2.51}$$

(Ubywające potęgi można również określić dla m rzeczywistych, a nawet zespolonych, odłóżmy to jednak do rozdziału 5.)

Tak zdefiniowane potęgi ubywające mają dalsze przyjemne własności. Być może najważniejszą z nich jest ogólne prawo wykładników, analogiczne do prawa

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

zachodzącego dla potęg zwykłych. Analogiczny wzór dla potęg ubywających wygląda tak:

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}, \qquad \text{dla } m \text{ i } n \text{ całkowitych.} \tag{2.52}$$

Na przykład $x^{\underline{2+3}} = x^{\underline{2}}(x-2)^{\underline{3}}$, a dla ujemnego n mamy

$$x^{\underline{2-3}} = x^{\underline{2}}(x-2)^{\underline{-3}} = x(x-1)\frac{1}{(x-1)x(x+1)} = \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}.$$

Gdybyśmy zdefiniowali $x^{\underline{-1}}$ jako $1/x$ zamiast $1/(x+1)$, to prawo wykładników (2.52) nie byłoby spełnione dla przypadków takich jak $m = -1$ i $n = 1$. Na dobrą sprawę mogliśmy użyć równania (2.52) do wymuszenia odpowiedniej definicji ujemnych potęg ubywających przez podstawienie $m = -n$. Kiedy istniejąca notacja ma objąć większą liczbę przypadków, dobrze jest ją tak uogólnić, aby ogólne prawa nadal zachodziły.

Przekonajmy się jeszcze, że podstawowa własność dla różnicy ubywających potęg zachodzi także w przypadku dopiero co zdefiniowanych ujemnych potęg ubywających. Czy rzeczywiście $\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}}$ dla $m < 0$? Jeśli np. $m = -2$, to różnica wynosi

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\
&= \frac{(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\
&= -2x^{\underline{-3}}.
\end{aligned}$$

Tak — to działa! Podobne wyprowadzenie można przeprowadzić dla każdego $m < 0$.

Własność (2.50) zachodzi więc także dla ujemnych potęg ubywających. I wszystko jest w porządku, pod warunkiem, że unikniemy dzielenia przez 0:

$$\sum_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x \;=\; \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big|_a^b, \qquad \text{dla } m \neq -1.$$

Co jednak będzie, gdy $m = -1$? Gwoli przypomnienia, w przypadku całek mamy dla $m = -1$

$$\int_a^b x^{-1}\,dx \;=\; \ln x\Big|_a^b.$$

Chcielibyśmy zatem znaleźć skończony odpowiednik dla $\ln x$. Innymi słowy, szukamy funkcji $f(x)$ takiej, że

$$x^{\underline{-1}} \;=\; \frac{1}{x+1} \;=\; \Delta f(x) \;=\; f(x+1) - f(x)\,.$$

Nietrudno jest zauważyć, że

$$f(x) \;=\; \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x}$$

jest taką właśnie funkcją dla x będącego liczbą całkowitą. Dostaliśmy więc po prostu liczbę harmoniczną H_x z równania (2.13). Liczba H_x jest zatem dyskretnym odpowiednikiem ciągłej funkcji $\ln x$. (W rozdziale 6 zdefiniujemy H_x dla niecałkowitych x, ale całkowite wartości wystarczają nam do bieżących potrzeb. Jak się o tym przekonamy w rozdziale 9, dla dużych x wartość $H_x - \ln x$ jest w przybliżeniu równa $0,577 + 1/(2x)$. Funkcje H_x oraz $\ln x$ są nie tylko analogiczne, lecz także ich wartości różnią się zazwyczaj o mniej niż 1.)

Możemy już przedstawić pełny wzór na sumowanie ubywających potęg:

$$\sum_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x \;=\; \begin{cases} \left.\dfrac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\right|_a^b, & \text{jeśli } m \neq -1; \\ \left. H_x \right|_a^b, & \text{jeśli } m = -1. \end{cases} \tag{2.53}$$

Wzór ten wyjaśnia, dlaczego liczby harmoniczne ukazują się tak często w rozwiązaniach problemów dyskretnych, takich jak analiza algorytmu sortowania szybkiego. Podobnie zresztą logarytmy naturalne pojawiają się w naturalny sposób w rozwiązaniach problemów ciągłych.

Skoro znaleźliśmy odpowiednik funkcji $\ln x$, może zastanówmy się, co powinno odpowiadać funkcji e^x? Która z funkcji $f(x)$ ma tę własność, że $\Delta f(x) = f(x)$, tak jak $De^x = e^x$? Proste:

$$f(x+1) - f(x) \;=\; f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x+1) \;=\; 2f(x)\,;$$

mamy więc do czynienia z prostą rekurencją i możemy przyjąć, że funkcja $f(x) = 2^x$ jest dyskretnym odpowiednikiem funkcji e^x.

Różnica dla funkcji c^x jest także prosta, a mianowicie dla każdego c:

$$\Delta(c^x) \;=\; c^{x+1} - c^x \;=\; (c-1)c^x\,.$$

W związku z tym antyróżnicą funkcji c^x jest $c^x/(c-1)$, dla $c \neq 1$. Fakt ten wraz z podstawowymi prawami (2.47) i (2.48) daje nam zręczną metodę zrozumienia ogólnego wzoru na sumę ciągu geometrycznego:

$$\sum_{a\leqslant k<b} c^k \;=\; \sum_a^b c^x\,\delta x \;=\; \frac{c^x}{c-1}\Bigg|_a^b \;=\; \frac{c^b - c^a}{c-1}\,, \qquad \text{dla } c \neq 1.$$

Ilekroć napotkamy funkcję f, której postać zwarta mogłaby być użyteczna, możemy policzyć jej różnicę $\Delta f = g$ uzyskując funkcję g, taką że suma nieoznaczona $\sum g(x)\,\delta x$ jest znana. Tabela 74 zawiera kilka najprostszych, użytecznych przy sumowaniu par różnica–antyróżnica.

Pomimo wielu analogii między matematyką ciągłą a dyskretną, niektóre z pojęć ciągłych nie mają swojego dyskretnego odpowiednika. Na przykład reguła różniczkowania funkcji złożonej nie ma odpowiadającego jej wzoru w rachunku różnicowym; nie istnieje żaden sensowny wzór na $\Delta f\big(g(x)\big)$. Podobnie zamiana zmiennych w przypadku dyskretnym jest trudna, poza paroma konkretnymi podstawieniami w stylu zamiany x na $c \pm x$.

Na szczęście $\Delta\big(f(x)\,g(x)\big)$ *ma* całkiem zgrabną postać i dostarcza nam reguły na *sumowanie przez części*. Jest to dyskretny odpowiednik całkowania przez części. Przypomnijmy, że wzór

$$D(uv) \;=\; u\,Dv + v\,Du$$

w rachunku różniczkowym prowadzi po scałkowaniu i uporządkowaniu zmiennych do wzoru na całkowanie przez części,

$$\int u\,Dv \;=\; uv - \int v\,Du\,.$$

Podobny wzór możemy wyprowadzić w rachunku różnicowym.

Zaczynamy od zastosowania operatora różnicowego do iloczynu dwóch funkcji $u(x)$ i $v(x)$:

$$\begin{aligned}
\Delta\big(u(x)\,v(x)\big) &= u(x{+}1)\,v(x{+}1) - u(x)\,v(x) \\
&= u(x{+}1)\,v(x{+}1) - u(x)\,v(x{+}1) \\
&\qquad\qquad + u(x)\,v(x{+}1) - u(x)\,v(x) \\
&= u(x)\,\Delta v(x) \;+\; v(x{+}1)\,\Delta u(x)\,. \qquad (2.54)
\end{aligned}$$

Tabela 74. Jaka to różnica?

$f = \Sigma g$	$\Delta f = g$	$f = \Sigma g$	$\Delta f = g$
$x^{\underline{0}} = 1$	0	2^x	2^x
$x^{\underline{1}} = x$	1	c^x	$(c-1)c^x$
$x^{\underline{2}} = x(x-1)$	$2x$	$c^x/(c-1)$	c^x
$x^{\underline{m}}$	$mx^{\underline{m-1}}$	cf	$c\Delta f$
$x^{\underline{m+1}}/(m+1)$	$x^{\underline{m}}$	$f+g$	$\Delta f + \Delta g$
H_x	$x^{\underline{-1}} = 1/(x+1)$	fg	$f\Delta g + Eg\Delta f$

Wzór ten można wyrazić w dogodnej postaci za pomocą *operatora przesunięcia* E, zdefiniowanego jako

$$Ef(x) \;=\; f(x+1)\,.$$

Po podstawieniu $Ev(x)$ w miejsce $v(x+1)$ otrzymujemy zwartą postać wzoru na różnicę iloczynu:

$$\Delta(uv) \;=\; u\,\Delta v \;+\; Ev\,\Delta u\,. \tag{2.55}$$

(Operator E jest nieco przykrym zaskoczeniem, ale nic nie możemy poradzić, bez niego wzór nie byłby prawdziwy.) Biorąc teraz sumę nieoznaczoną po obu stronach równania i przenosząc odpowiednie składniki na jedną stronę, uzyskujemy zapowiedziany wzór na sumowanie przez części:

$$\sum u\,\Delta v \;=\; uv - \sum Ev\,\Delta u\,. \tag{2.56}$$

Tak jak w rachunku całkowym, można zastąpić wszystkie składniki wzoru ich granicami, dostając wzór na sumowanie oznaczone.

Wzór ten jest użyteczny wtedy, gdy lewa strona jest trudniejsza do wyliczenia niż prawa. Przyjrzyjmy się przykładowi. Funkcja $\int xe^x\,dx$ stanowi typowy przykład, kiedy stosujemy całkowanie przez części. Jej dyskretnym odpowiednikiem jest funkcja $\sum x2^x\,\delta x$, którą już rozważaliśmy w tym rozdziale w postaci $\sum_{k=0}^{n} k\,2^k$. Aby przesumować ją przez części, przyjmujemy $u(x) = x$ i $\Delta v(x) = 2^x$; w takim razie $\Delta u(x) = 1$, $v(x) = 2^x$ i $Ev(x) = 2^{x+1}$. Po podstawieniu do zależności (2.56), otrzymujemy

$$\sum x2^x\,\delta x \;=\; x2^x \;-\; \sum 2^{x+1}\,\delta x \;=\; x2^x \;-\; 2^{x+1} \;+\; C\,.$$

Możemy zastosować tę postać do wyliczenia rozważanej już sumy, wprowa-

dzając granice przedziału:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k2^k &= \sum_{0}^{n+1} x2^x\,\delta x \\ &= x2^x - 2^{x+1}\Big|_0^{n+1} \\ &= \left((n+1)2^{n+1} - 2^{n+2}\right) - \left(0\cdot 2^0 - 2^1\right) \;=\; (n-1)2^{n+1} + 2\,.\end{aligned}$$

Ta metoda jest o tyle prostsza od zastosowania metody zaburzania, że nie musimy tu w ogóle wysilać umysłu.

Wcześniej w tym rozdziale natknęliśmy się na problem znalezienia wzoru dla $\sum_{0\leqslant k<n} H_k$ i szczęśliwie udało się nam sobie z nim poradzić. Czy moglibyśmy jednak znaleźć wzór (2.36) w systematyczny sposób, gdybyśmy zastosowali sumowanie przez części? Zademonstrujmy to wyliczając sumę, która wygląda nawet na nieco trudniejszą, $\sum_{0\leqslant k<n} kH_k$. Rozwiązanie nie jest takie trudne, jeśli przypomnimy sobie, jak postępuje się z całką $\int x \ln x \, dx$. Przyjmujemy $u(x) = H_x$ i $\Delta v(x) = x = x^{\underline{1}}$, więc $\Delta u(x) = x^{\underline{-1}}$, $v(x) = x^{\underline{2}}/2$, $Ev(x) = (x+1)^{\underline{2}}/2$ i dostajemy

$$\begin{aligned}\sum xH_x\,\delta x &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \sum \frac{(x+1)^{\underline{2}}}{2}x^{\underline{-1}}\,\delta x \\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{1}{2}\sum x^{\underline{1}}\,\delta x \\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{x^{\underline{2}}}{4} + C\end{aligned}$$

(przejście z pierwszego wiersza do drugiego polegało na zastosowaniu prawa wykładników $\ldots$ do dwóch ubywających potęg $(x+1)^{\underline{2}}x^{\underline{-1}}$ z $m = -1$ oraz $n = 2$). Możemy teraz wprowadzić ograniczenia górne i dolne i ostatecznie dochodzimy do wniosku, że

$$\sum_{0\leqslant k<n} kH_k = \sum_{0}^{n} xH_x\,\delta x = \frac{n^{\underline{2}}}{2}\Big(H_n - \tfrac{1}{2}\Big). \tag{2.57}$$

Automaty komórkowe

Automaty komórkowe *(cellular automata)* są wynalazkiem, z którego można korzystać na różne sposoby.

Można widzieć narzędzie do symulacji procesów fizycznych, w których bierze udział wiele układów oddziałujących ze sobą.

Można traktować automaty jako obiekty matematyczne, interesujące z punktu widzenia teorii procesów dynamicznych.

Można widzieć w nich tylko zabawkę, sposób na produkowanie interesujących obrazków.

Za twórcę automatów komórkowych uważa się Janosa von Neumanna, Węgra pracującego w Princeton, autora *"Mathematical Foundations of Quantum Mechanics"*. Von Neumann znany jest także ekonomistom z prac nad teorią Keynesa. W końcu lat 40-tych zajmował się modelem "pierwotnej zupy", cieczy z której miało powstać życie.

Automat komórkowy intuicja

Automat komórkowy składa się z sieci komórek, które posiadaja stan z zadanego zbioru, oraz algorytmu, tzn. zbioru reguł.

Algorytm określa stan danej komórki.

Najczęściej algorytm określa stan danej komórki w zależności od stanów komórek sąsiednich.

Automat komórkowy, dokładniejsza definicja

Automat komórkowy jest to:

- *sieć* komórek $\{i\}$ przestrzeni D-wymiarowej,
- *zbiór* $\{s_i\}$ stanów pojedynczej komórki, zwykle ten sam dla wszystkich komórek, zawierający k elementów,
- *reguła* F określającą stan komórki w chwili $t+1$ w zależności od stanu w chwili t tej komórki i komórek ją otaczających;
  $s_i(t+1) = F(\{s_j(t)\}), j \in O(i)$
  gdzie $O(i)$ jest *otoczeniem* i-tej komórki.

Taka jest definicja automatu komórkowego tzw. *deterministycznego*. Jeśli ponadto funkcja F zależy od zmiennej losowej, to automat nazywamy *probabilistycznym*.

LIFE wprowadzenie

Automat komórkowy LIFE ("gra w życie", autor John Conway), jest modelem żyjącego środowiska.

Każda z komórek może posiadać dwa stany: żywy lub martwy.

W LIFE mamy następujące reguły:

1. żywa komórka umiera (z samotności), gdy posiada jednego lub żadnego sąsiada tzn. inną żywą komórkę,
2. żywa komórka posiadająca dwóch lub trzech sąsiadów podtrzymuje życie,
3. żywa komórka umiera, gdy posiada więcej niż trzech sąsiadów,
4. martwa komórka posiadająca trzech sąsiadów ożywa.

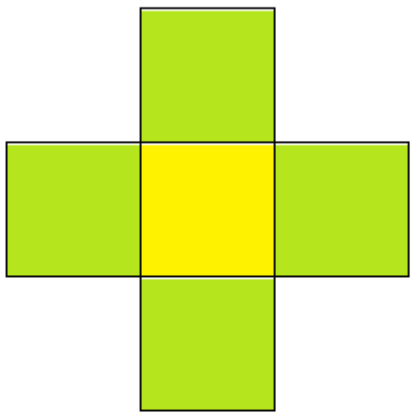
LIFE dokładniej, stany

Automat *Life* jest zdefiniowany na dwuwymiarowej sieci kwadratowej, a więc $D = 2$. Można sobie tę sieć wyobrażać jak papier w kratkę. Każda kratka to pojedyncza komórka. Zbiór stanów każdej komórki zawiera tylko dwa elementy ($k = 2$), a mianowicie "0" i "1". Inaczej mówiąc, komórka jest "żywa" (1) lub "martwa" (0).

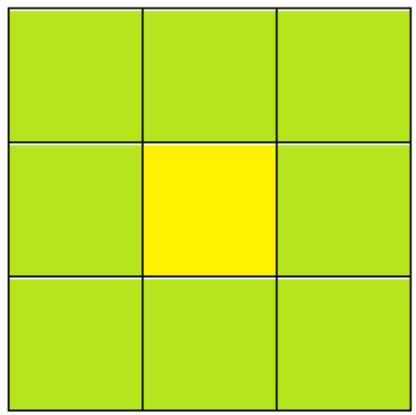
LIFE dokładniej, otoczenie

Otoczeniem i-tej komórki w automacie *Life* są wszystkie komórki z nią sąsiadujące, a więc stykające się z nią krawędziami lub rogami. Takie otoczenie nosi nazwę *otoczenia Moore'a*, i jest pokazane na rysunku b.

Centralna, czyli i-ta komórka nie należy do swojego otoczenia - reguła automatu traktuje ją inaczej.



(a) otoczenie von Neumanna



(b) otoczenie Moore'a

LIFE dokładniej, reguła

Reguła F automatu Life jest następująca:

jeśli w otoczeniu komórki (nie licząc jej samej) są w czasie t trzy komórki żywe, to w czasie $t+1$ ta komórka jest żywa ($F = 1$).

Jeżeli w jej otoczeniu w czasie t są dwie komórki żywe, a ona sama również jest żywa, to pozostaje żywa również w czasie $t+1$ ($F = 1$).

W pozostałych przypadkach jest ona martwa w czasie $t+1$ ($F = 0$).

Gra LIFE toczy się na nieskończonej planszy, każda komórka ma ośmiu sąsiadów.

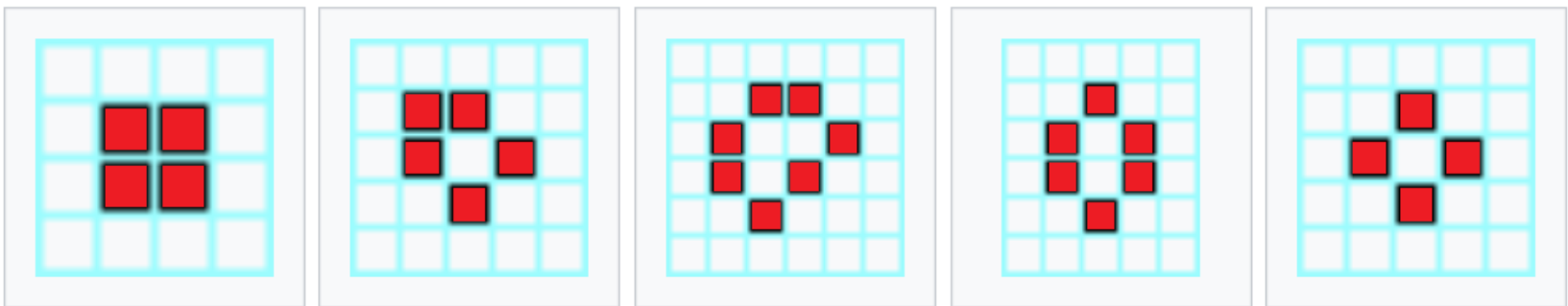
LIFE

Sama powyższa reguła pozwala odnaleźć prawdziwe bogactwo form:
stałe układy komórek,
oscylatory,
obiekty przesuwające się, obiekty które wykonują dzialania arytmetyczne, logiczne czy symulujące komputer.

Układy niezmiennicze

Niezmienne

Struktury niezmienne, inaczej stabilne lub statyczne, pozostają identyczne bez względu na krok czasowy (dla każdej żywej komórki spełniony jest warunek przetrwania i dla żadnej spośród martwych nie jest spełniony); najprostsza taka struktura (Block) składa się z 4 żywych komórek. Pojawiają się bardzo często jako produkty końcowe ewolucji struktur. Tworzy się je stosunkowo prosto, istnieją schematy według których można wymyślać nowe tego typu struktury.



Klocek (blok) Łódź Bochenek Kryształ Koniczynka

Oscylatory

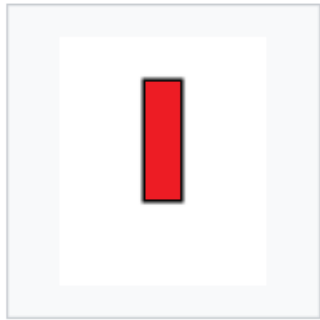
Oscylatory zmieniają się okresowo.
Najprostsza taka struktura składa się z trzech żywych komórek położonych w jednym rzędzie.

Najprostsze z nich dość często pojawiają się jako produkty końcowe ewolucji struktur.

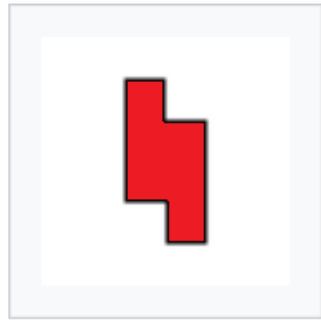
Okresy oscylatorów najczęściej przyjmują wartości $2, 3, 4, 6$ lub 8, choć w grze w życie znaleziono i takie, których okres wynosi prawie 150000.

Wiekszość liczb naturalnych może być długościami okresu oscylatora.
Nie wiadomo, czy oscylatory dla liczb $19, 23, 38$, oraz 41 istnieją.

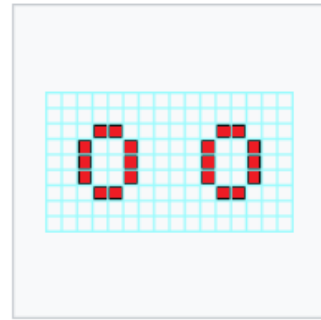
Oscylatory



Blinker (światła uliczne)

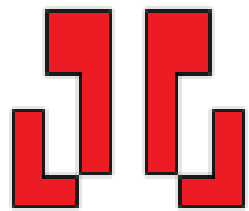


Żabka



Krokodyl

Oscylatory, fontanna



Dla cyklu długości 14 istnieje tylko jeden oscylator: Fontanna.

Niestałe

Struktury niestałe zmieniają się, nie powracając nigdy do swojego stanu pierwotnego. Jest to w praktyce grupa łącząca struktury nie należące do żadnej z pozostałych kategorii. Z tego też powodu jest ich najwięcej, a ich uzyskanie nie sprawia większych trudności (losowy układ komórek wprowadzony jako warunki początkowe zwykle okazuje się być strukturą niestałą).

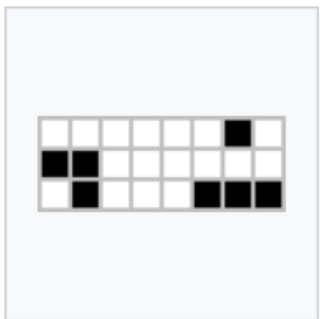
Niestałe

Niektóre struktury niestałe mają jednak właściwość ciekawego lub bardzo długiego przebiegu rozwoju. Jedną z cech takich struktur jest stosunek liczby kroków, po których następuje stabilizacja do liczby komórek w stadium początkowym. Stabilizacją nazywamy zamianę na konfigurację układów stabilnych, oscylatorów i statków (zwykle gliderów). Wartość ta oznaczana będzie tutaj przez **L** Najważniejsze spośród najprostszych struktur niestałych:

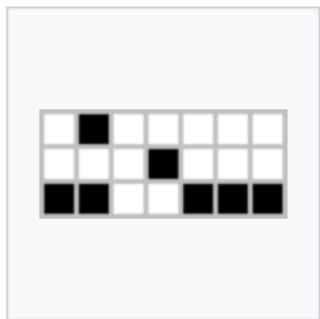
Niestałe

- R-Pentomino (F-Pentomino) – chaotyczny rozwój aż do 1103 kroku, emisja kilkudziesięciu gliderów; L≈221.
- B-Heptomino – rozwój przez ponad 100 kroków aż do uzyskania zespołu struktur stabilnych; emituje glidera; L≈15.
- Pi-Heptomino – efektowny rozwój przez ponad 200 kroków aż do uzyskania charakterystycznego zespołu blinkerów (oscylatorów) i struktur stabilnych, tzw. rezultatu B-Pi; L≈30.
- Bi-Pi-Heptomino – struktura złożona z dwóch Pi-Heptomino odwróconych względem siebie do góry nogami. Efektownie rozwija się, po czym zanika po około 10 krokach czasowych.
- W-Mino – efektowny rozwój, zakończony po 50 krokach powstaniem zbioru blinkerów (oscylatorów) i struktur stabilnych; L≈6.

Najdłużej rozwijające się w struktury niezmienne nazwane są **matuzalemami** (nazwa pochodzi od Matuzalema). Terminem *diehard* (ang. *die-hard* - niereformowalny) natomiast określa się układ, który co prawda znika, ale dopiero po długim czasie.



Diehard – umiera po 130 krokach; ; L≈15.



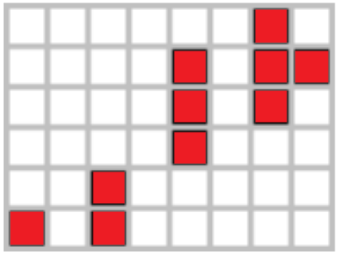
Żołądź – stabilizuje się po 5206 krokach; L≈700.

Działa (guns)

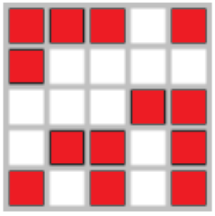
Działa to oscylatory, które co jeden okres „wyrzucają” z siebie jeden statek, który odłącza się i egzystuje samodzielnie.

Długość okresu tych struktur waha się od 30 (najprostszy Gosper Glider Gun) aż do kilkudziesięciu tysięcy kroków czasowych.

Odkryto również kilka układów nieśmiertelnych – wykazujących nieskończony wzrost.



Nieśmiertelny układ – tylko 10 komórek – najmniejsza możliwa ilość



Nieśmiertelny układ – mieści się w kwadracie 5x5

Nieśmiertelny układ – mieści się w jednej linii

Warunki brzegowe

Periodyczne
Definiują one zamknietą siatkę w taki sposób, że
symulując poruszająca się cząstkę po dojściu do krawędzi pojawi się ona z drugiej strony.

Komórka znajdująca się na brzegu siatki ma za sąsiada komórkę leżącą po drugiej stronie siatki.