

1. Logika, rachunek zbiorów

Zadanie 1. *Oceń wartość logiczną zdań*

a) $3 < 2 \vee 3 \leq 4$,

b) $\sqrt{9} = -3 \wedge 3^2 = 9$,

c) $2 \neq 4 \Rightarrow 2^2 \neq 4^2$,

d) $2^2 \neq 4 \Leftrightarrow 2^2 - 4 \neq 0$.

Zadanie 2. *Udowodnić*

$p \Leftrightarrow \neg\neg p$ prawo podwójnego przeczenia

$p \vee \neg p$ prawo wyłączonego środka

$\neg(p \wedge \neg p)$ prawo sprzeczności

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ prawo de Morgana

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ prawo de Morgana

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ prawo transpozycji

$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$ prawo Pierce'a

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$

$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ prawo Claviusa

$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ prawo Duns Scotusa.

Zadanie 3. *Zdefiniować*

koniunkcję za pomocą alternatywy i negacji,

alternatywę za pomocą koniunkcji i negacji,

alternatywę za pomocą implikacji i negacji.

Zadanie 4. *Znaleźć możliwie najkrótszą formułę równoważną danej*

$(p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee \neg(p \wedge r \Rightarrow q)$,

$\neg p \Rightarrow \neg\neg q$,

$(p \wedge q) \vee \neg(\neg p \Rightarrow \neg q)$.

Zadanie 5. *Uzasadnić, że podzielność liczby całkowitej przez 2 jest warunkiem koniecznym podzielności przez 4. Czy jest to warunek wystarczający?*

Zadanie 6. *Czy dla liczby naturalnej $p > 5$ to że jest pierwsza jest warunkiem wystarczającym na to aby $240 \mid (p^5 - p)$. Czy jest to warunek konieczny?*

Zadanie 7. *Czy dla liczby rzeczywistej n to że jest sumą kwadratów liczb naturalnych jest warunkiem wystarczającym na to aby liczba $5n$ była sumą kwadratów liczb naturalnych. Czy jest to warunek konieczny?*

Zadanie 8. *Ocenić wartość logiczną zdań*

- a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 0$,
- b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad n < m$,
- c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad n > m$,
- d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \neq y \wedge x^2 = y^2$,
- e) $\exists x \in \mathbb{Q} \quad x^2 = 3$,
- f) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon)$.

Zadanie 9. *Napisać zaprzeczenia następujących zdań, a następnie ocenić wartość logiczną zdań oraz ich zaprzeczeń*

- a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x < 0 \Rightarrow x^2 \geq 0)$,
- b) $\exists x \in \mathbb{N} \quad (9|x \vee x|9)$,
- c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x^2 - y^2 < 0$
- d) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x^2 - y^2 \leq 0$
- e) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad xy < -\frac{1}{n}$
- f) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad xy < n$

Zadanie 10. *Pokazać, że suma i iloczyn dwóch liczb wymiernych jest liczbą wymierną. Czy analogiczne twierdzenie zachodzi dla liczb niewymiernych?*

Zadanie 11. *Znaleźć sumę, część wspólną, różnicę oraz różnicę symetryczną następujących zbiorów*

- a) $(-2, 4], (1, 4)$,
- b) $[-5, 3), (-1, 1]$

Zadanie 12. *Zaznaczyć na osi liczbowej dopełnienia zbiorów*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0 \wedge x^2 - 5x + 4 \geq 0\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0\},$$

Zadanie 13. *Wykazać, prawa łączności, przemienności, rozdzielności oraz prawa De Morgana dla zbiorów.*

Zadanie 14. *Co można powiedzieć o zbiorach A, B jeżeli*

- a) $A \cap B = B$, b) $A \cup B = A$, c) $A' \cup B' = A'$, d) $A' \cup B = B$,