

## 2. Wartość bezwzględna, liczby rzeczywiste

**Zadanie 1.** Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej podać rozwiązania równań i nierówności

a)  $|x| = 3$ ,   b)  $|x| \geq 4$ ,   c)  $|x| < 2$ ,   d)  $|x - 2| \leq 3$ ,   e)  $|x + 3| < 2$ .

**Zadanie 2.** Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$

a)  $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$ .

b)  $|a| \geq 0$ ,

c)  $|ab| = |a||b|$ ,

d)  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$  o ile  $b \neq 0$ ,

e)  $|a + b| \leq |a| + |b|$

**Zadanie 3.** Rozwiązać nierówności

$x^2 - x + 1 \leq \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ ,    $|x^2 - x - 6| - |6 - 3x| \leq 0$ .

**Zadanie 4.** Wykazać, że dla  $x \in (-1, 5)$  wyrażenie  $\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + 2\sqrt{x^2 - 12x + 36}$  ma stałą wartość.

**Zadanie 5.** Wykazać, że jeżeli  $a, b, c \in (0, \infty)$  to  $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc$ .

**Zadanie 6.** Wykazać, że jeżeli  $a + b + c = 0$  to  $ab + ac + bc \leq 0$ . Dla jakich  $a, b, c$  zachodzi równość?

**Zadanie 7.** Rozłożyć na czynniki

$a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$ ,    $a^4 + b^4$ .

**Zadanie 8.** Usunąć niewymierność z mianownika

a)  $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$ ,   b)  $\frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}}$

c)  $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$    d)  $\frac{1}{2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$

**Zadanie 9.** Rozwiązać równania i nierówności

a)  $\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 34$ ,   b)  $\sqrt{x + 1} + x^2 - 2x - 1 = 0$ ,

c)  $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$ ,   d)  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt[3]{9x - 10 - 2x^2}$

e)  $\sqrt{1 + x^2} \geq x + 1$ ,   f)  $(x - 1)\sqrt{x + 4} < 2 - 4x$    g)  $x^2 - |5x| = 0$ ,

h)  $(x^2 + 2)|x - 1| < 6(x - 1)$ .

**Zadanie 10.** Przekształcić do najprostrzej postaci

a)  $\left[ \frac{1 - a^2}{\left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \left(\frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)} + 1 \right] \sqrt{(1 - a)^2}$

b)  $\frac{\sqrt{a - 2\sqrt{a} + 1}}{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{a} + 1} : \frac{\sqrt[4]{a} + 1}{\sqrt[4]{a} - 1} + 1$ .

**Zadanie 11.** *Anie ma trzy razy więcej braci niż siostr, natomiast jej brat ma tyle samo braci co siostr. Ile dzieci jest w tej rodzinie?*

**Zadanie 12.** *Świeże grzyby zawierają 90% wody. W wyniku suszenia masa grzybów zmniejszyła się dziewięciokrotnie. Ile procent wody zawierają suszone grzyby?*

**Zadanie 13.** *Przy zamkniętym zaworze odpływowym pusty basen napelnia się w ciągu ośmiu godzin. Gdy zawór odpływowy jest otwarty napelnianie basenu trwa 24 godziny. Ile czasu potrzeba na opóźnienie basenu jeśli nie dopływa doń woda?*