

1. Funkcja wykładnicza

Zadanie 1. Która z liczb jest większa

$$\sqrt[3]{25} \text{ czy } \sqrt[4]{125}, \quad (27)^{\sqrt{3}} \text{ czy } 243, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^\pi \text{ czy } \frac{8}{27}.$$

Zadanie 2. Rozwiązać równania i nierówności:

$$(25)^x + 6 \cdot 5^x + 5 = 0, \quad (2)^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-1} - 9 \leq 0, \quad (\sqrt{6})^{x+1} > (\sqrt[3]{6})^x, \quad (5\sqrt{5})^z = 0,04 \cdot (125)^{x-2}.$$

Zadanie 3. Dla jakiej wartości parametru m równanie ma dwa różne rozwiązania

$$3^{|x|} = m, \quad (25)^x - m \cdot 5^x - m + \frac{5}{4} = 0.$$

Zadanie 4. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = |2^x - 4| + 1$, a następnie określić liczbę pierwiastków równania $f(x) = k^2$ w zależności od wartości parametru k .

Zadanie 5. Znaleźć największą liczbę x dla której zachodzi równość $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y} - \left(\frac{3}{4}\right)^{y-x} = \frac{7}{12}$ i nierówność $xy + y \leq 9$.

Zadanie 6. Wyznaczyć te wartości parametru m , dla których równanie

$$(0,5)^{x^2 - mx + 0,5m - 1,5} = (\sqrt{8})^{m-1} \text{ ma dwa różne pierwiastki dodatnie.}$$

Zadanie 7. Wyznaczyć te wartości parametru k , dla których iloczyn różnych pierwiastków równania

$$5^{\left(\frac{x^2}{2}\right)} \cdot \sqrt{(125)^{kx+k+1}} - \frac{\sqrt{(25)^{k(k-1)}}}{5^{x(-x-1)}} = 0 \text{ jest najmniejszy.}$$

Zadanie 8. Naszkicować wykres funkcji, która każdej wartości parametru m przypisuje liczbę pierwiastków równania $(m-1)4^x - 4 \cdot 2^x + m + 2 = 0$.

Zadanie 9. Rozwiązać równanie $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.

Zadanie 10. Rozwiązać nierówność $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^x < 4$.

Zadanie 11. Rozwiązać nierówność $8^x + 5 \cdot 2^x < 4^{x+1} + 2$.

5. Funkcja logarytmiczna

Zadanie 12. Obliczyć $\frac{\log_6 125}{\log_6 5}$, $\log_6 \sqrt{6}$, $\log_5 0,2$.

Zadanie 13. Czy funkcje f, g są równe

$$f(x) = \log(x-3) - \log(x+2), \quad g(x) = \log \frac{x-3}{x+2},$$

$$f(x) = \log x^4, \quad g(x) = 4 \log x,$$

$$f(x) = \log(x-1) \cdot \log(x+4), \quad g(x) = \log(2x+3).$$

Zadanie 14. Wiedząc, że $\log_{12} 2 = a$ obliczyć $\log_6 16$

Zadanie 15. Obliczyć $\log_{abc} p$ jeżeli $\log_a p = 2$, $\log_b p = 3$, $\log_c p = 6$

Zadanie 16. Uzasadnić, że $3^{\log_2} = 2^{\log_3}$.

Zadanie 17. Uzasadnić, że jeżeli $a, b, c \in (0, \infty)$ przy czym $c \neq 1$ i $a^2 + b^2 = 7ab$ to $\log_c \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_c a + \log_c b)$.

Zadanie 18. Zbadać parzystość funkcji: $f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}$, $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

Zadanie 19. Naszkicować wykresy funkcji $h(x) = \log_2(x^2 - x) - \log_2(1 - x)$, $g(x) = 0,5 \log_2 x^2$.

Zadanie 20. Rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases} 2^{\log x} \cdot 4^{\log y} = 32 \\ x^{\log y} = 100 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \log_x 2 + 3 \log_y 2 = 0 \\ x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_x y - 4 \log_y x = 3 \\ xy = 32 \end{cases}$$

Zadanie 21. Wyznaczyć te wartości parametru k , dla których suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - 2x - \log_{\frac{1}{3}} k^2 = 0$ jest mniejsza od 6.

Zadanie 22. Wyznaczyć te wartości parametru k , dla których spełniona jest nierówność $\log_2 x_1 + \log_2 x_2 < 0$, gdzie x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + m = 0$.

Zadanie 23. Zaznaczyć zbiór punktów (x, y) takich, że $\log_{(x-y)}(x+y) \leq 1$.

Zadanie 24. Rozwiązać równanie $\log_x 27 + \log_3 x = -2$.

Zadanie 25. Rozwiązać równanie $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.

Zadanie 26. Rozwiązać równanie $x + \log(2^x + 1) = x \log 5 + \log 6$.

Zadanie 27. Rozwiązać nierówność $2^{\log_8(x^2 - 6x + 9)} < 3^{2 \log_x \sqrt{x} - 1}$.