

2. Funkcje trygonometryczne

Zadanie 1. Obliczyć $\sin 15^\circ$, $\sin 105^\circ$, $\operatorname{tg} 105^\circ$.

Zadanie 2. Obliczyć $\sin 2x$ wiedząc $\sin x = \frac{24}{25}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Zadanie 3. Obliczyć $\sin x$ oraz $\cos x$ wiedząc $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Zadanie 4. Obliczyć $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$.

Zadanie 5. Zapisać w postaci iloczynowej

$$\cos x + \cos 7x, \quad \sin x - \cos x, \quad \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{3}), \quad \sin x + \sin 3x + \sin 5x.$$

Zadanie 6. Zapisać w postaci sumy $\cos 2x \cdot \cos 4x$, $\sin 3x \cdot \cos 5x$,

Zadanie 7. Rozwiązać równania: $\sin 5x + \sin x = 0$, $\sin x - \cos x = 0$,

$$\sin x + \cos x = 1, \quad \cos 2x + 2\cos x + 1 = 0, \quad \operatorname{tg}^4 x + 4\operatorname{tg} x + 3 = 0,$$

$$3^{\sin^2 x} = 3^{\cos^2 x} + 2, \quad 4(\log_2 \cos x)^2 + \log_2(1 + \cos 2x) = 3.$$

Zadanie 8. Zbadać istnienie rozwiązania równania w zależności od parametru m

$$\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = m, \quad \sin^4 x + \cos^4 x = m,$$

$$\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x = \log(m - 1) - \log(3 - m), \quad \sin 3x = \frac{k^2 - 3k + 2}{k^2 - 2}.$$

Zadanie 9. Rozwiązać równanie $\sin 2(x - \pi) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$.

Zadanie 10. Rozwiązać równanie $3 - 2\sqrt{2}\sin x = 2\cos^2 x$.

Zadanie 11. Rozwiązać równanie $\sin x - \cos x = 1$.

Zadanie 12. Rozwiązać równanie $\sin 6x - \sin 4x = \sin 4x - \sin 2x$.

Zadanie 13. Wykazać, że dla dowolnego $x \neq 2\pi$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Zadanie 14. Wykazać, że dla dowolnego $x \neq 2\pi$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$