Lista 2
Ciągi

Z. 1. Dla podanych ciągów napisać wzory określające wskazane wyrazy:

a) $a_n = (n-1)!$, a_{n+1},

b) $b_n = n^{n+1}$, b_{n^2-1},

Z. 2. Które z podanych ciągów są ograniczone:

a) $a_n = \sin \frac{2\pi}{n+1}$,

b) $a_n = \cos n^2$,

c) $a_n = \frac{1-8n}{1-7\sqrt{n}}$,

Z. 3. Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, czy są ograniczone

a) $a_n = \frac{4+\cos n}{3-2\sin n}$,

b) $a_n = \sqrt[n]{3^n+1}$,

c) $a_n = \frac{5^n-2}{2^n+7}$,

d) $a_n = \sqrt{n+6} - \sqrt{n+1}$,

e) $a_n = \frac{1}{5^1+1} + \frac{1}{5^2+1} + \ldots + \frac{1}{5^n+n}$,

f) $a_n = 4^n - 5^n$.

Z. 4. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca

a) $a_n = \frac{3n+1}{n+3}$,

b) $a_n = \frac{n!}{2^n}$,

c) $a_n = \frac{1}{n^2-4n+5}$,

d) $a_n = \frac{5^n}{4^n+6^n}$,

e) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

Definicja. Ciąg arytmetyczny
n-ty wyraz ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Wzór na sumę

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n.$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

dla $n \geq 2$.

Z. 5. Suma drugiego i piątego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 19, a ich iloczyn jest równy 70. Znaleźć pierwszy wyraz i różnicę ciągu.

Z. 6. Obliczyć sumę wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3.

Definicja. Ciąg geometryczny
n-ty wyraz ciągu geometrycznego o danym pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Wzór na sumę

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & dla\, q \neq 1, \\ n \cdot a_1 & dla\, q = 1 \end{cases}.$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek

$${a_n}^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

dla $n \geq 2$.

Z. 7. Czy ciąg $\sqrt{2}+\sqrt{3}, -2, 4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ jest ciągiem geometrycznym?

Z. 8. Iloczyn pierwszych trzech wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 8, a ich suma jest równa $\frac{21}{2}$. Znaleźć pierwszy wyraz i iloraz ciągu.

Z. 9. Dla jakich wartości x liczby

$$1-2\sqrt{6}x,\ \sqrt{8x-1}, 1+2\sqrt{6}x$$

tworzą ciąg geometryczny?

Z. 10. a) Przez dwa kolejne dni notowań indeks giełdowy wzrastał po 5% dziennie, a przez kolejne dwa dni spadał po 5% dziennie. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po czwartym dniu notowań?
b) Przez dwa kolejne dni notowań indeks giełdowy spadał po 5% dziennie, a przez kolejne dwa dni rósł o 5% dziennie. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po czwartym dniu notowań?
c) Pierwszego dnia indeks wzrósł o 5%, drugiego dnia spadł o 5%, trzeciego dnia znów wzrósł o 5% i czwartego dnia ponownie odnotował pięcioprocentowy spadek. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po czwartym dniu notowań?
d) Przez kolejnych 50 dni roboczych indeks rósł codziennie o 5%. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po pięćdziesiątym notowaniu?

Z. 11. Zakładając, że średni przyrost naturalny na Ziemi równy jest 1,3% rocznie obliczyć po jakim czasie licza ludzi na planecie się podwoi.

Z. 12. Niech a_n będzie ciągiem arytmetycznym, wykaż, że

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

Z. 13. Niech a_n będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy $r\neq 0$, takim że $a_n\neq 0$ dla $n\geq 1$, wykaż, że

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right).$$

Z. 14. Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić równości

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$,

b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$.

Definicja granicy właściwej ciągu (a_n):

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{\substack{n\geq n_0\\ n\in\mathbb{N}}}\ |a_n-a|<\epsilon.$$