

3. Wielomiany, funkcja kwadratowa

Zadanie 1. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 1$ wynosi 1, reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 2$ wynosi 4. Znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x^2 - 3x + 2$.

Zadanie 2. Wyznacz wartości parametrów a, b tak aby liczba 1 była dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$.

Zadanie 3. $W(x)$ jest wielomianem czwartego stopnia, a liczba 3 jest jego czterokrotnym pierwiastkiem. Wiedząc, że $W(1) = 80$ wyznaczyć $W(x)$.

Zadanie 4. Rozwiązać $|x^3 + x + 1| = 1$, $x^3 + |x^2 - 2x| = 0$, $|x^3 - 3x| \geq 2$, $|x^3 - x| \leq 3x$.

Zadanie 5. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^4 - 6x^2 + m = 0$ ma cztery różne rozwiązania.

Zadanie 6. Wykazać, że jeżeli wielomian $W(x) = x^3 + ax + b$ ma pierwiastek dwukrotny, to $4a^3 + 27b^2 = 0$.

Zadanie 7. Dla jakich wartości parametru $W(x) = 2x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 10x + m$ ma pierwiastek trzykrotny.

Zadanie 8. Uzasadnij, że równanie $x^3 + 3x^2 + 2x = (2006)^3$ nie ma pierwiastków całkowitych.

Zadanie 9. Udowodnić, że jeżeli wielomian $W(x) = x^3 + px + q$ ma trzy różne pierwiastki to $p < 0$.

Zadanie 10. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że $n^4 + 4$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 11. Określić liczbę rozwiązań w zależności od wartości parametru m

$$\frac{p}{x-3} = 2, \quad \frac{x+2}{x+p} = 2, \quad \frac{x}{x-3} = p.$$

Zadanie 12. Naskicować wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{x+2}{x-2} \right|$, a następnie określić liczbę rozwiązań równania $f(x) = p$ w zależności od wartości parametru m .

Zadanie 13. Wyznaczyć te wartości parametru p dla których równanie $x - \frac{p-6}{x-2} = 4$ ma
a) dokładnie jedno rozwiązanie b) dwa rozwiązania.

Zadanie 14. Wyznaczyć te wartości parametru p dla których nierówność

$$\frac{(m+1)x^2 - mx + 1}{x^2 - (m+2)x + 1} > 0$$

jest prawdziwa dla każdej wartości parametru x .

Zadanie 15. Dwie pracownice poczty miały ostemplować partię listów. Pierwsza rozpoczęła o 8^{00} , a druga o 9^{00} . O 11^{00} stwierdziły, że ostemplowały 45% listów. Po skończeniu pracy stwierdziły, że każda ostemplowała tyle samo listów. O której godzinie skończyły stemplowanie? Ile czasu zajęłaby ta praca każdej z urzędniczek gdyby wykonała ją samodzielnie?