Temat Geometria analityczna w przestrzenni

1. Obliczyć długości wektorów:
a) $a = [3, -4, 12]$; **b)** $b = [\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{2}]$;
c) $c = [\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, h]$, gdzie $\varrho \geqslant 0$ oraz $\varphi, h \in \mathbb{R}$;
d) $d = [\varrho\cos\varphi\cos\psi, \varrho\sin\varphi\cos\psi, \varrho\sin\psi]$, gdzie $\varrho \geqslant 0$ oraz $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$.

2. Wektory a, b tworzą dwa sąsiednie boki trójkąta. Wyrazić środkowe tego trójkąta przez wektory a, b.

3. Znaleźć wersor u, który:
a) leży w płaszczyźnie xOy i tworzy kąt α z dodatnią częścią osi Ox;
b) tworzy z dodatnimi częściami osi Ox, Oy, Oz odpowiednio kąty α, β, γ;
c) tworzy jednakowe kąty z wektorami $a = [0, 3, -4]$, $b = [8, 6, 0]$ i jest położony w płaszczyźnie wyznaczonej przez te wektory.

4. Obliczyć iloczyny skalarne par wektorów:
a) $a = [1, -2, 5]$, $b = [3, -1, 0]$;
b) $u = 3\hat{\imath} - 2\hat{k}$, $v = -\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 7\hat{k}$;
c) $x = p + 2q - r$, $y = 3p - q + 2r$, gdzie p, q, r są wersorami parami prostopadłymi.

5. Korzystając z iloczynu skalarnego obliczyć miary kątów między:
a) wektorami $a = [-3, 0, 4]$, $b = [0, 1, -2]$;
b) dwusiecznymi kątów utworzonych przez osie Ox, Oy oraz osie Oy, Oz układu $Oxyz$;
c) przekątnymi równoległościanu rozpiętego na wektorach $u = [1, 2, 3]$, $v = [-1, 0, 2]$, $w = [3, 1, 5]$.

6. Obliczyć długość rzutu prostokątnego wektora $a = [\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}]$ na wektor $b = [-\sqrt{8}, 0, \sqrt{5}]$.

7. Obliczyć iloczyny wektorowe par wektorów:
a) $a = [-3, 2, 0]$, $b = [1, 5, -2]$; **b)** $u = 2\hat{\imath} - 3\hat{k}$, $v = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$;
c) $x = 2p + q + r$, $y = p + 3q + 4r$, gdzie p, q, r są parami prostopadłymi wersorami o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych.

8. Obliczyć pola powierzchni:
a) równoległobok rozpięty na wektorach $a = [1, 2, 3]$, $b = [0, -2, 5]$;
b) trójkąt o wierzchołkach $A = (1, -1, 3)$, $B = (0, 2, -3)$, $C = (2, 2, 1)$;
c) czworościan rozpięty na wektorach u, v, w.

9. Trójkąt ABC rozpięty jest na wektorach $\overrightarrow{AB} = [1, 5, -3]$, $\overrightarrow{AC} = [-1, 0, 4]$. Obliczyć wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.

5.10. Obliczyć iloczyny mieszane trójek wektorów:
a) $a = [-3, 2, 1]$, $b = [0, 1, -5]$, $c = [2, 3, -4]$;
b) $u = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$, $v = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$, $w = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 5\hat{k}$.

5.11. Obliczyć objętości wielościanów:
a) równoległościan rozpięty na wektorach $a = [0, 0, 1]$, $b = [-1, 2, 3]$, $c = [2, 5, -1]$;
b) czworościan o wierzchołkach $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (2, 3, -1)$, $D = (-1, 3, 5)$;
c) równoległościan o przekątnych u, v, w.

12. Sprawdzić, czy
a) wektory $a = [-1, 3, -5]$, $b = [1, -1, 1]$, $c = [4, -2, 0]$ są współpłaszczyznowe;
b) punkty $P = (0, 0, 0)$, $Q = (-1, 2, 3)$, $R = (2, 3, -4)$, $S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe.

13. Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzn spełniających warunki:
a) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (1, -2, 0)$ i jest prostopadła do wektora $n = [0, -3, 2]$;
b) płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (1, 2, 3)$, $P_3 = (-1, -3, 5)$;
c) płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (1, -3, 4)$, $P_2 = (2, 0, -1)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny xOz;
d) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (1, -1, 3)$ oraz jest równoległa do wektorów $a = [1, 1, 0]$, $b = [0, 1, 1]$;
e) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (0, 3, 0)$ i jest równoległa do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2 = 0$;
f) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (2, 1, -3)$ i jest prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x + y = 0$, $\pi_2 : y - z = 0$.

14. Napisać równania parametryczne i kierunkowe prostych spełniających warunki:
a) prosta przechodzi przez punkt $P = (-3, 5, 2)$ i jest równoległa do wektora $v = [2, -1, 3]$;
b) prosta przechodzi przez punkty $P_1 = (1, 0, 6)$, $P_2 = (-2, 2, 4)$;
c) prosta przechodzi przez punkt $P = (0, -2, 3)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2z - 6 = 0$;
d) prosta przechodzi punkt $P = (7, 2, 0)$ i jest prostopadła o wektorów $v_1 = [2, 0, -3]$, $v_2 = [-1, 2, 0]$;
e) prosta jest dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste

$$l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{5}, \qquad l_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z}{3};$$

15. Zbadać, czy
a) punkty $A = (1, 2, 3)$, $B = (-1, -2, 0)$ należą do prostej

$$l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 3 - t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R};$$

b) prosta $m : \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ jest zawarta w płaszczyźnie

$$\pi : 5y - 3z + 13 = 0;$$

c) punkty $A = (0, 1, 5)$, $B = (1, 2, 3)$ należą do płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s + t, \\ y = 2 + 3s - t, \\ z = 3 - s + 2t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R};$$

d) proste $l_1 : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+4}{-8}$, $l_2 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ mają punkt wspólny;

e) prosta $l : \begin{cases} x = t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 + 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, jest równoległa do płaszczyzny

$$\pi : x + y - z + 3 = 0.$$

16. Znaleźć punkty przecięcia:
a) prostych $l_1 : \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0, \\ y + z - 3 = 0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} 2x - y - 2z + 8 = 0, \\ x + 2y + 2z - 5 = 0; \end{cases}$

b) prostej $l : \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{-1}$ i płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = s + t, \\ y = 1 + s + 2t, \\ z = 3 + 2s + 4t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R};$$

c) płaszczyzn $\pi_1 : 3x + y + z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + 2z + 6 = 0$, $\pi_3 : 3y + 2z = 0$.

17. Obliczyć odległość:
a) punktu $P = (1, -2, 3)$ od płaszczyzny $\pi : x + y - 3z + 5 = 0$;
b) płaszczyzn równoległych $\pi_1 : 2x + y - 2z = 0$, $\pi_2 : 2x + y - 2z - 3 = 0$;
c) płaszczyzn $\pi_1 : x - 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_2 : 3x - 6y + 6z - 3 = 0$;
d) punktu $P = (0, 1, -1)$ od prostej $l : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{3}$;
e) prostych równoległych $l_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$, $l_2 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z-3}{2}$;
f) prostych skośnych $l_1 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} x = 1, \\ z = 1; \end{cases}$
g) prostych $l_1 : \dfrac{x-9}{4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z}{1}$, $l_2 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{9} = \dfrac{z-2}{2}$;
h) prostej $l : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = 2 - t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, od płaszczyzny $\pi : 2x + y + 4z = 0$.

18. Znaleźć rzut prostokątny:
a) punktu $P = (-3, 2, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x + y + z = 0$;
b) punktu $P = (-1, 2, 0)$ na prostą $l : x = y = z$;
c) prostej $l : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{0}$ na płaszczyznę $\pi : x + 3y - 2z - 6 = 0$.

20. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (2, 3, -1)$ względem:
a) punktu $S = (1, -1, 2)$; **b)** prostej $l : \begin{cases} x + y = 0, \\ y + z = 0; \end{cases}$
c) płaszczyzny $\pi : 2x - y + z - 6 = 0$.